

## 11c

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von CLIQUE, INDEPENDENT-SET und VERTEX-COVER

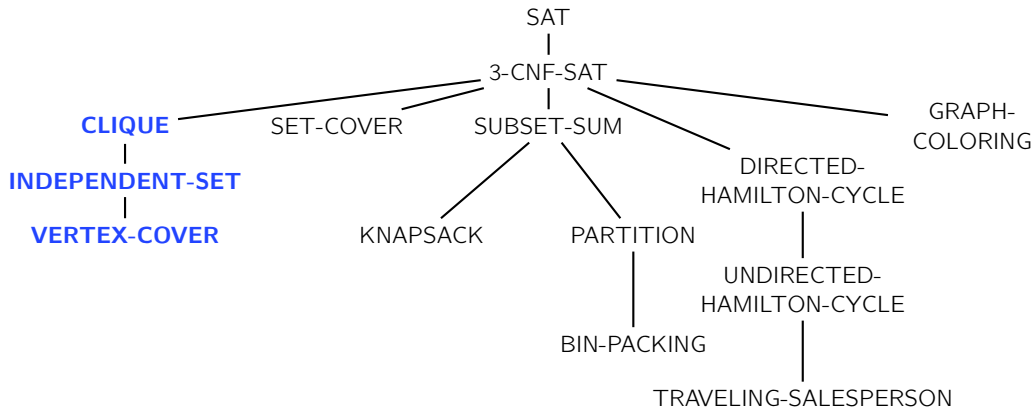
Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für  
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 11. Februar 2025  
Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel



# Überblick über $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeitsbeweise



# Ungerichtete Graphen

---

Ein **ungerichteter Graph**  $G = (V, E)$  besteht aus

- ▶ einer endlichen Menge  $V$  von Knoten (vertices)
- ▶ einer endlichen Menge  $E$  von Kanten (edges), wobei Kanten aus zwei Knoten bestehen, und für alle  $\{u, v\} \in E$  gilt  $u \neq v$ .

# Ungerichtete Graphen

Ein **ungerichteter Graph**  $G = (V, E)$  besteht aus

- ▶ einer endlichen Menge  $V$  von Knoten (vertices)
- ▶ einer endlichen Menge  $E$  von Kanten (edges), wobei Kanten aus zwei Knoten bestehen, und für alle  $\{u, v\} \in E$  gilt  $u \neq v$ .

Beispiel:  $G = (V, E)$  mit

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  und

$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\},$   
 $\{2, 6\}, \{4, 7\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{8, 9\}\}$

# Ungerichtete Graphen

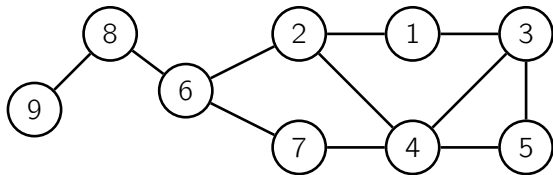
Ein **ungerichteter Graph**  $G = (V, E)$  besteht aus

- ▶ einer endlichen Menge  $V$  von Knoten (vertices)
- ▶ einer endlichen Menge  $E$  von Kanten (edges), wobei Kanten aus zwei Knoten bestehen, und für alle  $\{u, v\} \in E$  gilt  $u \neq v$ .

Beispiel:  $G = (V, E)$  mit

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  und

$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\},$   
 $\{2, 6\}, \{4, 7\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{8, 9\}\}$



# Ungerichtete Graphen

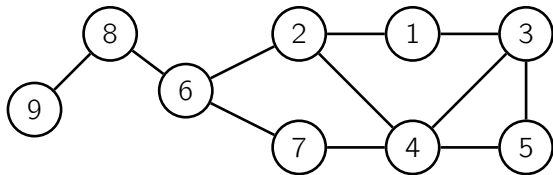
Ein **ungerichteter Graph**  $G = (V, E)$  besteht aus

- ▶ einer endlichen Menge  $V$  von Knoten (vertices)
- ▶ einer endlichen Menge  $E$  von Kanten (edges), wobei Kanten aus zwei Knoten bestehen, und für alle  $\{u, v\} \in E$  gilt  $u \neq v$ .

Beispiel:  $G = (V, E)$  mit

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  und

$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\},$   
 $\{2, 6\}, \{4, 7\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{8, 9\}\}$



Beachte: Wir **verbieten**

- ▶ Schlingen  $\{u, u\} \in E$
- ▶ Mehrfachkanten (= mehrere Kanten zwischen  $u$  und  $v$ )
- ▶ Hypergraphen (Kanten mit nicht genau 2 Knoten).

