Institut für Informatik
der Universität München
Dr. J. Johannsen

WS 2010/11

28. Oktober 2010

Übungen zur Vorlesung
Komplexitätstheorie

Blatt 1

Aufgabe P-1: Konstruieren Sie eine deterministische 1-Band Turingmaschine, die folgendes leistet: Bei Eingabe eines Wortes $w \in \Sigma^*$ steht am Ende der Berechnung $\#w$ auf dem Band, also ein Symbol $\# \notin \Sigma$ gefolgt von w.

Aufgabe P-2: Betrachten Sie eine NTM, deren Band in einer Konfiguration vollkommen leer ist, außer einer Bandzelle, in der sich das Symbol # befindet. Der Kopf befindet sich über einer leeren Bandzelle, und der Zustand ist q.

1. Geben Sie Übergänge an, die es der Maschine erlauben, mit dem Kopf über dem Symbol # in den Zustand p zu wechseln. Im Zustand q soll die Maschine also das Symbol # auf dem Band suchen, und bei Erfolg in Zustand p wechseln.

2. Wie würde die gleiche Aufgabe mit einer DTM zu lösen sein? Vergleichen Sie den Zeitbedarf in beiden Fällen.

Aufgabe P-3: Beweisen Sie mittels *padding* die folgende Aussage:

Ist NP unter Komplementierung abgeschlossen, dann ist auch NE unter Komplementierung abgeschlossen.

Hausaufgaben:

Aufgabe H-1: Konstruieren Sie eine deterministische 1-Band Turingmaschine T, derart dass bei Eingabe einer natürlichen Zahl n (binär codiert) am Ende der Berechnung $n - 1$ auf dem Band steht.

Bestimmen Sie $\textsc{Time}_T(n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe H-2: Es bezeichnen LIN und Q die Klassen der Entscheidungsprobleme, die von einer DTM in Zeit $O(n)$ bzw. in Zeit $O(n^2)$ gelöst werden können, und NLIN und NQ die entsprechenden nichtdeterministischen Klassen.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels *padding*:

- Ist $\mathsf{LIN} = \mathsf{NLIN}$, dann auch $\mathsf{Q} = \mathsf{NQ}$.
- Ist NLIN unter Komplementierung abgeschlossen, dann auch NQ.

Institut für Informatik
der Universität München

Dr. J. Johannsen

WS 2010/11

11. November 2010

Übungen zur Vorlesung
Komplexitätstheorie

Blatt 2

Aufgabe P-4: Zeigen Sie, dass das Problem CLIQUE NP-vollständig ist:

Gegeben:	Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$
Frage:	Enthält G eine Clique C der Grösse $\|C\| \geq k$?

Dabei ist eine Clique ein vollständiger Teilgraph, also eine Teilmenge $C \subseteq V$ mit $\forall u, v \in C \; : \; \{u, v\} \in E$.

Aufgabe P-5: Zeigen Sie, dass das aus der Vorlesung bekannte Problem 3-COLOR NP-vollständig ist, indem Sie 3-SAT darauf reduzieren.

Aufgabe P-6: Das Problem MAX-2-SAT ist definiert durch:

Gegeben:	Formel $F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$ in 2-KNF, $k \leq m$.
Frage:	Gibt es eine Variablenbelegung α, so dass $\alpha(C_i) = 1$ für mindestens k der Klausel C_i gilt ?

1. Zeigen Sie, dass MAX-2-SAT NP-vollständig ist.

2. Zeigen Sie, dass Instanzen von MAX-2-SAT, in denen alle Klauseln genau 2 Literale haben und mit $k \leq \frac{3}{4}m$ einfach zu entscheiden sind.

Hausaufgaben:

Aufgabe H-3: Zeigen Sie, dass NP unter Durchschnitt und Vereinigung abgeschlossen ist, d.h. sind L und L' in NP, dann auch $L \cap L'$ und $L \cup L'$.

