Institut für Informatik WS 2011/2012
der Universität München
Dr. J. Johannsen 15. November 2011

Übungen zur Vorlesung
Approximationsverfahren für Optimierungsprobleme

Blatt 2

Aufgabe 5: Für eine Instanz x von MAXIMUM KNAPSACK bezeichne $m_H(x)$ den Wert der vom modifizierten Greedy-Algorithmus gefundenen Lösung,

$$m_H(x) = \max(m_{Greedy}(x), p_{max}) \ .$$

Konstruieren Sie für jedes $\epsilon > 0$ eine Instanz x, für die $m^*(x)/m_H(x) > 2 - \epsilon$ ist. Die in der Vorlesung gegebene Analyse des Algorithmus kann also nicht verbessert werden.

Aufgabe 6: Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung gezeigte Schranke für die Regel *LPT* beim Problem MINIMUM SCHEDULING ON IDENTICAL MACHINES,

$$m_{LPT}(x)/m^*(x) \leq (\frac{4}{3} - \frac{1}{3p})$$

für Instanzen x mit $p = 2$ scharf ist.

Aufgabe 7: Betrachten Sie die folgende Variante *LPT'* der Regel *LPT*: die Aufträge $t_1, \ldots t_n$ seien sortiert, so dass $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \ldots \geq \ell_n$. Zunächst werden t_1 und t_2 dem Prozessor 1 zugewiesen, danach wird *List Scheduling* mit der Regel *LPT* auf die verbleibenden Aufträge $t_3, \ldots, t_n$ angewandt. Die so gefundene Lösung wird mit der durch *LPT* gefundenen verglichen und die bessere ausgewählt.

Bezeichne $m_{LPT'}(x)$ die Makespan der Lösung, die auf diese Weise gefunden wird. Geben Sie eine obere Schranke für $m_{LPT'}(x)/m^*(x)$ für Instanzen x mit $p = 2$ an, die besser ist als die für *LPT* angegebene $(m_{LPT}(x)/m^*(x) \leq \frac{7}{6})$.

Aufgabe 8: Betrachten Sie den Algorithmus *Best Fit Decreasing* für das Problem MINIMUM BIN PACKING.

Sortiere A so dass $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$
$k := 1$; $B_1 := \emptyset$
Für $i := 1$ bis n
  finde $1 \leq j \leq k$ mit $\Sigma B_j + a_i \leq 1$ and ΣB_j maximal
    falls ein solches j existiert, setze $B_j := B_j \cup \{a_i\}$
    sonst setze $k := k + 1$; $B_k := \{a_i\}$

Es gibt Beispiele, die zeigen, dass dieser Algorithmus für manche Instanzen besser ist als *First Fit Decreasing*, z.B.:

$$\begin{aligned} a_1 &= \ldots = a_n = 7/10 \\ a_{n+1} &= \ldots = a_{3n} = 2/5 \\ a_{3n+1} &= \ldots = a_{4n} = 1/5 \\ a_{4n+1} &= \ldots = a_{6n} = 3/20 \end{aligned}$$

Finden Sie eine Instanz, für die *First Fit Decreasing* weniger Bins verwendet als *Best Fit Decreasing*.

Aufgabe 9: Betrachten Sie die Maximierungs-Variante von Minimum Bin Packing, bei der zusammen mit den items $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$, mit $0 \leq a_i \leq 1$, die Zahl m der Bins, mit $\sum_i a_i \leq m$, eingegeben wird. Dabei soll die Anzahl der Items a_i, die in den m Bins untergebracht werden können, maximiert werden.

Beschreiben Sie einen sequentiellen Algorithmus für dieses Problem, analog zu *First Fit*, und zeigen Sie, dass dieser eine Lösung findet, in der mindestens $n/2$ der a_i verpackt werden.