Lineare Programmierung

Lineares Programm ist eine Instanz des Optimierungsproblems:

Instanz: $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$

Lösung: $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \geq b$ und $x \geq \vec{0}$

Maß: $c^T x$

geschrieben:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && c^T x \\ &\text{subject to} && Ax \geq b \\ & && x \geq 0 \end{aligned}$$

Algorithmen:

Simplex	worst-case exponentiell,	praktisch gut
Khachian	polynomiell,	praktisch unbrauchbar
Karmarkar	— " —	etwas besser, aber nicht so gut wie Simplex

Varianten:

(A) Gleichungen, unbeschränkte Variablen:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && c^T x \\ &\text{subject to} && Ax \geq b \\ & && A'x = b' \\ & && x_1 \geq 0, \dots, x_r \geq 0 \end{aligned}$$

keine Bedingung an $x_{r+1}, \dots, x_n$

äquivalent:

1) $ax = b_i$ ersetzt durch $ax \geq b_i$ und $-ax \geq -b_i$

2) unbeschränkte Variable x_j ersetzt durch x_j^+ x_j^- mit
$x_j^+ \geq 0$ $x_j^- \geq 0$. Jedes Vorkommen von x_j durch $x_j^+ - x_j^-$

(B) nur Gleichungen

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && c^T x \\ &\text{subject to} && Ax = b \\ & && x \geq 0 \end{aligned}$$

äquivalent:

F. jede Ungleichung $ax \geq b_i$ neue Variable s_i mit

$ax - s_i = b_i$ $\quad s_i \geq 0$

(c) Maximierung

maximize $c^T x$

subject to $Ax \le b$

$x \ge 0$

Äquivalent: ersetze $c^T x$ durch $-c^T x$ und

Ungleichung $ax \le b_i$ durch $ax + s_i = b_i$, $s_i \ge 0$

Dualität:

Minimierungs-Lineares Programm P.

Frage: $m^* \le t$ kann durch Angabe einer Lösung x mit $cx \le t$ positiv beantwortet werden (Zeuge)

Negative Antwort? $m^* \ge t$ bezeugen?

minimize $7x_1 + x_2 + 5x_3$

subject to

$$x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 10$$
$$5x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Koeffizientenvergleich: $7x_1 + x_2 + 5x_3 \ge x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 10$,

also $m^* \ge 10$

besser: $7x_1 + x_2 + 5x_3 \ge x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 16$,

also $m^* \ge 16$

Gesucht: Linearkombination der Ungleichungen derart dass jede Spaltensumme $\le$ Koeffizient in c.

$\leadsto$ Duales Programm D

P			D		
Gleichung	$\sum_j a_{ij} x_j = b_i$		Variable	y_i	
Ungleichung	$\sum_j a_{ij} x_j \ge b_i$		Variable	y_i	mit $y_i \ge 0$
Variable	x_j		Gleichung	$\sum_i a_{ij} y_i = c_j$	
Variable	x_j	$x_j \ge 0$	Ungleichung	$\sum_i a_{ij} y_i \le c_j$	
minimize	$c^T x$		maximize	$b^T y$	

Dualitätstheorem:

P hat optimale Lösung gdw. D hat optimale Lösung, und für optimale Lösungen x^* von P und y^* von D gilt

$$c^T x^* = b^T y^*$$

schwache Version: F. jede Lösung x von P und y von D gilt

$$c^T x \geq b^T y$$

(Annahme: keine Gleichungen, unbeschränkte Variable)

Bew.:

f. alle j $\quad \sum_i a_{ij} y_i \geq c_j \quad$ da y Lösung von D

$$\Rightarrow \sum_j c_j x_j \leq \sum_j \left(\sum_i a_{ij} y_i \right) x_j \qquad \circledast$$

da x Lösung für P:

$$\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i \qquad \text{f. alle } i$$

$$\Rightarrow \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j \right) y_i \geq \sum_i b_i y_i \qquad \circledast$$

$\square$

$\longrightarrow$ Korollar: Complementary slackness conditions:

x, y sind optimal gdw. in $\circledast$ Gleichheit gilt, also

Primal CSC:

f. alle j: $\quad x_j = 0 \quad$ oder $\quad \sum_i a_{ij} y_i = c_j$

Dual CSC:

f. alle i: $\quad y_i = 0 \quad$ oder $\quad \sum_j a_{ij} x_j = b_i$

Anwendung:

Da Integer Linear Programming NP-hart ist, sind viele NPO-Probleme auf ILP reduzierbar.