Aufgabe H-4: Die Klasse co-NP ist definiert durch $\{\bar{L} \; ; \; L \in \text{NP}\}$, wobei $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$ das Komplement von L bezeiche. Die Begriffe co-NP-schwer und -vollständig sind analog zu den entsprechenden Begriffen für NP definiert.

1. Zeigen Sie dass L genau dann vollständig für co-NP ist, wenn $\bar{L}$ NP-vollständig ist.

2. Eine aussagenlogische Formel in DNF (disjunktiver Normalform) ist eine Disjunktion $F = T_1 \vee \ldots \vee T_m$ von *Termen* T_i. Ein Term ist eine Konjunktion $a_1 \wedge \ldots \wedge a_k$ von Literalen. Das Problem TAUT ist gegeben durch

Gegeben:	Formel F in DNF.
Frage:	Ist F eine Tautologie ?

   Eine Tautologie ist eine Formel, die unter *jeder* Variablenbelegung wahr ist.

   Zeigen Sie, dass TAUT co-NP-vollständig ist.

Abgabe der Hausaufgaben am 23.11.2010 in der Vorlesung.

Institut für Informatik
der Universität München

Dr. J. Johannsen

WS 2010/11

25. November 2010

Übungen zur Vorlesung
Komplexitätstheorie

Blatt 3

Aufgabe P-7: Zeigen Sie dass das Problem 2-SAT vollständig für NL ist.

1. Zeigen Sie zuerst, dass 2-SAT NL-schwer ist, indem Sie das Erreichbarkeitsproblem darauf reduzieren.
2. Anschliessend zeigen Sie, dass 2-SAT in NL ist. *Hinweis*: definiere zu einer Formel F in 2-KNF einen geeigneten Graphen G, so dass sich die Unerfüllbarkeit von F durch die Existenz von Wegen in G ausdrücken lässt.

Aufgabe P-8: Zeigen Sie, dass das Problem der 2-Färbbarkeit von Graphen in NL ist.

Aufgabe P-9: Diese Aufgabe soll den Unterschied zwischen NP und NL verdeutlichen.

1. Zeigen Sie, dass folgendes Problem in L ist:

   Gegeben: Formel $F = C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$ in KNF, Variablenbelegung α
   Frage: Ist F durch α erfüllt, d.h., ist $\alpha(F) = 1$?

2. Folgern Sie, dass ein Problem A in NP ist genau dann, wenn es eine Relation $R(.,.) \in L$ und $k \in \mathbb{N}$ gibt, mit

$$x \in A \text{ gdw. } \exists y \ : \ |y| \leq |x|^k \text{ und } R(y, x) \qquad (*)$$

3. Vergleichen Sie dies mit Proposition 1 aus Kapitel 2 der Vorlesung. Begründen Sie, warum $(*)$ keine Charakterisierung von NL ergibt.
4. Überlegen Sie, wie man eine zu Proposition 1 aus Kapitel 2 analoge Charakterisierung von NL erhalten kann.

Hausaufgaben:

Aufgabe H-5: Zeigen Sie, dass das folgende Problem NL-vollständig ist:

Gegeben:	Gerichteter Graph G, Knoten s.
Frage:	Gibt es einen Kreis in G, der von s erreichbar ist?

Aufgabe H-6: Bezeichne NFAEmpty das Leerheitsproblem für nichtdeterministische endliche Automaten, also das folgende Problem:

Gegeben:	Nichtdeterministischer endlicher Automat A
Frage:	Gibt es einen Wort w, das von A akzeptiert wird, i.e., $\mathrm{L}(\mathrm{A}) \neq \emptyset$?

Zeigen Sie, dass NFAEmpty vollständig für NL ist.

Aufgabe H-7: Bezeichne CFGEmpty das Leerheitsproblem für kontextfreie Grammatiken, also das folgende Problem:

Gegeben:	Kontextfreie Grammatik G
Frage:	Gibt es einen Wort w, das aus G herleitbar ist, i.e., $\mathrm{L}(\mathrm{G}) \neq \emptyset$?