# Gerichtete Graphen

---

Bei **gerichteten Graphen** sind die Kanten gerichtet:  $(u, v) \in E$  statt  $\{u, v\} \in E$ .  
Daher sind Kanten  $(u, v)$  und  $(v, u)$  verschieden.

# Gerichtete Graphen

Bei **gerichteten Graphen** sind die Kanten gerichtet:  $(u, v) \in E$  statt  $\{u, v\} \in E$ .  
Daher sind Kanten  $(u, v)$  und  $(v, u)$  verschieden.

Beispiel:  $G = (V, E)$  mit

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  und

$E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 5),$   
 $(2, 6), (4, 7), (6, 7), (6, 8), (8, 9)\}$



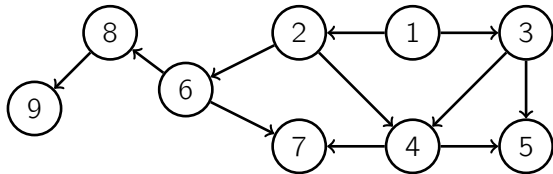
# Gerichtete Graphen

Bei **gerichteten Graphen** sind die Kanten gerichtet:  $(u, v) \in E$  statt  $\{u, v\} \in E$ .  
Daher sind Kanten  $(u, v)$  und  $(v, u)$  verschieden.

Beispiel:  $G = (V, E)$  mit

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  und

$E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 5),$   
 $(2, 6), (4, 7), (6, 7), (6, 8), (8, 9)\}$



# Cliquen in Graphen

## Definition

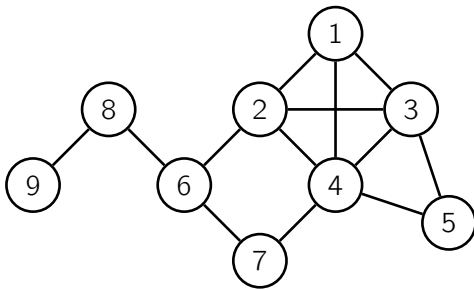
Für einen ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  ist eine **Clique der Größe  $k$**  eine Menge  $V' \subseteq V$ , sodass  $|V'| = k$  und für alle  $u, v \in V'$  mit  $u \neq v$  gilt:  $\{u, v\} \in E$ .

# Cliquen in Graphen

## Definition

Für einen ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  ist eine **Clique der Größe  $k$**  eine Menge  $V' \subseteq V$ , sodass  $|V'| = k$  und für alle  $u, v \in V'$  mit  $u \neq v$  gilt:  $\{u, v\} \in E$ .

Beispiel:

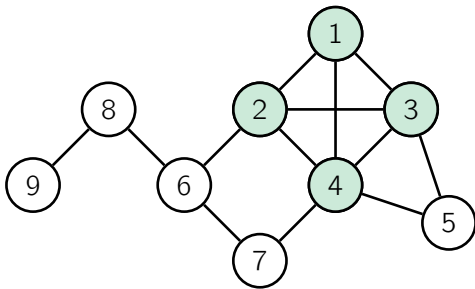


# Cliquen in Graphen

## Definition

Für einen ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  ist eine **Clique der Größe  $k$**  eine Menge  $V' \subseteq V$ , sodass  $|V'| = k$  und für alle  $u, v \in V'$  mit  $u \neq v$  gilt:  $\{u, v\} \in E$ .

Beispiel (Größe 4):



## Definition

Das **CLIQUE-Problem** lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  und eine Zahl  $k \in \mathbb{N}$

gefragt: Besitzt  $G$  eine Clique der Größe  $k$ ?

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von CLIQUE

---

## **Satz**

CLIQUE ist  $\mathcal{NP}$ -vollständig.

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von CLIQUE

## Satz

CLIQUE ist  $\mathcal{NP}$ -vollständig.

## Beweis

### 1. CLIQUE $\in \mathcal{NP}$ :

Rate nichtdeterministisch eine Menge  $V' \subseteq V$  von  $k$  Knoten.

Prüfe deterministisch (in Polynomialzeit), ob für alle  $u, v \in V' : \{u, v\} \in E$  gilt.

Falls ja, akzeptiere, sonst verwirf.

Daher kann eine NTM konstruiert werden, die CLIQUE in Polynomialzeit entscheidet.

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von CLIQUE

---

**Beweis** (Fortsetzung)

2. CLIQUE ist  $\mathcal{NP}$ -schwer:

Wir zeigen  $3\text{-CNF-SAT} \leq_p \text{CLIQUE}$ .



# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von CLIQUE

**Beweis** (Fortsetzung)

2. CLIQUE ist  $\mathcal{NP}$ -schwer:

Wir zeigen  $3\text{-CNF-SAT} \leq_p \text{CLIQUE}$ .

