Institut für Informatik
der Universität München
Dr. Andreas Abel

WS 2010/2011

12. Januar 2011

Übungen zur Vorlesung
Rechnergestütztes Beweisen

Blatt 10

Aufgabe 1: [Papier] Geben Sie Herleitungen der folgenden Tautologien im Sequenzenkalkül an. Dabei ist $A \Leftrightarrow B$ definiert als $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

1. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
2. $((A \Rightarrow (A \wedge B)) \Rightarrow A) \Rightarrow A$
3. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow A \wedge B \Rightarrow C$
4. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
5. $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow (((A \wedge C) \vee B) \wedge A)$

Aufgabe 2: [Papier] Gegeben sei folgender Algorithmus zur Überführung einer Formel ϕ in eine Klauselmenge: Zuerst wandle man ϕ in Negations-Normalform um, d.h., ϕ besteht nur aus Konjunktionen, Disjunktionen, Atomen und negierten Atomen. (Das ist möglich wegen der de Morgan'schen Gesetze und der Definition der Implikation durch Disjunktion und Negation.) Dann rufe man die Funktion `clausify` auf, die durch folgende Gleichungen spezifiziert ist:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathsf{clausify}\, L & = & \{\{L\}\} \\
\mathsf{clausify}\, (\phi \wedge \psi) & = & \mathsf{clausify}\, \phi \cup \mathsf{clausify}\, \psi \\
\mathsf{clausify}\, (L \vee \phi) & = & \{L \vee K \mid K \in \mathsf{clausify}\, \phi\} \\
\mathsf{clausify}\, (\phi \vee L) & = & \{L \vee K \mid K \in \mathsf{clausify}\, \phi\} \\
\mathsf{clausify}\, (\phi \vee \psi) & = & \mathcal{C} \cup \mathcal{C}' \\
 & & \text{where } A \;=\; \text{a new atom} \\
 & & \qquad\;\; \mathcal{C} \;=\; \{A \vee K \mid K \in \mathsf{clausify}\, \phi\} \\
 & & \qquad\;\; \mathcal{C}' \;=\; \{\neg A \vee K \mid K \in \mathsf{clausify}\, \psi\}
\end{array}
$$

Hierbei bezeichnet $L \in \{A, \neg A\}$ ein Literal, und $L \vee K$ die Klausel $\{L\} \cup K$.

1. Berechnen Sie mit dem Algorithmus die Klauselmenge zu

$$\phi = \neg\big(A \wedge B \vee A \wedge C \Rightarrow A \wedge (B \vee C)\big).$$

2. Komplexität: Wenn ϕ die Größe n (Anzahl der binären Konnektive) hat, wieviele Klauseln erzeugt der Algorithmus?

3. Beweisen Sie ihre Antwort (durch strukturelle Induktion über Aussagen)!
4. Beweisen Sie die Korrektheit der Klausifikation: ϕ ist erfüllbar genau dann, wenn $\mathsf{clausify}\,\phi$ erfüllbar ist.

Aufgabe 3: [Papier] Verwenden Sie für die folgenden Aufgaben das Resolutionskalkül.

1. Zeigen Sie, dass $A \wedge B \vee A \wedge C \Rightarrow A \wedge (B \vee C)$ eine Tautologie ist (siehe Aufgabe 3.1!).
2. Drei Tauben passen nicht einzeln in zwei Taubenschläge: Zeigen Sie, dass die folgende Formel unerfüllbar ist.

$$\begin{array}{l}(A_1 \vee A_2) \wedge (B_1 \vee B_2) \wedge (C_1 \vee C_2) \wedge \\ \neg(A_1 \wedge B_1) \wedge \neg(A_1 \wedge C_1) \wedge \neg(B_1 \wedge C_1) \wedge \\ \neg(A_2 \wedge B_2) \wedge \neg(A_2 \wedge C_2) \wedge \neg(B_2 \wedge C_2)\end{array}$$

Abgabe: am Montag, 17.01., in der Vorlesung.