

12c

Wiederholung und Fragestunde

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 11. Februar 2025
Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel



Inhaltsübersicht Teil I: Formale Sprachen und Automatentheorie

- ▶ Chomsky-Grammatiken und die Chomsky-Hierarchie
- ▶ Reguläre Sprachen: DFAs, Minimierung von DFAs, NFAs (ohne und mit ϵ -Übergängen), reguläre Ausdrücke, Abschlusseigenschaften, Entscheidbarkeitsresultate, Pumping-Lemma, Satz von Myhill und Nerode
- ▶ Kontextfreie Sprachen: Chomsky-Normalform, Pumping-Lemma, Greibach-Normalform, Abschlusseigenschaften, CYK-Algorithmus, Kellerautomaten (PDAs und DPDAs), Entscheidbarkeitsresultate
- ▶ Kontextsensitive und Typ 0-Sprachen: Turingmaschinen (DTMs und NTMs), LBAs, Entscheiden des Wortproblems für Typ 1-Sprachen

Blau: Nur FSK

Inhaltsübersicht Teil II: Berechenbarkeitstheorie

- ▶ Berechenbarkeit
- ▶ Turingmaschinen und Turingberechenbarkeit
- ▶ **Primitiv rekursive und μ -rekursive Funktionen**
- ▶ Unentscheidbarkeit: Halteproblem
- ▶ Reduktionen, PCP, Satz von Rice

Blau: Nur FSK

Inhaltsübersicht Teil III: Komplexitätstheorie

- ▶ $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NP}$
- ▶ $\mathcal{NP}$ -Schwere und $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit
- ▶ Polynomialzeitreduktionen
- ▶ Satz von Cook
- ▶ $\mathcal{NP}$ -vollständige Probleme

Klassiker: „X angeben“

- ▶ Automaten angeben
- ▶ Grammatik angeben
- ▶ Regulären Ausdruck angeben

Klassiker: „Rechenaufgaben“

- ▶ NFA in DFA mit Potenzmengenkonstruktion transformieren
- ▶ DFA minimieren
- ▶ Chomsky-Normalform berechnen
- ▶ CYK-Algorithmus ausführen
- ▶ Wortproblem für Typ 1-Grammatiken entscheiden

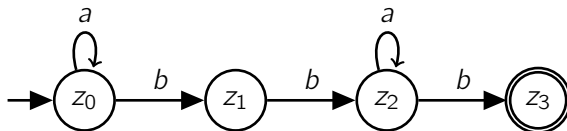
Blau: Nur FSK

Beispielaufgabe zu „Automaten angeben“

Geben Sie einen NFA über $\Sigma = \{a, b\}$ an, der $L = \{a^i b b a^j b \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ erkennt.

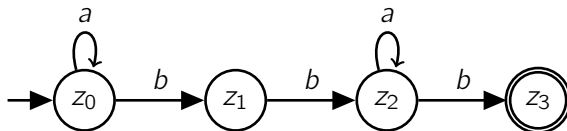
Beispielaufgabe zu „Automaten angeben“

Geben Sie einen NFA über $\Sigma = \{a, b\}$ an, der $L = \{a^i b b a^j b \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ erkennt.



Beispielaufgabe zu „Automaten angeben“

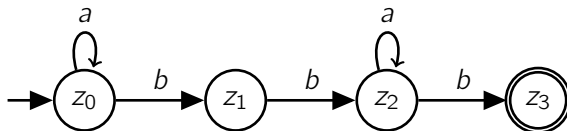
Geben Sie einen NFA über $\Sigma = \{a, b\}$ an, der $L = \{a^i b b a^j b \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ erkennt.



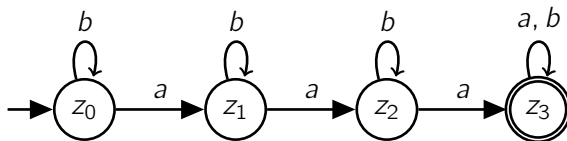
Geben Sie einen DFA über $\Sigma = \{a, b\}$ an, der $L = \{w \mid \#_a(w) > 2\}$ erkennt.