Sei  $F = K_1 \wedge \dots \wedge K_m$  eine 3-CNF, wobei

$$K_i = (L_{i,1} \vee L_{i,2} \vee L_{i,3})$$

für  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Falls  $K_i$  weniger als drei Literale hat, verdopple Literale.

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von CLIQUE

**Beweis** (Fortsetzung)

2. CLIQUE ist  $\mathcal{NP}$ -schwer:

Wir zeigen  $3\text{-CNF-SAT} \leq_p \text{CLIQUE}$ .

Sei  $F = K_1 \wedge \dots \wedge K_m$  eine 3-CNF, wobei

$$K_i = (L_{i,1} \vee L_{i,2} \vee L_{i,3})$$

für  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Falls  $K_i$  weniger als drei Literale hat, verdopple Literale.

Notation:  $\bar{L}$  ist negiertes Literal zu  $L$ :  $\bar{x} = \neg x$  und  $\overline{\bar{x}} = x$ .

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von CLIQUE

**Beweis** (Fortsetzung)

2. CLIQUE ist  $\mathcal{NP}$ -schwer:

Wir zeigen  $3\text{-CNF-SAT} \leq_p \text{CLIQUE}$ .

Sei  $F = K_1 \wedge \dots \wedge K_m$  eine 3-CNF, wobei

$$K_i = (L_{i,1} \vee L_{i,2} \vee L_{i,3})$$

für  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Falls  $K_i$  weniger als drei Literale hat, verdopple Literale.

Notation:  $\bar{L}$  ist negiertes Literal zu  $L$ :  $\bar{x} = \neg x$  und  $\overline{\neg x} = x$ .

Wir erzeugen einen Graphen  $f(G)$ .

Für jedes Literal  $L_{i,j}$  erzeuge Knoten  $(i,j)$  im Graph, d.h.

$$V := \{(i,j) \mid i \in \{1, \dots, m\} \text{ und } j \in \{1, 2, 3\}\}$$

## **Beweis** (Fortsetzung)

Für die Kanten:

- ▶ Erzeuge **keine Kanten innerhalb** der drei Knoten  $\{(i, 1), (i, 2), (i, 3)\}$  **einer Klausel** für jedes  $i$ .

## **Beweis** (Fortsetzung)

Für die Kanten:

- ▶ Erzeuge **keine Kanten innerhalb** der drei Knoten  $\{(i, 1), (i, 2), (i, 3)\}$  **einer Klausel** für jedes  $i$ .
- ▶ Erzeuge Kanten zwischen Literalen verschiedenen Klauseln, aber **ohne dass sich zwei verbundene Literale  $L_{i,j}$  und  $L_{i',j'}$  widersprechen** (d.h.  $L_{i,j} \neq \overline{L_{i',j'}}$ ).

## Beweis (Fortsetzung)

Für die Kanten:

- ▶ Erzeuge **keine Kanten innerhalb** der drei Knoten  $\{(i, 1), (i, 2), (i, 3)\}$  **einer Klausel** für jedes  $i$ .
- ▶ Erzeuge Kanten zwischen Literalen verschiedenen Klauseln, aber **ohne dass sich zwei verbundene Literale  $L_{i,j}$  und  $L_{i',j'}$  widersprechen** (d.h.  $L_{i,j} \neq \overline{L_{i',j'}}$ ).

Daher:

$$E := \left\{ \{(i,j), (i',j')\} \mid \begin{array}{l} i \neq i' \text{ und } i, i' \in \{1, \dots, m\} \text{ und } j, j' \in \{1, 2, 3\} \\ \text{und } L_{i,j} \neq \overline{L_{i',j'}} \end{array} \right\}$$

## Beweis (Fortsetzung)

Für die Kanten:

- ▶ Erzeuge **keine Kanten innerhalb** der drei Knoten  $\{(i, 1), (i, 2), (i, 3)\}$  **einer Klausel** für jedes  $i$ .
- ▶ Erzeuge Kanten zwischen Literalen verschiedenen Klauseln, aber **ohne dass sich zwei verbundene Literale  $L_{i,j}$  und  $L_{i',j'}$  widersprechen** (d.h.  $L_{i,j} \neq \overline{L_{i',j'}}$ ).

Daher:

$$E := \left\{ \{(i,j), (i',j')\} \mid \begin{array}{l} i \neq i' \text{ und } i, i' \in \{1, \dots, m\} \text{ und } j, j' \in \{1, 2, 3\} \\ \text{und } L_{i,j} \neq \overline{L_{i',j'}} \end{array} \right\}$$

$f(F) = ((V, E), m)$  ist total und in Polynomialzeit berechenbar.

