Prof. Martin Hofmann
Dr. Ulrich Schöpp

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
22. Dezember 2011

Automatentheorie

Blatt 11

Aufgabe 11-1. Frau Müller möchte ein nebenläufiges Programm analysieren, in dem drei Prozesse P_1, P_2 und P_3 parallel arbeiten und in dem es einen kritischen Bereich gibt, den jeweils nur ein Prozess betreten darf. Da das Programm recht kompliziert ist, möchte Frau Müller bestimmte Eigenschaften in wMSO ausdrücken und diese dann durch Benutzung von Automaten automatisch überprüfen lassen.

Sie modelliert den endlichen Ablauf des Programms als Folge von Programmzuständen an Zeitpunkten $0, 1, \ldots, n$. Sie formalisiert dies in wMSO durch zweitstufige Variablen W_1, W_2, W_3 und C_1, C_2, C_3 mit folgender Bedeutung:

- Die Interpretation von W_i ist die (endliche) Menge aller Zeitpunkte, an denen der Prozess i darauf wartet, den kritischen Bereich zu betreten.
- Die Interpretation von C_i ist die (endliche) Menge aller Zeitpunkte, an denen der Prozess i im kritischen Bereich ist.

Drücken Sie folgende Sachverhalte durch wMSO-Formeln aus:

a) Zu keinem Zeitpunkt ist mehr als ein Prozess im kritischen Bereich.

b) Wenn einer der Prozesse zu irgendeinem Zeitpunkt darauf wartet, den kritischen Bereich zu betreten, dann wird er den kritischen Bereich später auch tatsächlich betreten.

c) Der Prozess P_2 befindet sich nur an Zeitpunkten mit gerader Nummer im kritischen Bereich; P_1 dagegen nur an Zeitpunkten mit ungerader Nummer.

Aufgabe 11-2. Die folgenden wMSO-Formeln sind erfüllbar, aber nicht allgemeingültig. Geben Sie für jede Formel eine Interpretation, welche die Formel erfüllt, und eine, welche die Formel nicht erfüllt.

a) $X(x) \wedge \neg X(y) \wedge \forall y.\, y < x \rightarrow X(y)$

b) $\forall x.\, X(x) \leftrightarrow X(y)$

c) $\exists X.\, (\forall u.\, \forall v.\, u < v \rightarrow X(v) \rightarrow X(u)) \wedge X(x) \wedge \neg X(y)$

Aufgabe 11-3. Das Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel mit zwei Runden auf den Wörtern *abab* und *baba* wird vom Spoiler gewonnen.

a) Geben Sie einen ersten Zug für Spoiler an, so dass dieser das Spiel mit zwei Runden gewinnt.

b) Geben Sie alle möglichen Antworten von Duplicator auf den in a) von Ihnen gewählten Zug an.

c) Geben Sie für jeden möglichen Zug des Duplicator in b) einen nächsten Zug für Spoiler an, so dass Spoiler das Spiel dann am Ende dieser zweiten Runde gewinnt.

Aufgabe 11-4.

a) Geben Sie die Definition für Streett-Automaten an.

b) Seien $\mathcal{A} = (Q_A, \Sigma, q_A, \delta_A, F_A)$ und $\mathcal{B} = (Q_B, \Sigma, q_B, \delta_B, F_B)$ nichtdeterministische Büchiautomaten. Finden Sie Mengen G_1, F_1, G_2 und F_2, so dass durch

$$\mathcal{C} = (Q_A \times Q_B, \Sigma, (q_A, q_B), \delta, \{(G_1, F_1), (G_2, F_2)\}), \quad \delta((q_1, q_2), a) = \delta_A(q_1, a) \times \delta_B(q_2, a)$$

ein Streett-Automat $\mathcal{C}$ mit $L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{B})$ definiert wird.

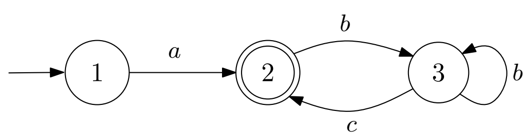
Aufgabe 11-5. Definieren Sie je einen NBA für folgende Sprachen.

a) $L_1 = \{w \in \{a, b\}^\omega \mid a \text{ kommt in } w \text{ genau zwei Mal vor.}\}$

b) $L_2 = \{w \in \{a, b\}^\omega \mid bb \text{ kommt in } w \text{ unendlich oft vor.}\}$

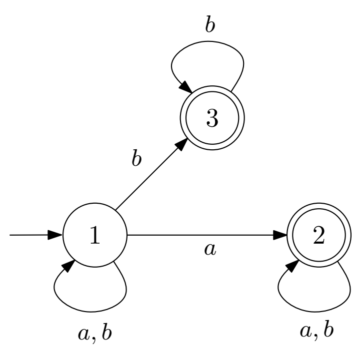
c) $L_3 = \{w \in \{a, b\}^\omega \mid bb \text{ kommt in } w \text{ nur endlich oft vor.}\}$

Aufgabe 11-6. Gegeben sei folgender NBA.



Geben Sie paarweise verschiedene, nichtleere Wörter u_1, v_1, u_2, v_2 an, für die $u_1 \sim v_1$ sowie $u_2 \not\sim v_2$ gilt, wobei $\sim$ die dem Automaten zugeordnete Äquivalenzrelation ist. Begründen Sie, warum die Wörter in Relation, bzw. nicht in Relation stehen.

Aufgabe 11-7. Sei $\mathcal{A}$ der nichtdeterministische Büchiautomat



und sei $\mathcal{B}$ der deterministische Mullerautomat, der aus $\mathcal{A}$ durch die Safra-Konstruktion gewonnen wurde.

Geben Sie die Zustände an, die $\mathcal{B}$ beim Abarbeiten der Zeichen bba, beginnend mit dem Startzustand, annimmt (in der Reihenfolge, in der sie angenommen werden).

Aufgabe 11-8. Ein *All-Büchi-Automat* $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ ist durch die gleichen Daten gegeben wie ein Büchi-Automat. Im Unterschied zu Büchiautomaten soll ein All-Büchi-Automat ein Wort w jedoch genau dann akzeptieren, wenn in *jedem* unendlichen Lauf von $\mathcal{A}$ auf w ein Endzustand unendlich oft vorkommt.

a) In dieser Teilaufgabe soll nun für einen gegebenen All-Büchi-Automaten $\mathcal{A}$ ein *deterministischer* Büchiautomat $\mathcal{B}$ mit $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$ konstruiert werden. Der Büchiautomat $\mathcal{B}$ ist definiert durch $\mathcal{B} = (2^Q \times 2^Q, \Sigma, (\{q_0\}, \emptyset), \delta, F)$ mit

$$\delta((X,Y),a) = \begin{cases} \left\{\left(\bigcup_{x\in X} \delta(x,a), \bigcup_{y\in Y} \delta(y,a) \setminus F\right)\right\} & \text{falls } Y \neq \emptyset \\ \left\{\left(\bigcup_{x\in X} \delta(x,a), \bigcup_{x\in X} \delta(x,a) \setminus F\right)\right\} & \text{falls } Y = \emptyset \end{cases}$$

$$F = \{(X, \emptyset) \mid X \subseteq Q\} \ .$$

b) Zeigen Sie $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.
Hinweis: Es bietet sich an, dafür $\overline{L(\mathcal{A})} \subseteq \overline{L(\mathcal{B})}$ und $\overline{L(\mathcal{B})} \subseteq \overline{L(\mathcal{A})}$ zu zeigen.

c) Können All-Büchi-Automaten alle ω-regulären Sprachen erkennen? Begründen Sie Ihre Antwort.