Beispielaufgabe zu „Automaten angeben“

Geben Sie einen NFA über $\Sigma = \{a, b\}$ an, der $L = \{a^i b b a^j b \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ erkennt.

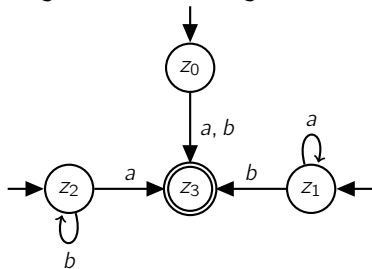


Geben Sie einen DFA über $\Sigma = \{a, b\}$ an, der $L = \{w \mid \#_a(w) > 2\}$ erkennt.



Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

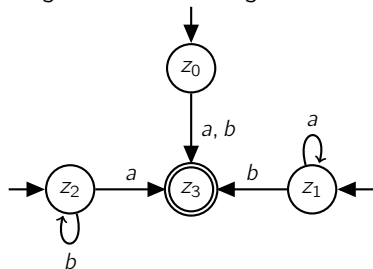
Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



- a) Welche Sprache erkennt der gezeigte NFA?
- b) Geben Sie die Sprache durch einen regulären Ausdruck an.
- c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).
- d) Minimieren Sie den DFA (Partitionstabelle erforderlich).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

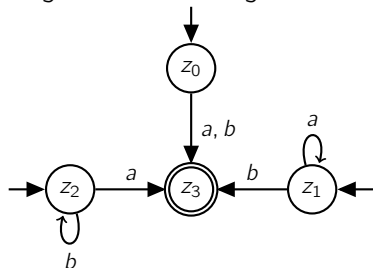
Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



a) Welche Sprache erkennt der gezeigte NFA?

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

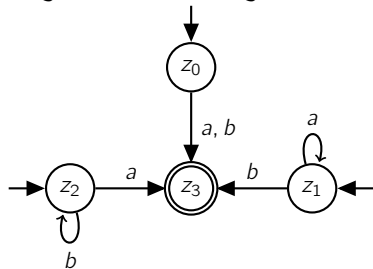


a) Welche Sprache erkennt der gezeigte NFA?

$$\begin{aligned} L &= \{a, b\} \cup \{b^i a \mid i \geq 0\} \cup \{a^i b \mid i \geq 0\} \\ &= \{b^i a \mid i \geq 0\} \cup \{a^i b \mid i \geq 0\} \end{aligned}$$

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



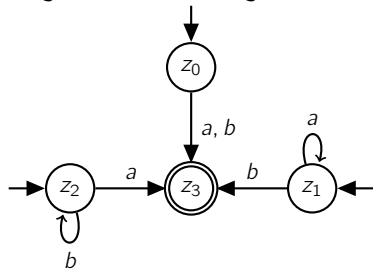
a) Welche Sprache erkennt der gezeigte NFA?

$$\begin{aligned} L &= \{a, b\} \cup \{b^i a \mid i \geq 0\} \cup \{a^i b \mid i \geq 0\} \\ &= \{b^i a \mid i \geq 0\} \cup \{a^i b \mid i \geq 0\} \end{aligned}$$

b) Geben Sie die Sprache durch einen regulären Ausdruck an.

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



- a) Welche Sprache erkennt der gezeigte NFA?

