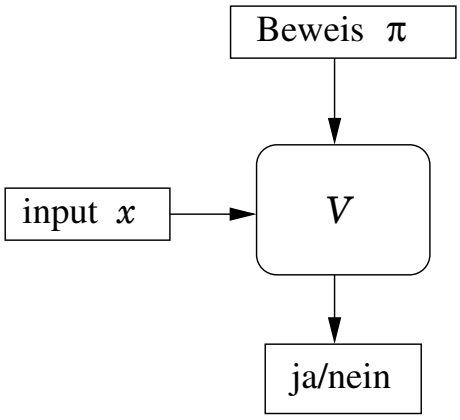
Übersicht

NP = Prüfen von Beweisen

Nichtdeterministische TM (Verifikator):



Entscheidungsproblem P ist in NP gdw. es gibt Verifikator V mit

$$x \in Y_P \quad \rightarrow \quad \exists \pi \quad V(x,p) = \text{ja}$$

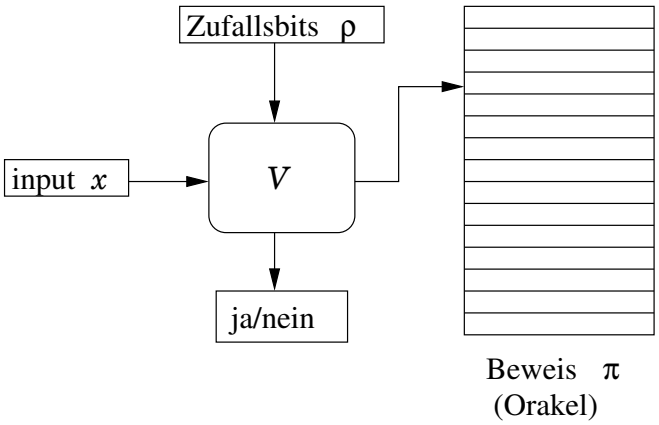
$$x \in N_P \quad \rightarrow \quad \forall \pi \quad V(x,p) = \text{nein}$$

Approximations-algorithmen

Einführung
Grundlagen
Methoden zum Entwurf
Approximationsklassen
Das PCP-Theorem
Reduktion und Vollständigkeit
Weiterführendes

Probabilistisch überprüfbare Beweise

Verifikator:



Verifikator V ist $(r(n), q(n))$-beschränkt, falls bei $|x| = n$

- V liest $\leq r(n)$ Zufallsbits,
- berechnet daraus $\leq q(n)$ Orakelfragen
- entscheidet anhand der Antworten.

Approximations-
algorithmen

Einführung
Grundlagen
Methoden zum Entwurf
Approximationsklassen
Das PCP-Theorem
Reduktion und Vollständigkeit
Weiterführendes

Die Klasse PCP

Ein Entscheidungsproblem P ist in PCP$[r(n), q(n)]$ gdw. es einen $(r(n), q(n))$-beschränkten Verifikator V gibt mit

$$x \in Y_P \quad \rightarrow \quad \exists \pi \ \mathbb{P}_\rho[V(x, \rho, \pi) = \text{ja}] = 1$$

$$x \in N_P \quad \rightarrow \quad \forall \pi \ \mathbb{P}_\rho[V(x, \rho, \pi) = \text{nein}] \geq \frac{1}{2}$$

Korollar: $\text{NP} = \text{PCP}[0, n^{O(1)}]$

$co\text{-RP} = \text{PCP}[n^{O(1)}, 0])$

sogar: $\text{NP} = \text{PCP}[O(\log n), n^{O(1)}]$

PCP-Theorem (Arora, Lund, Motwani, Safra, Sudan, Szegedy 92):

$$\text{NP} = \text{PCP}[O(\log n), O(1)]$$

Folgerungen aus dem PCP-Theorem

Satz: Falls P $\neq$ NP, so ist Maximum Satisfiability $\notin$ PTAS.

Satz: Falls P $\neq$ NP, so sind

- Maximum Independent Set
- Maximum Clique
- Minimum Vertex Cover

nicht in PTAS.

Korollar: Falls P $\neq$ NP, so sind

- Maximum Independent Set
- Maximum Clique

nicht in APX

Beweis des PCP-Theorems

1. NP $\subseteq$ PCP$[n^{O(1)}, O(1)]$
2. NP $\subseteq$ PCP$[O(\log n), \log^{O(1)} n]$
3. Komposition:

   NP $\subseteq$ PCP$[r_1(n), q_1(n)]$ und NP $\subseteq$ PCP$[r_2(n), q_2(n)]$

   $\Longrightarrow$ NP $\subseteq$ PCP$[r_1(n) + r_2(c \cdot q_1(n)), q_2(c \cdot q_1(n))]$

Arithmetisierung

$$\begin{array}{rcl} \text{Klauseln} & \mapsto & \text{Polynome über } \mathbb{Z}_2 \\ x & \mapsto & p_x := (1-x) \\ \bar{x} & \mapsto & p_{\bar{x}} := x \\ C = \ell_1 \vee \ldots \vee \ell_k & \mapsto & p_C := p_{\ell_1} \cdot \ldots \cdot p_{\ell_k} \\ \vec{r} \in \mathbb{Z}_2^m \ , \ F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m & \mapsto & p_F^{\vec{r}} := r_1 \cdot p_{C_1} + \ldots + r_m \cdot p_{C_m} \end{array}$$

Lemma: Für $0 \neq \vec{v} \in \mathbb{Z}_2^m$ gilt: $\mathbb{P}_{\vec{r} \in \mathbb{Z}_2^m}[\sum_i r_i v_i = 1] = \frac{1}{2}$.