Zeigen Sie, dass CFGEmpty vollständig für P ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass CFGEmpty $\leq_{\log}$ Horn und Horn $\leq_{\log}$ CFGEmpty gilt.

Abgabe der Hausaufgaben am 07.12.2010 in der Übung.

Institut für Informatik der Universität München — WS 2010/11

Dr. J. Johannsen — 9. Dezember 2010

Übungen zur Vorlesung
Komplexitätstheorie

Blatt 4

Aufgabe P-10: Zeigen Sie die folgende Aussage: Ist $\mathsf{PSPACE} = \mathsf{PH}$, dann ist kollabiert die Polynomielle Hierarchie, d.h., $\mathsf{PH} = \Sigma_k^p$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe P-11: Die Klasse DP ist definiert als die Menge aller Sprachen L, derart dass es $L_1 \in \mathsf{NP}$ und $L_2 \in \text{co-}\mathsf{NP}$ gibt mit $L = L_1 \cap L_2$. Offenbar ist $\mathsf{DP} \subseteq \Delta_2^p$.

1. U-SAT ist die Menge aller Klauselmengen, die *genau eine* erfüllende Belegung haben. Zeigen Sie, dass U-SAT in DP ist.
2. Eine KNF-Formel $C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$ wird hier als Menge $\{C_1, \ldots, C_m\}$ aufgefasst. MIN-SAT ist die Menge aller unerfüllbaren Klauselmengen F, derart dass jede echte Teilmenge von F erfüllbar ist. Zeigen Sie, dass MIN-SAT vollständig für DP ist.

Hausaufgaben:

Aufgabe H-8: Das Problem AREACH ist wie folgt definiert: Gegeben ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ und Knoten $s, t \in V$, sowie eine Partition $V = V_\forall \uplus V_\exists$, gilt $\textsc{apath}(s, t)$? Dabei ist für Knoten $u, v \in V$ die Relation $\textsc{apath}(u, v)$ induktiv definiert durch:

- $u = v$, oder
- $u \in V_\exists$ und es gibt ein w mit $(u, w) \in E$ und $\textsc{apath}(w, v)$, oder
- $u \in V_\forall$ und für alle w mit $(u, w) \in E$ gilt $\textsc{apath}(w, v)$.

Zeigen Sie, dass AREACH vollständig für P ist. Da offensichtlich AREACH in AL ist, gibt dies einen weiteren Beweis für $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{AL}$.

Aufgabe H-9: Das Problem EXACT CLIQUE ist definiert wie folgt:

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$
Frage: Hat die größte Clique in G genau k Elemente ?

Zeigen Sie, dass das Problem EXACT CLIQUE DP-vollständig ist.

Abgabe der Hausaufgaben am 21. Dezember 2010 in der Vorlesung.

Institut für Informatik
der Universität München
Dr. J. Johannsen

WS 2010/11

23. Dezember 2010

Übungen zur Vorlesung
Komplexitätstheorie

Blatt 5

Aufgabe P-12: Zeigen Sie, dass das Auswerteproblem für boole'sche Schaltkreise P-vollständig ist, also das folgende Problem:

Gegeben:	Boole'scher Schaltkreis C, Eingabe x
Frage:	Akzeptiert C die Eingabe x, d.h. gibt C bei Eingabe x den Wert 1 aus?

Aufgabe P-13: Eine *Boole'sche Formel* ist ein boole'scher Schaltkreis mit fan-in 1, bei dem also der darunterliegende Graph ein Baum ist.

Zeigen Sie, dass das Auswerteproblem für boole'sche Formeln in L ist.

Aufgabe P-14: Für Schaltkreise mit beschränktem fan-in, in denen o.B.d.A. alle Gatter fan-in höchstens 2 haben, gilt die folgende Aussage:

Eine Funktion f ist genau dann durch einen Schaltkreis der Tiefe d berechenbar, wenn sie durch eine Formel der Größe 2^d berechenbar ist.