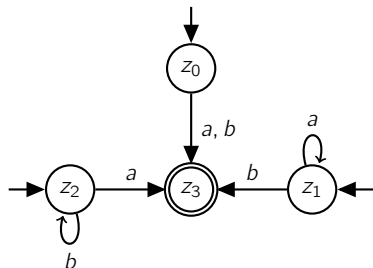
$$\begin{aligned} L &= \{a, b\} \cup \{b^i a \mid i \geq 0\} \cup \{a^i b \mid i \geq 0\} \\ &= \{b^i a \mid i \geq 0\} \cup \{a^i b \mid i \geq 0\} \end{aligned}$$

- b) Geben Sie die Sprache durch einen regulären Ausdruck an.

$$L = L(\alpha) \text{ mit } \alpha = (a^* b | b^* a)$$

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

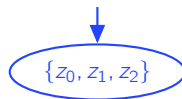
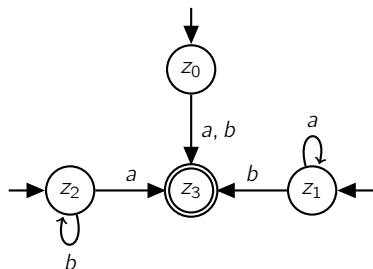
Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



- c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

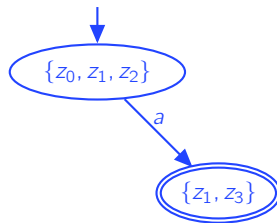
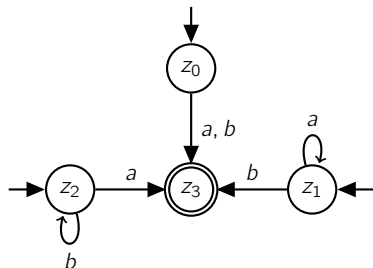
Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



- c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

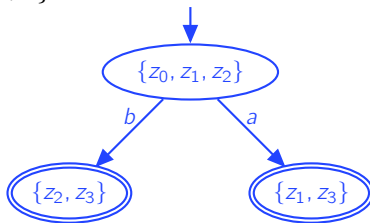
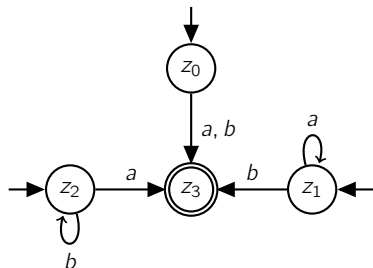
Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



- c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

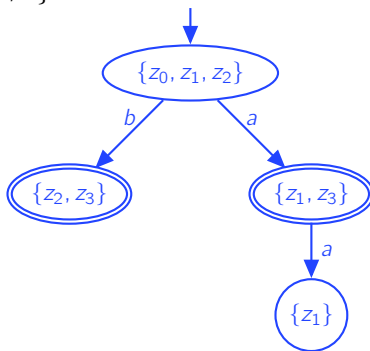
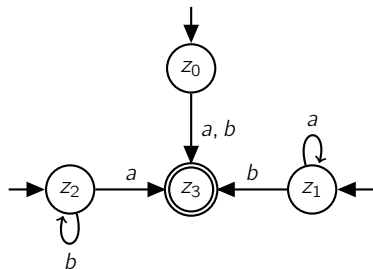
Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



- c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

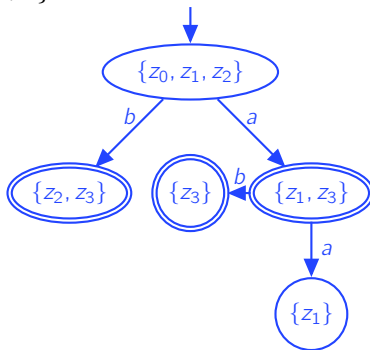
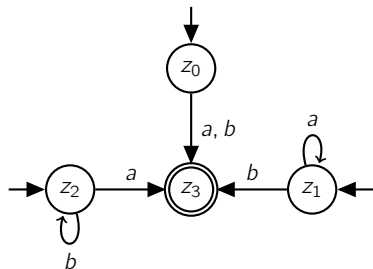
Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



