Institut für Informatik
der LMU München
PD Dr. M. Lange

WS 2009/10

3.2.10

Übungen zur Vorlesung
Temporallogik
Blatt 11

Aufgabe 36: Geben Sie einen Model-Checking-Algorithmus für FCTL über Fairnessprädikaten der Form

$$\Phi \;:=\; \bigwedge_{i=1}^{n} \mathtt{GF}q_i \vee \mathtt{FG}p_i$$

an, der in polynomieller Zeit läuft.

Hinweis: Halten Sie sich an den Model-Checking-Algorithmus für CTL, welcher Unterformeln bottom-up in einem Transitionssystem auswertet. Somit können Sie sich auf die Fälle von Unterformeln der Form $\mathtt{E}_\Phi(p\mathtt{U}q)$ und $\mathtt{E}_\Phi\mathtt{G}q$ beschränken. Schränken Sie zuerst das Transitionssystem ein auf solche Zustände, die diese Formeln ohne Fairnessprädikate erfüllen. Verfeinern Sie dann das Ergebnis, indem Sie die SCC-Zerlegung dieses Transitionssystems betrachten.

Aufgabe 37: Ziel dieser Aufgabe ist es, einen möglichen Kalkül für CTL*-Erfüllbarkeitstableaux zu skizzieren. Ein Tableauknoten soll dabei die Form

$$\mathtt{E}\Pi_1, \ldots, \mathtt{E}\Pi_n, \mathtt{A}\Sigma_1, \ldots, \mathtt{A}\Sigma_m, \Lambda$$

haben, wobei $n, m \geq 0$, Λ eine möglicherweise leere Menge von Literalen ist, und Σ_i, Π_i jeweils Mengen von (Unter-)Formeln sind, wobei die Π_i als Konjunktionen und die Σ_i als Disjunktionen interpretiert werden sollen. Solch einen Knoten versteht man also dann als die Formel

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \mathtt{E}(\bigwedge_{\psi\in\Pi_i} \psi) \;\wedge\; \bigwedge_{i=1}^{n} \mathtt{A}(\bigvee_{\psi\in\Sigma_i} \psi) \;\wedge\; \bigwedge_{\ell\in\Lambda} \ell$$

Die Regeln des Tableaukalküls sollen — wie bei CTL etc. — die Unterformeln abbauen und auf diese Weise syntaktisch ein Modell für die Eingabeformel zu konstruieren. Somit gibt es z.B. die folgenden Regeln.

$$\frac{\mathtt{E}(\varphi\wedge\psi,\Pi),\Phi}{\mathtt{E}(\varphi,\psi,\Pi),\Phi} \qquad \frac{\mathtt{A}(\varphi\wedge\psi,\Sigma),\Phi}{\mathtt{A}(\varphi,\Sigma),\mathtt{A}(\psi,\Sigma),\Phi} \qquad \frac{\mathtt{A}(\ell,\Sigma),\Phi}{\ell,\Phi} \qquad \frac{\mathtt{A}(\ell,\Sigma),\Phi}{\mathtt{A}\Sigma,\Phi}$$

wobei Φ für eine beliebige Menge von E-, A-Blöcken oder Literalen steht. Die beiden Regeln rechts sind als Alternativen zu verstehen: Wenn alle Pfade eine Formel aus $\{\ell\} \cup \Sigma$ erfüllen, dann erfüllen entweder alle bereits das Literal ℓ oder eine Formel aus Σ.

a) Geben Sie weitere Regeln an, so dass auf jeden Knoten, der nicht inkonsistent aufgrund von Literalen ist, eine Regel anwendbar ist. D.h. es muss im Grunde für jeden Operator mindestens zwei Regeln geben, da jede Formel mit diesem Operator an oberster Stelle in einem E- oder A-Block auftreten kann.

b) Überlegen Sie sich, welche globalen Bedingungen in Bezug auf die Abwicklungen von U- und R-Formeln wohl an Pfade eines Tableaus gelten müssten, damit eine CTL*-Formel ein Tableau hat gdw. sie erfüllbar ist. (Das müssen Sie natürlich nicht beweisen.)

Aufgabe 38: Zur Erinnerung: Im μ-Kalkül ist $\nu X.\varphi$ eine Abkürzung für $\neg\mu X.\neg\varphi[\neg X/X]$. Zeigen Sie, dass $\nu X.\varphi$ wirklich den größten Fixpunkt der Abbildung $T \mapsto [\![\varphi]\!]_{[X\mapsto T]}$ darstellt, d.h. das

$$[\![\nu X.\varphi]\!]_\rho^\mathcal{T} \quad = \quad \bigcup \{T \subseteq \mathcal{S} \mid T \subseteq [\![\varphi]\!]_{\rho[X\mapsto T]}^\mathcal{T}\}$$

für ein beliebiges Transitionssystem $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \rightarrow, \lambda)$ und eine beliebige Variablenbelegung ρ gilt.

Hinweis: Formen Sie $[\![\neg\mu X.\neg\varphi[\neg X/X]]\!]_\rho^\mathcal{T}$ geeignet um.