Hausaufgaben:

Aufgabe H-10: Eine Menge $S \subseteq \Sigma^*$ heißt *dünn*, falls es ein Polynom $p()$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|S \cup \Sigma^n| \leq p(n)$. Es bezeichne $\mathcal{D}$ die Klasse der dünnen Mengen.

Zeigen Sie, dass $\mathcal{D} \subseteq \mathsf{P}/\text{poly}$ gilt.

Aufgabe H-11: Verschärfen Sie die Aussage von Aufgabe H-10, indem Sie zeigen, dass $\mathsf{P}^{\mathcal{D}} = \mathsf{P}/\text{poly}$ ist, also dass $A \in \mathsf{P}/\text{poly}$ ist genau dann, wenn es eine dünne Menge S gibt mit $A \in \mathsf{P}^S$.

Aufgabe H-12: Bipartitheit ist eine anti-monotone Eigenschaft von Graphen: Ist G bipartit, dann auch jeder Teilgraph. Sei nb die Funktion auf den Variablen $x_{i,j}$ für $1 \leq i, j \leq n$, die definiert ist durch:

$$nb(\vec{x}) = 1 \text{ genau dann, wenn der Graph } \vec{x} \text{ nicht bipartit ist}$$

nb ist also eine monotone boole'sche Funktion.

Zeigen Sie eine untere Schranke für monotone Schaltkreise, die nb berechnen. *Hinweis:* Überlegen Sie zuerst, wie mögliche Testinputs aussehen könnten.

Zusatzaufgabe:

Aufgabe H-13: Es sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}$ die Menge der *unären* Sprachen, also der Sprachen $L \subseteq \{1\}^*$.

Geben Sie eine Charakterisierung der Klasse $P^{\mathcal{U}}$, analog zu der in Aufgabe H-11.

Können Sie eine gemeinsame Verallgemeinerung Ihrer Charakterisierung und der aus Aufgabe H-11 finden?

Abgabe der Hausaufgaben am 18. Januar 2011 in der Vorlesung.

Institut für Informatik
der Universität München

Dr. J. Johannsen

WS 2010/11

20. Januar 2011

Übungen zur Vorlesung
Komplexitätstheorie

Blatt 6

Aufgabe P-15: In der Vorlesung wurde erwähnt, dass der Beweis der unteren Schranke für parity sich verallgemeinern lässt, um zu zeigen, dass die Funktion parity nicht durch Schaltkreise konstanter Tiefe und polynomieller Größe mit Gattern für die Funktionen $\wedge$, $\vee$, $\neg$ und mod_p für eine Primzahl $p \neq 2$ berechnet werden kann.

Begründen Sie, warum das Argument sich nicht für Schaltkreise mit Gattern für Funktionen mod_m für m zusammengesetzt funktioniert.

Aufgabe P-16: In der Vorlesung wurde für die Funktion med gezeigt, dass $cc(\mathsf{med}) \leq O(\log^2 n)$ ist. Zeigen Sie, dass tatsächlich gilt:

$$cc(\mathsf{med}) \leq O(\log n)$$

Hausaufgaben:

Aufgabe H-14: Zeigen Sie direkt, d.h. ohne Resultate aus der Vorlesung zu verwenden, dass eine boole'sche Formel in DNF, die $\mathsf{parity}(x_1, \ldots, x_n)$ berechnet, exponentiell groß sein muss.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass jeder Term in einer solchen DNF-Formel alle n Variablen enthalten muss.

Aufgabe H-15: Für $x, y \subseteq \{1, \ldots, n\}$ ist die Funktion disj definiert durch

$$\mathsf{disj}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \cap y = \emptyset \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $cc(\mathsf{disj}) \geq n$ ist.

Aufgabe H-16: Für zwei n-bit Zahlen $x, y \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ ist die Funktion gt definiert durch

$$\mathrm{gt}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > y \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $cc(\mathrm{gt}) = n + 1$ ist.

Abgabe der Hausaufgaben am 1. Februar 2011 in der Vorlesung.