- c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

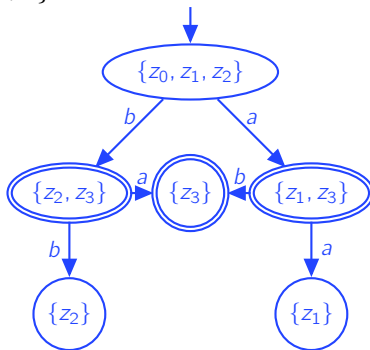
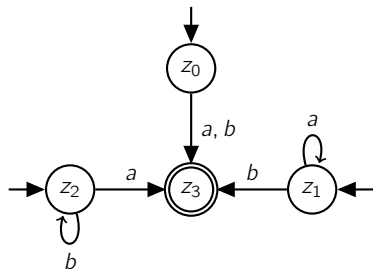
Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



- c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

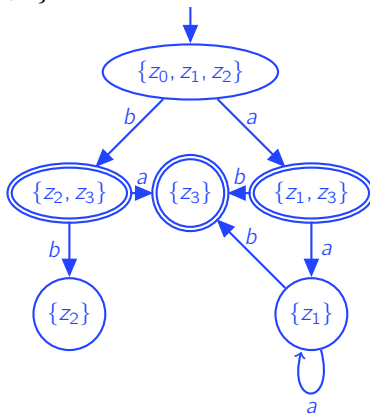
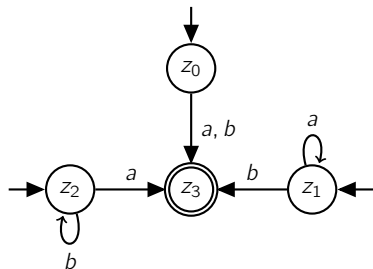
Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



- c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

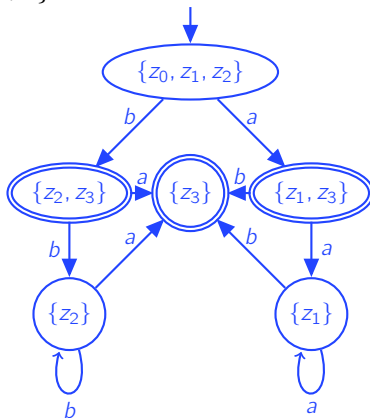
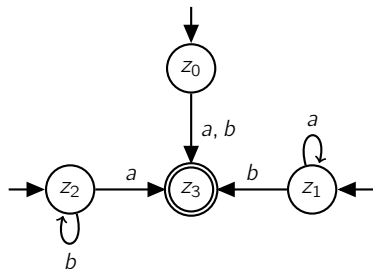
Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



- c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

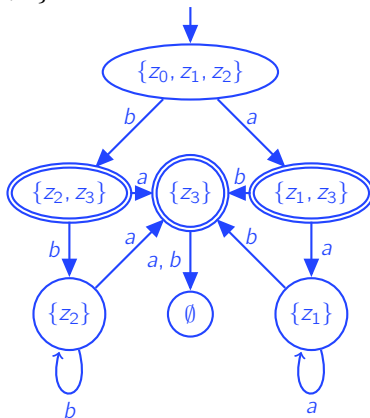
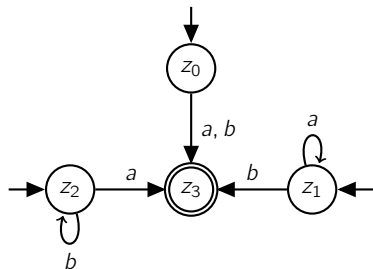
Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