Idee: lockern der Anforderung "ganzzahlig"

→ lineares Programm, effizient lösbar

→ optimale rationale Lösung

→ ganzzahlige Lösung durch Runden.

nicht notwendig optimal, aber oft eine gute Approximation.

Beispiel MIN. WEIGHTED VERTEX COVER (FOLIE)

Behauptungen:

(1) U ist ein vertex cover

Sei $\{v_i, v_j\}$ nicht überdeckt, d.h. $v_i \notin U$, $v_j \notin U$.

Denn ist $x_i^* < \frac{1}{2}$, $x_j^* < \frac{1}{2}$, also $x_i + x_j < 1$

→ x^* ist keine Lösung ↯

(2) Da Lösung des ILP auch das gelockerte löst: $m^* \geq m^*(LP)$ (= Wert der optimalen Lösung des LP)

Also:

$$m_{LP} = \sum_{v_i \in U} c_i \leq 2 \sum_{v_i \in V} c_i x_i^* = 2m^*(LP) \leq 2m^*$$

□

Primal-Dual Algorithmen

Idee: Benutze die untere Schranke, die durch Lösungen des dualen Programms gegeben sind.

I ganzzahliges lineares Programm

P dessen Lockerung

D das dazu duale Programm.

Schema: man hält zwei Vektoren.

x nicht notwendig Lösung für I

y Lösung für D, nicht notwendig optimal.

(üblicherweise $x = 0$, $y = 0$)

Diese werden schrittweise verändert, so dass y immer besser wird, und x immer "mehr I löst".

Dabei soll stets die Primal CSC gelten:

f. alle j $\quad x_j = 0$ oder $\sum_i a_{ij} y_i = c_j$

und ausserdem eine abgeschwächte Dual CSC.

f. alle i $\quad y_i = 0$ oder $\sum_j a_{ij} x_j \le \alpha \cdot b_j$

Der Algorithmus terminiert, wenn x I löst.

Dann gilt:

$$\sum_j c_j x_j = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j \right) y_i \le \alpha \sum_i b_i y_i$$

Since $\sum_i b_i y_i \le m^*$, performance ratio is α $\square$

Bsp: Minimum Vertex Cover (Folie)

Beweis (Satz):

$$m_{PD} = \sum_{v_i \in U} c_i = \sum_{v_i \in U} \sum_{j : \{v_i, v_j\} \in E} y_{ij} \le \sum_{v_i \in V} \sum_{j : \{v_i, v_j\} \in E} y_{ij} \le 2 \sum_{i,j} y_{ij}$$

(Oder einfach $x_i + x_j \le 2$ f. $\{v_i, v_j\} \in E$, schon gezeigt!) $\quad \le 2 m^*$

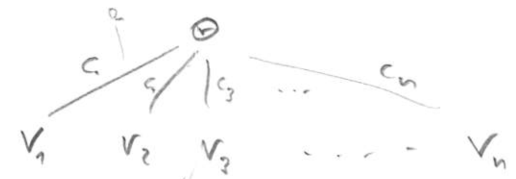
Weiteres Bsp:

Minimum Multicut

Reduktion M.W.-Vertex Cover $\rightsquigarrow$ MM:

$G = (V, E)$, c_i, $i \in V$

$\rightsquigarrow$



Für Kante $\{v_i, v_j\} \in E$: Paar (v_i, v_j).

