Übungen zur Vorlesung
Temporallogik
Blatt 5

Aufgabe 16: Sei $\varphi := \mathtt{AG}(\mathtt{AF}q \wedge \mathtt{AF}\neg q) \wedge \mathtt{E}(\mathtt{EF}\neg q\ \mathtt{U}\ \mathtt{EG}q)$. Konstruieren Sie das Büchi-Spiel G_φ aus der Charakterisierung des Erfüllbarkeitsproblems für CTL und lösen Sie dies mithilfe des Algorithmus aus der Vorlesung.

Aufgabe 17: In der Vorlesung wurde gezeigt, wie sich Büchi-Spiele, also Paritätsspiele mit lediglich den Prioritäten 1 und 2 lösen lassen. Geben Sie einen Algorithmus an, der allgemeine Paritätsspiele löst.

Hinweis: Beginnen Sie wieder mit der höchsten vorkommenden Priorität. Je nach Parität bestimmen Sie den Attraktor dieser Menge für einen der Spieler. Ohne Beweis – der allerdings sehr einfach ist – können Sie davon ausgehen, dass ein Spiel immer noch total ist, wenn man daraus den Attraktor einer beliebigen Menge entfernt. Das bedeutet, dass das Restspiel jetzt rekursiv gelöst werden kann. Sie können also jetzt davon ausgehen, dass dieses Restspiel partitioniert ist in zwei Teile, die jeweils von den beiden Spielern gewonnen werden. Benutzen Sie jetzt diese Information, um das Gesamtspiel lösen zu können. Dazu müssen Sie allerdings noch einmal einen rekursiven Aufruf tätigen.

Aufgabe 18: Das n-*Tiling Game* ist das folgende Problem. Gegeben ist eine unär kodierte Zahl n, eine endliche Menge T, und zwei Relationen $H, V \subseteq T^2$. Intuitiv stellt man sich T als Menge von quadratischen Kacheln vor. Die Relationen H und V geben an, welche Kacheln horizontal bzw. vertikal zueinander passen. Mit diesen wird nun ein Spiel zwischen Spielern 1 und 2 auf dem diskreten Gitter $\{0, \ldots, n-1\} \times \mathbb{N}$ gespielt. Dabei legen die Spieler in folgender Reihenfolge Kacheln auf die einzelnen Knoten des Gitters: $(0,0)$, $(0,1)$, $\ldots$, $(0, n-1)$, $(1,0)$, $\ldots$, $(1, n-1)$, $(2,0)$, $\ldots$ Spieler 1 legt jeweils die erste Kachel in jeder Zeile, Spieler 2 alle anderen. In jedem Schritt muss eine Kachel gelegt werden, die horizontal und vertikal an die entsprechenden benachbarten Kacheln passt, wenn diese vorhanden sind. Die Kachel zu Beginn einer Zeile muss also z.B. nur vertikal zu der ersten Kachel in der darunterliegenden Zeile passen. Kacheln können beliebig häufig benutzt werden. Ein Spieler gewinnt in dem Moment, in dem der Gegner keine passenden Kachel legen kann. Außerdem gewinnt Spieler 2 jede unendliche Partie.

Das n-*Tiling Game* besteht nun darin zu entscheiden, ob Spieler 2 eine Gewinnstrategie für das beschriebene Spiel hat. Dieses Problem ist hart für die Klasse EXPTIME derjenigen Probleme, die in deterministischer, exponentieller Zeit gelöst werden können.

In dieser Aufgabe soll durch Reduktion gezeigt werden, dass auch das Erfüllbarkeitsproblem für CTL EXPTIME-hart ist. Dazu fassen wir eine Gewinnstrategie für Spieler 2 als Baum (eigentlich als Wald, aber wieso?) auf, in dem ein Knoten auf Ebene k eine Kachel an der Stelle (i, j) darstellt, gdw. $k = n \cdot i + j$. Jeder Knoten auf einer Ebene k mit $k \not\equiv n-1 \bmod n$ hat genau einen Nachfolger, nämlich den rechten Nachbar in dem Gitter. Ein Knoten auf Ebene k mit $k \equiv n-1 \bmod n$ repräsentiert das Ende einer Zeile und hat somit Nachfolger für jede Möglichkeit, wie Spieler 1 eine Kachel zu Beginn der nächsten Zeile legen kann. Die Kachelmenge T fassen wir einfach als atomare Propositionen auf.

Um EXPTIME-Härte zu zeigen konstruieren wir nun zu einem n, T, H, V eine polynomiell große Forml $\varphi^n_{T,H,V}$ die erfüllbar ist, gdw. Spieler 2 eine Gewinnstrategie für das Spiel hat. Die Menge der Modelle der Formel muss dazu lediglich die Menge aller der hier beschriebenen Bäume, die solche Gewinnstrategien beschreiben, sein – bis auf Bisimilarität natürlich.

Die Formel $\varphi^n_{T,H,V}$ muss dazu folgendes ausdrücken:

- Jeder Zustand ist mit genau einer Proposition beschriftet.
- Ein Zustand, der nicht das Ende einer Zeile repräsentiert, hat nur Nachfolger mit der gleichen Beschriftung, die auch noch horizontal zu seiner passt.
- Ein Zustand der das Ende einer Zeile markiert hat für jeden möglichen Zug von Spieler 1 zu Beginn der nächsten Zeile einen Nachfolger.
- Die Beschriftung eines jeden Zustands passt vertikal zu allen in der darüberliegenden Zeile.

Zur Vereinfachung kann man annehmen, dass CTL über nicht notwendigerweise totalen Transitionssystemen interpretiert wird und dass Spieler 2 ausnahmsweise den ersten Zug in der Zelle $(0, 0)$ macht.