Für jede Bewertung α gilt:

$$\begin{array}{lcl} \alpha \models C & \rightarrow & \mathbb{P}_{\vec{r} \in \mathbb{Z}_2^m}[p_F^{\vec{r}}(\alpha) = 0] = 1 \\ \alpha \not\models C & \rightarrow & \mathbb{P}_{\vec{r} \in \mathbb{Z}_2^m}[p_F^{\vec{r}}(\alpha) = 0] = \frac{1}{2} \end{array}$$

Codierung durch lineare Funktionen

Approximations-algorithmen

Einführung
Grundlagen
Methoden zum Entwurf
Approximationsklassen
Das PCP-Theorem
Reduktion und Vollständigkeit
Weiterführendes

Satz: Sei $a \in \mathbb{Z}_2^n$. Dann gibt es lineare Funktionen

$$A_a : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2 \qquad B_a : \mathbb{Z}_2^{n^2} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \qquad C_a : \mathbb{Z}_2^{n^3} \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

so dass $\forall$ Polynome $p \in \mathbb{Z}_2[x_1, \ldots, x_n]$ vom Grad 3 gilt

$$p(a) = \alpha_p + A_a(q_{p,1}) + B_a(q_{p,2}) + C_a(q_{p,3})$$

für geeignete $\alpha_p \in \mathbb{Z}_2$, $q_{p,1} \in \mathbb{Z}_2^n$, $q_{p,2} \in \mathbb{Z}_2^{n^2}$ und $q_{p,3} \in \mathbb{Z}_2^{n^3}$, die nur von p abhängen.

Definition: Für $x \in \mathbb{Z}_2^m$, $y \in \mathbb{Z}_2^k$ sei $x \circ y := z \in \mathbb{Z}_2^{mk}$ mit $z_{im+j} := x_i y_j$.

Aus Beweis: $A_a = a$, $B_a = a \circ a$, $C_a = a \circ (a \circ a)$.

Linearitätstest

Funktionen $f, g : D \to R$ sind δ-*nah*, falls

$$\mathbb{P}_{x \in D}[f(x) \neq g(x)] \leq \delta \ .$$

Satz:
Für $g : \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2$ sei

$$\mathbb{P}_{x,y \in \mathbb{Z}_2^m}[g(x+y) \neq g(x) + g(y)] \ \leq \ \frac{\delta}{2} \ .$$

Dann ist g δ-nah zu einem *linearen* $f : \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2$.

Korrektureigenschaft

Sei $f : \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2$ linear, und $g : \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2$ δ-nah zu f.

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{Z}_2^m$:

$$\mathbb{P}_{y \in \mathbb{Z}_2^m}[g(x+y) - g(y) = f(x)] \ \geq \ 1 - 2\delta \ .$$

Konsistenztest

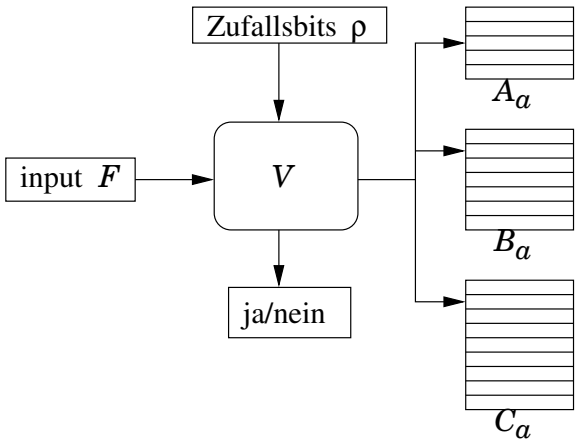
A, B, C heissen *konsistent*, falls $\exists a$ mit $A = A_a$, $B = B_a$, $C = C_a$.

Konsistenztest:
Gegeben: A', B', C' sind δ-nah zu linearen Funktionen A, B, C

Wähle zufällig $x, x' \in \mathbb{Z}_2^n$;
$a := A(x)$; $a' := A(x')$; $b := B(x \circ x')$;
if $aa' \neq b$ *then reject;*
Wähle zufällig $x \in \mathbb{Z}_2^n$, $y \in \mathbb{Z}_2^{n^2}$;
$a := A(x)$; $b := B(y)$; $c := C(x \circ y)$;
if $ab \neq c$ *then reject else accept;*

(Berechne A, B, C jeweils mittels Korrektureigenschaft)

Falls A, B, C konsistent sind, akzeptiert der Konsistenztest, andernfalls weist er mit hinreichender Wahrscheinlichkeit zurück.



Verifikator V:
Gegeben: Orakel A, B, C, 3CNF F
Linearitätstest: sind A, B, C δ-nah zu linearen Funktion A', B', C'
Konsistenztest: gibt es a mit $A' = A_a$, $B' = B_a$, $C' = C_a$
Wähle zufällig $\vec{r}$, setze $p := p_F^{\vec{r}}$
Berechne α_p, $q_{p,1}$, $q_{p,2}$, $q_{p,3}$
Berechne $v := \alpha_p + A_a(q_{p,1}) + B_a(q_{p,2}) + C_a(q_{p,3})$
if $v = 0$ then accept else reject

Größe des Beweises: $|A_a| + |B_a| + |C_a| = 2^{n^3} + 2^{n^2} + 2^n$

Also: Anzahl der Zufallsbits $= O(n^3)$.

Anzahl der Orakelfragen ist konstant.

Approximations-algorithmen

Einführung
Grundlagen
Methoden zum Entwurf
Approximationsklassen
Das PCP-Theorem
Reduktion und Vollständigkeit
Weiterführendes