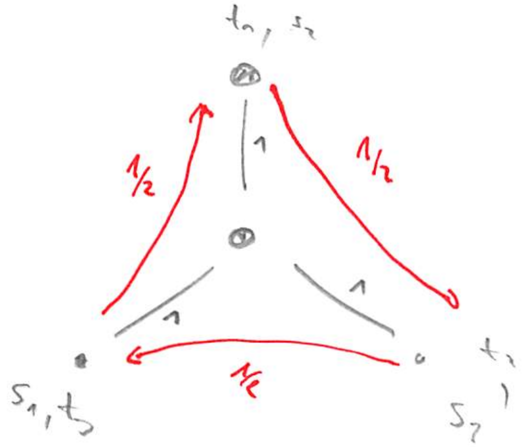
U vertex cover $\rightarrow$ $\{e_i : v_i \in U\}$ ist Multicut

Kosten bleiben gleich! $\square$

---

im Baum: eindeutiger Pfad von u nach v f. alle u, v.

Bsp:



Fluß im Bsp

Wert = $\frac{3}{2}$

$\rightsquigarrow$ Lösung optimal!

optimaler Multicut: 2 Kanten, Kosten 2

Lösung des LP: $\underline{x_e = \frac{1}{2}}$ f. alle e,

Kosten $\frac{3}{2} < 2$ $\square$

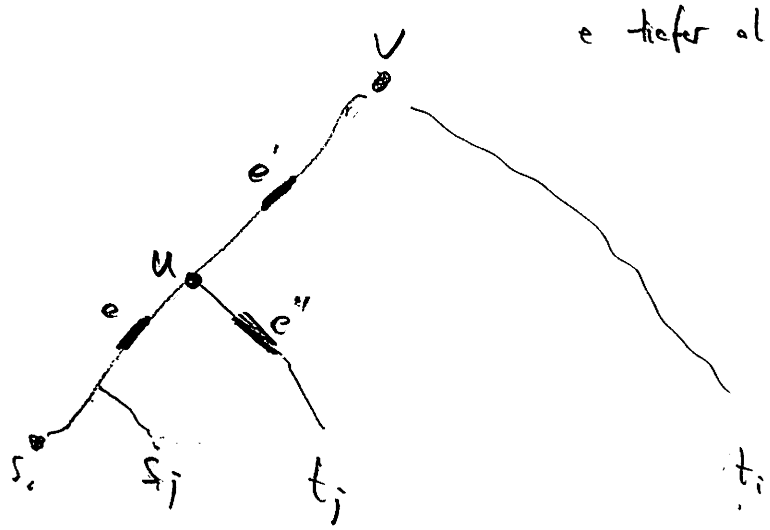
Korrektheit des Algorithmus:

- nach Phase 1 ist C ein Multicut
  - $\rightsquigarrow$ auf jedem Pfad p_i eine gesättigte Kante, entweder schon vorher, oder bei Behandlung von p_i
  - $\longrightarrow$ Multicut
- in Phase 2 bleibt Eigenschaft erhalten!

Beweis

Lemma: Seien e, e' auf Pfad $s_i \to v$ ausgewählt, in C

e tiefer als e'



Wenn e in Phase 2 betrachtet wird, nicht gelöscht $\frown$

$\rightsquigarrow$ gibt Pfad p_j mit e einziger Kante daraus in C.

$u := lca(s_i, t_j)$.

Da e' nicht auf p_j liegt ist u tiefer als e',
also tiefer als v.
Nach Behandlung von u muss Kante e'' auf p_j in C liegen.

Da $y_i > 0$, muss e bei oder nach Behandlung von v in C aufgenommen sein. (sonst schon gestrichen, und y_i wäre 0)

Da u tiefer als v, wird e nach e'' eingefügt, also in Phase 2 zuerst behandelt.

Also ist bei Betrachtung von e in Phase 2 e'' noch in C $\rightarrow$ $\boxed{\text{zu } e \text{ einzige Kante auf } P_Y}$ ↯

Argument für Pfad $v \rightarrow t_i$ analog. $\square$

Beweis Satz:

Nach Lemma gilt die abgeschwächte Dual CSC, also $m_{PD} \leq 2m^*$ nach allg. PD-Schema:

$$m_{PD} \leq 2\, m_{DUAL}(\vec{y}) \leq 2m^*$$

$\square$