MIN-SAT ist DP-vollständig

$DP := \{ L \,;\, L = L_1 \cap L_2 ,\ L_1 \in NP \ \ L_2 \in co\text{-}NP \}$

(1) $SAT \times UNSAT = \{ (F,G) \,;\, F \in SAT ,\ G \in UNSAT \}$
ist DP-vollständig.

In DP: klar ✓

<u>Beweis</u>: Sei $L = L_1 \cap L_2 \in DP$

$L_1 \in NP \rightsquigarrow L_1 \leq_p SAT$ $\quad$ f Reduktion $L_1 \to SAT$

$L_2 \in co\text{-}NP \rightsquigarrow L_2 \leq_p UNSAT$ $\quad$ g Reduktion $L_2 \to UNSAT$

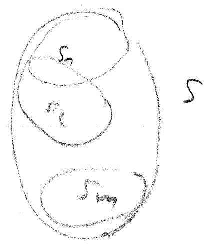
$$x \in L \iff x \in L_1 \wedge x \in L_2$$
$$\iff f(x) \in SAT \wedge g(x) \in UNSAT$$
$$\iff (f(x), g(x)) \in SAT \times UNSAT .$$
□

(2) $UNSAT \leq_p MIN\text{-}SAT$

Sei $F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$, in Variablen $x_1 \ldots x_n$

Sei $S := \{$Belegungen von $x_1 \ldots x_n \}$

$i = 1..m$: $S_i = \{ \alpha \,;\, \alpha(C_i) = 0 \}$



F erfüllbar gdw. $S \supsetneq \bigcup_i S_i$

F minimal gdw $\forall i \in m$ $F \setminus C_i$ erfüllbar

gdw. f. jedes S_i gibt es $\alpha \in S_i$ mit $\alpha \notin \bigcup_{j \neq i} S_j$

Definiere G in Variablen $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_m$
so dass
G ist minimal
G ist erfüllbar gdw F ist erfüllbar.

Dann ist $F \mapsto G$ p-Reduktion von $UNSAT \to MIN\text{-}SAT$

$$Y_j := \bigvee_{i \neq j} y_i$$

$T :=$ { Belegungen von $x_1 \dots x_n\ y_1 \dots y_m$ }

$S' \subseteq T := \{ \alpha(y_1) = \dots = \alpha(y_m) = 0 \}$ Kopie von S in T.

G besteht aus den Klauseln:

$D_i := C_i \vee Y_i$ für $1 \leq i \leq m$

überdeckt den Teil von S', den C_i in S überdeckt!

→ müssen Rest von T überdecken:

Erst: die wo <u>genau ein</u> y wahr wird.

Ist $C_i = a \vee b \vee c$, dann Klauseln:

$\boxed{\bar{a} \vee Y_i \vee \bar{y}_i}$ $\bar{b} \vee \dots$ $\bar{c} \vee \dots$

Dann: alle wo ≥ 2 y_i wahr werden

$\bar{y}_i \vee \bar{y}_j$ für alle $i \neq j$

G ist minimal: jede Klausel überdeckt Teil von T, die keine andere überdeckt (nachrechnen!)

G ist erfüllbar gdw F ist erfüllbar

"$\Leftarrow$" klar   "$\Rightarrow$" nur ein y_i kann wahr sein, das aber auch nicht ✓

$\Rightarrow$ kein y wahr → F erfüllt □

(3) SAT $\leq_p$ MINSAT

Sei $G' = G \wedge Y$ $Y = y_1 \vee \dots \vee y_m$

Y überdeckt S', also ist G' unerfüllbar. ✓

G' ist minimal $\Longleftrightarrow$ F ist erfüllbar ✓

also $F \mapsto G'$ reduziert SAT $\rightarrow$ Minsat

---

(4) (MINSAT $\times$ MINSAT) $\leq_p$ MINSAT

Sei $(F, G) \in MS \times MS$. OBdA Variablen disjunkt

$$H := \bigwedge_{\substack{C \in F \\ D \in G}} C \vee D .$$

F erfüllbar $\rightarrow$ H erf.
G " $\qquad$ "

also H unerf. gdw $G \wedge H$ unerfüllbar

ausserdem: H minimal gdw G, H minimal.

MIN-SAT ist DP-vollst:

$$\text{SAT} \times \text{UNSAT} \overset{(3),(2)}{\leq_p} \text{MINSAT} \times \text{MINSAT} \overset{(4)}{\leq_p} \text{MIN-SAT}$$

□