

Automatentheorie

Blatt 4

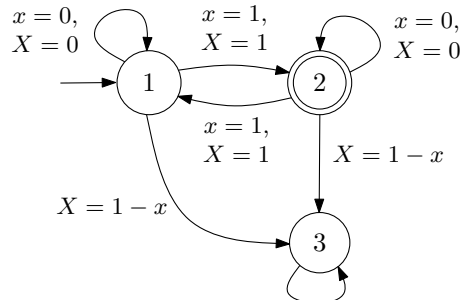
Aufgabe 4-1. Ein Bauer muss seinen Hund, seine Katze und seine Maus mit einem Boot über einen Fluss bringen. Ins Boot passen aber immer nur er und ein Tier. Ist der Bauer bei seinen Tieren an einem Ufer, dann sind alle brav. Ist er nicht bei ihnen, dann muss er darauf achten, dass niemals

- der Hund und die Katze zusammen an einem Ufer sind, denn die Katze würde dem Hund sonst eine risikoreiche Kapitalanlage aufschwätzen,
- die Katze und die Maus zusammen an einem Ufer sind, denn die Maus würde die Katze sonst zum Rauchen verleiten.

Lassen Sie sich von Mona einen Weg berechnen, wie der Bauer seine Tiere an das andere Ufer bringen kann, ohne dass der Hund sein Geld und die Katze ihre Gesundheit verliert. Berechnen Sie ebenfalls mit Mona die Mindestzahl an Überfahrten, die er mit dem Boot machen muss.

Aufgabe 4-2. Im Satz von Büchi-Elgot wird für jede wMSO-Formel ein NFA konstruiert.

- a) Führen Sie die Konstruktion des NFA konkret für die Formel $x < y \rightarrow X(x)$ aus.
- b) Sei φ eine Formel, in der (gebunden oder ungebunden) die erststufigen Variablen x und y sowie eine zweitstufige Variable X vorkommen. Angenommen ein Automat für φ wurde bereits gefunden:



In den Übergängen dieses Automats wird hierbei eine Kurzschreibweise für die Alphabetsymbole benutzt. Das Alphabet besteht aus allen Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \\ X \end{pmatrix}$ mit $x, y, X \in \{0, 1\}$. Anstatt die Alphabetsymbole für jeden Übergang explizit aufzuzählen, ist jeder Übergang mit einer Bedingung beschriftet. Gemeint sind damit jeweils alle Symbole, welche die Bedingung erfüllen. Ist eine Kante zum Beispiel mit „ $X = 1 - x, y = 1$ “ beschriftet, so sind damit die beiden Symbole $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gemeint.

- i) Geben Sie einen Automaten für $\exists x. \varphi(x, y, X)$ an.
- ii) Geben Sie eine konkrete Formel φ an, so dass der obige NFA genau die (als Wörter kodierten) Interpretationen I akzeptiert, für welche $I \models \varphi$ gilt.