Institut für Informatik
der Universität München
Dr. Andreas Abel

WS 2010/2011

19. Januar 2011

Übungen zur Vorlesung
Rechnergestütztes Beweisen

Blatt 11

Aufgabe 4: [PVS] Die drei Freunde Axel, Bernd und Christian und ihre Freundinnen Daniela, Elke und Fanny trafen sich am letzten Wochenende. Jedes Paar zeigte Photos seiner letzten Urlaubsreise, es gab Photos aus Udine, aus Venedig uns aus Wien zu sehen. Ausserdem brachte jedes Paar etwas zu Essen oder Trinken mit: es gab Nachos, Oliven und Pflaumen.

- Axel und Fanny sind ein Paar, sie brachten nicht die Nachos mit.
- Bernd und seine Freundin, die nicht Daniela heisst, zeigten Photos von Udine. Sie brachten nicht die Oliven mit.
- Das Paar, das die Pflaumen mitbrachte, zeigte die Photos von Venedig. Dabei handelte es sich nicht um Christian und seine Freundin.

Beantworten Sie die folgenden Fragen. Drücken Sie dazu die Informationen in der Aussagenlogik aus, und benutzen Sie PVS, um Folgerungen zu ziehen.

1. Wie heisst Elkes Partner?
2. Wer zeigte die Photos aus Wien?
3. Wer brachte die Oliven?

Aufgabe 5: [Papier] Beweisen Sie folgende Aussagen im Sequenzenkalkül.

1. $\forall x{:}\tau.\,(P \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (P \Rightarrow \exists x{:}\tau.Q(x))$.
2. $(\exists x{:}\tau.\,\top) \wedge (P \Rightarrow \exists x{:}\tau.Q(x)) \Rightarrow \exists x{:}\tau.\,P \Rightarrow Q(x)$.

Aufgabe 6: [PVS] Formalisieren und beweisen Sie die Aussagen der letzten Aufgabe in PVS, wobei Skolemisierung (`skolem`) und Instantiierung (`inst`) explizit durchgeführt werden müssen (also kein `grind` oder ähnliche Entscheidungsprozeduren).

Aufgabe 7: [PVS] Axiomatisieren Sie in PVS das Konzept einer partiell geordneten Menge, d.h. einer Menge mit einer darauf definierten reflexiven und transitiven Relation $\preceq$. Beweisen Sie die untenstehenden Behauptungen mit PVS.

1. Zwei Elemente a, b heissen äquivalent, wenn sie in beiden Richtungen in der Relation stehen, also $a \preceq b$ und $b \preceq a$ gilt.

   Zeigen Sie, dass gilt: Sind a und b äquivalent zueinander, so sind sie zu genau denselben Elementen äquivalent.

2. Ein Supremum zu a und b ist ein in der Ordnung $\preceq$ minimales Element c mit $a \preceq c$ und $b \preceq c$.

   Zeigen Sie, dass alle Suprema zu gegebenen a und b äquivalent sind.

3. Zeigen Sie, dass $a \preceq b$ gilt genau dann wenn das Supremum von a und b äquivalent zu b ist.

4. [3 Sonderpunkte] Ein Ideal in einer partiell geordneten Menge ist eine Teilmenge, die nach unten abgeschlossen ist, d.h. mit a enthält sie auch jedes b mit $b \preceq a$.

   Formalisieren Sie dieses Konzept, und zeigen Sie, dass Ideale unter Durchschnitten abgeschlossen sind.