- c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

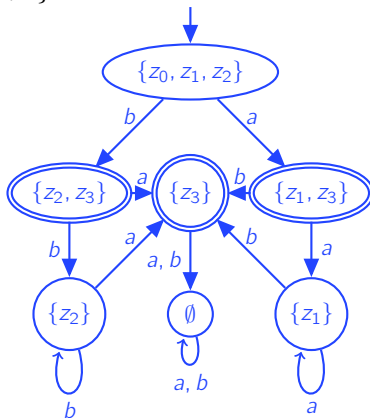
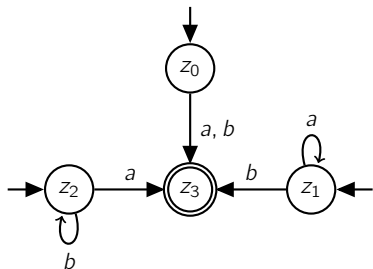
Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



- c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

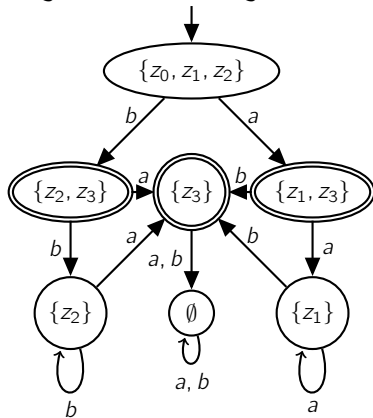
Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



- c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

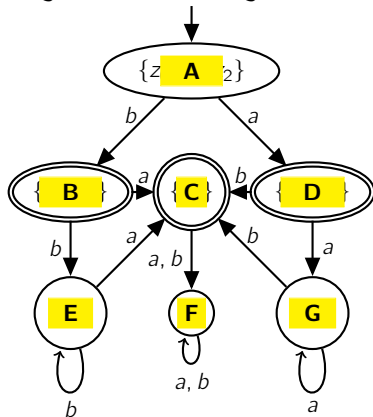
Gegeben sei der folgende DFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



d) Minimieren Sie den DFA (Partitionstabelle erforderlich).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

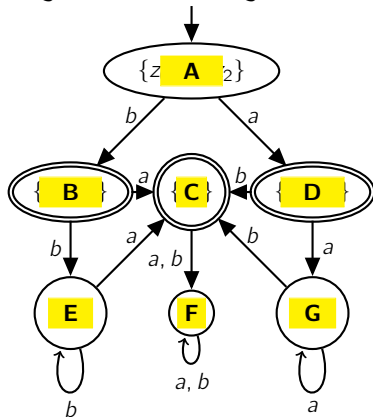
Gegeben sei der folgende DFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



d) Minimieren Sie den DFA (Partitionstabelle erforderlich).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende DFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



Partitionstabelle:

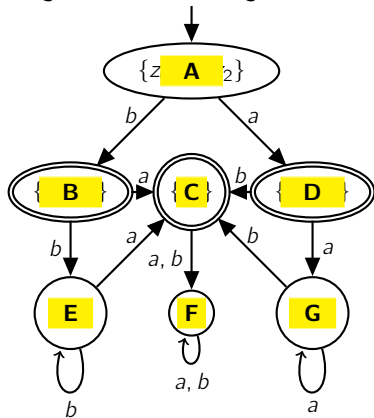
0.

A	E	F	G		B	C	D
---	---	---	---	--	---	---	---

d) Minimieren Sie den DFA (Partitionstabelle erforderlich).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende DFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



Partitionstabelle:

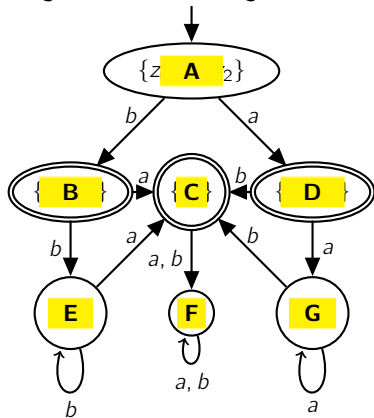
0.	A	E	F	G	B	C	D
1.	A	E	F	G	B	C	D

 mit a

d) Minimieren Sie den DFA (Partitionstabelle erforderlich).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende DFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



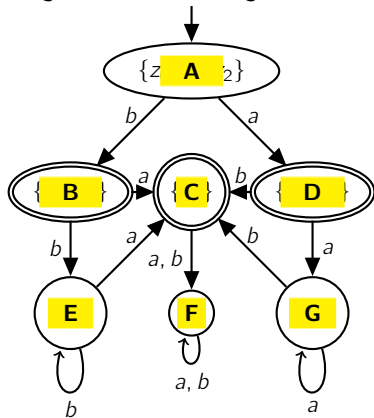
Partitionstabelle:

0.	A	E	F	G	B	C	D	
1.	A	E	F	G	B	C	D	mit a
2.	A	E	F	G	B	C	D	mit b

d) Minimieren Sie den DFA (Partitionstabelle erforderlich).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende DFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



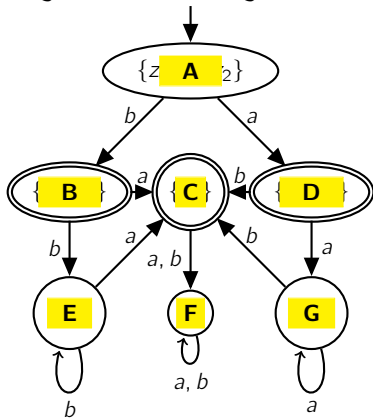
Partitionstabelle:

0.	A	E	F	G	B	C	D	
1.	A	E	F	G	B	C	D	mit a
2.	A	E	F	G	B	C	D	mit b
3.	A	E	F	G	B	C	D	mit a

d) Minimieren Sie den DFA (Partitionstabelle erforderlich).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende DFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



Partitionstabelle:

0.	A	E	F	G	B	C	D	
1.	A	E	F	G	B	C	D	mit a
2.	A	E	F	G	B	C	D	mit b
3.	A	E	F	G	B	C	D	mit a

Der Automat war schon minimal.

d) Minimieren Sie den DFA (Partitionstabelle erforderlich).

Klassiker: „Beweisaufgaben“

- ▶ Nichtregulärheit einer Sprache zeigen mit dem Pumping-Lemma für reguläre Sprachen
- ▶ Nichtregulärheit einer Sprache zeigen mit dem Satz von Myhill und Nerode
- ▶ Nicht-Kontextfreiheit einer Sprache zeigen mit dem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen
- ▶ Unentscheidbarkeit zeigen mit einer Reduktion
- ▶ Unentscheidbarkeit zeigen mit dem Satz von Rice
- ▶ $\mathcal{NP}$ -Schwere zeigen mit einer Polynomialzeitreduktion

Blau: nur FSK

Beispielaufgabe zu „Nichtregulärheit beweisen“

Zeigen Sie, dass $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.

Beispielaufgabe zu „Nichtregulärheit beweisen“

Zeigen Sie, dass $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.

Mit dem Pumping-Lemma.

Sei $n > 0$ beliebig.

Wir wählen $z \in L$ als $z = a^n b^n$. Wir haben $|z| \geq n$.

Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung von z ,
sodass $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Dann $u = a^i$, $v = a^j$,
 $w = a^k b^n$ mit $i + j + k = n$ und $j \geq 1$.

Wir wählen $i = 0$. Dann gilt $uv^0 w = a^{n-j} b^n \notin L$. Widerspruch.



Beispielaufgabe zu „Nichtregulärheit beweisen“

Zeigen Sie, dass $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Beispielaufgabe zu „Nichtregulärheit beweisen“

Zeigen Sie, dass $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Die Nerode-Relation $\sim_L$ eine Sprache L ist so definiert: $u \sim_L v$ g.d.w.

$$\forall w \in \Sigma^*, uw \in L \text{ g.d.w. } vw \in L$$

Der Satz von Myhill und Nerode sagt: $\text{Index}(\sim_L)$ ist endlich g.d.w. L regulär ist.

Beispielaufgabe zu „Nichtregulärheit beweisen“

Zeigen Sie, dass $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Die Nerode-Relation $\sim_L$ eine Sprache L ist so definiert: $u \sim_L v$ g.d.w.

$$\forall w \in \Sigma^*, uw \in L \text{ g.d.w. } vw \in L$$

Der Satz von Myhill und Nerode sagt: $\text{Index}(\sim_L)$ ist endlich g.d.w. L regulär ist.

Für die Aufgabe müssen wir unendlich viele verschiedene Äquivalenzklassen finden.

Beispielaufgabe zu „Nichtregulärheit beweisen“

Zeigen Sie, dass $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Die Nerode-Relation $\sim_L$ eine Sprache L ist so definiert: $u \sim_L v$ g.d.w.

$$\forall w \in \Sigma^*, uw \in L \text{ g.d.w. } vw \in L$$

Der Satz von Myhill und Nerode sagt: $\text{Index}(\sim_L)$ ist endlich g.d.w. L regulär ist.

Für die Aufgabe müssen wir unendlich viele verschiedene Äquivalenzklassen finden.

Für $u_i = a^i$ und $w_i = b^i$ gilt $u_i w_i \in L$, aber $u_j w_i \notin L$.

Damit $u_i \not\sim_L u_j$ für $i \neq j$.

Beispielaufgabe zu „Nichtregulärheit beweisen“

Zeigen Sie, dass $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Die Nerode-Relation $\sim_L$ eine Sprache L ist so definiert: $u \sim_L v$ g.d.w.

$$\forall w \in \Sigma^*, uw \in L \text{ g.d.w. } vw \in L$$

Der Satz von Myhill und Nerode sagt: $\text{Index}(\sim_L)$ ist endlich g.d.w. L regulär ist.

Für die Aufgabe müssen wir unendlich viele verschiedene Äquivalenzklassen finden.

Für $u_i = a^i$ und $w_i = b^i$ gilt $u_i w_i \in L$, aber $u_j w_i \notin L$.

Damit $u_i \not\sim_L u_j$ für $i \neq j$.

Es gibt also unendlich viele disjunkte Äquivalenzklassen: $[u_1]_{\sim_L}, [u_2]_{\sim_L}, \dots$

Daher: $\text{Index}(\sim_L) = \infty$.

Mit dem Satz von Myhill und Nerode folgt, dass L nicht regulär ist. □

Beispielaufgabe zu „Unentscheidbarkeit beweisen“

Sei $X = \{w \mid M_w \text{ hält genau bei Eingabe } 0\}$.

Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit mithilfe einer Reduktion.

Beispielaufgabe zu „Unentscheidbarkeit beweisen“

Sei $X = \{w \mid M_w \text{ hält genau bei Eingabe } 0\}$.

Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit mithilfe einer Reduktion.

Sei $H_0 = \{w \mid M_w \text{ hält bei leerer Eingabe}\}$. Aus der Vorlesung: H_0 ist unentscheidbar.

Beispielaufgabe zu „Unentscheidbarkeit beweisen“

Sei $X = \{w \mid M_w \text{ hält genau bei Eingabe } 0\}$.

Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit mithilfe einer Reduktion.

Sei $H_0 = \{w \mid M_w \text{ hält bei leerer Eingabe}\}$. Aus der Vorlesung: H_0 ist unentscheidbar.

Wir zeigen $H_0 \leq X$:

Beispielaufgabe zu „Unentscheidbarkeit beweisen“

Sei $X = \{w \mid M_w \text{ hält genau bei Eingabe } 0\}$.

Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit mithilfe einer Reduktion.

Sei $H_0 = \{w \mid M_w \text{ hält bei leerer Eingabe}\}$. Aus der Vorlesung: H_0 ist unentscheidbar.

Wir zeigen $H_0 \leq X$:

Die Reduktionsfunktion f nimmt eine Turingmaschinenbeschreibung und erstellt daraus eine neue Turingmaschinenbeschreibung.

Beispielaufgabe zu „Unentscheidbarkeit beweisen“

Sei $X = \{w \mid M_w \text{ hält genau bei Eingabe } 0\}$.

Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit mithilfe einer Reduktion.

Sei $H_0 = \{w \mid M_w \text{ hält bei leerer Eingabe}\}$. Aus der Vorlesung: H_0 ist unentscheidbar.

Wir zeigen $H_0 \leq X$:

Die Reduktionsfunktion f nimmt eine Turingmaschinenbeschreibung und erstellt daraus eine neue Turingmaschinenbeschreibung.

Sei w ein Wort. Sei M_w die Turingmaschine zu w .

Beispielaufgabe zu „Unentscheidbarkeit beweisen“

Sei $X = \{w \mid M_w \text{ hält genau bei Eingabe } 0\}$.

Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit mithilfe einer Reduktion.

Sei $H_0 = \{w \mid M_w \text{ hält bei leerer Eingabe}\}$. Aus der Vorlesung: H_0 ist unentscheidbar.

Wir zeigen $H_0 \leq X$:

Die Reduktionsfunktion f nimmt eine Turingmaschinenbeschreibung und erstellt daraus eine neue Turingmaschinenbeschreibung.

Sei w ein Wort. Sei M_w die Turingmaschine zu w .

f erstellt daraus eine Turingmaschine N , sodass

- ▶ N prüft, ob die Eingabe 0 ist. Falls nicht, geht N in eine Endlosschleife.
- ▶ N löscht das Eingabeband.
- ▶ N simuliert M_w bei leerer Eingabe.
- ▶ Wenn M_w akzeptiert, dann akzeptiert N , ansonsten läuft N endlos.

Beispielaufgabe zu „Unentscheidbarkeit beweisen“

Es gilt:

$$w \in H_0$$

Beispielaufgabe zu „Unentscheidbarkeit beweisen“

Es gilt:

$$w \in H_0$$

g.d.w. M_w hält bei leerer Eingabe

Beispielaufgabe zu „Unentscheidbarkeit beweisen“

Es gilt:

$$w \in H_0$$

g.d.w. M_w hält bei leerer Eingabe

$$f(w) \in X$$

Beispielaufgabe zu „Unentscheidbarkeit beweisen“

Es gilt:

$$w \in H_0$$

g.d.w. M_w hält bei leerer Eingabe

$$N = M_{f(w)} \text{ hält genau bei Eingabe } 0$$

g.d.w. $f(w) \in X$

Beispielaufgabe zu „Unentscheidbarkeit beweisen“

Es gilt:

$$w \in H_0$$

g.d.w. M_w hält bei leerer Eingabe

g.d.w. $N = M_{f(w)}$ hält genau bei Eingabe 0

g.d.w. $f(w) \in X$

Beispielaufgabe zu „Unentscheidbarkeit beweisen“

Es gilt:

$$w \in H_0$$

g.d.w. M_w hält bei leerer Eingabe

g.d.w. $N = M_{f(w)}$ hält genau bei Eingabe 0

g.d.w. $f(w) \in X$

Da f total und berechenbar ist, gilt $H_0 \leq X$.



Weitere typische Aufgaben

- ▶ Formalismen ineinander überführen (z.B. regulärer Ausdruck in DFA)
- ▶ Programme schreiben als Turingmaschine, **primitiv rekursive Funktion**, **μ -rekursive Funktion**
- ▶ Sprachen in der Chomsky-Hierarchie einordnen

Blau: Nur FSK

SORRY GUYS NO COMIC TODAY, I'VE GOTTA GO
TO THE DOCTOR TO GET MY THIGHS ROTATED.
BUT HERE'S SOME NEW CHARACTER ART I'M WORKING ON!