## Erstes Beispiel für die Reduktion

---

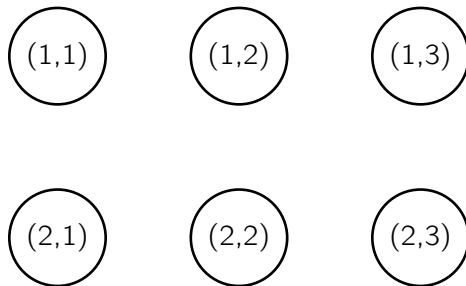
Sei  $F = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_1)$ .



## Erstes Beispiel für die Reduktion

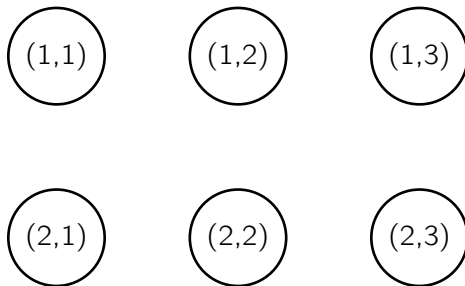
---

Sei  $F = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_1)$ . Graph:



## Erstes Beispiel für die Reduktion

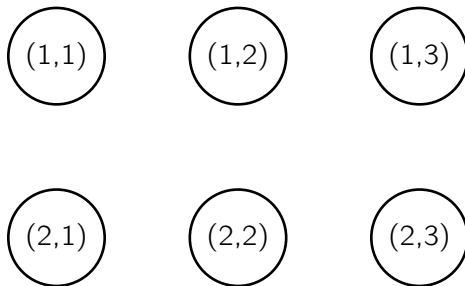
Sei  $F = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_1)$ . Graph:



Es gibt keine Kanten, da sich  $(1, i)$  und  $(2, j)$  stets widersprechen.

## Erstes Beispiel für die Reduktion

Sei  $F = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_1)$ . Graph:



Es gibt keine Kanten, da sich  $(1, i)$  und  $(2, j)$  stets widersprechen.

Es gibt keine Clique der Größe 2 aber auch keine erfüllende Belegung der Variablen von  $F$ .

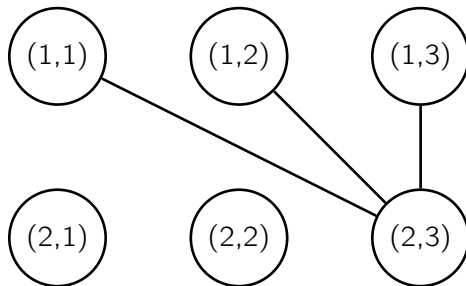
## Zweites Beispiel für die Reduktion

---

Sei  $F = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2)$ .

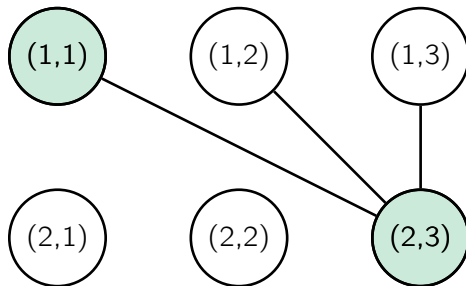
## Zweites Beispiel für die Reduktion

Sei  $F = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2)$ . Graph:



## Zweites Beispiel für die Reduktion

Sei  $F = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2)$ . Graph:



Z.B. ist  $\{(1, 1), (2, 3)\}$  eine Clique der Größe 2.  
Die zugehörige Belegung ist  $I(x_1) = 1, I(x_2) = 0$ .

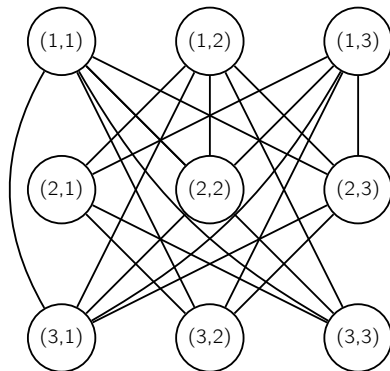
## Drittes Beispiel für die Reduktion

---

Sei  $F = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$ .

## Drittes Beispiel für die Reduktion

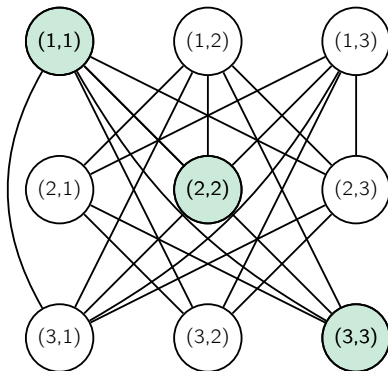
Sei  $F = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$ . Graph:





## Drittes Beispiel für die Reduktion

Sei  $F = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$ . Graph:



Z.B. ist  $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$  eine Clique der Größe 3.

Die zugehörige Belegung ist  $I(x_1) = 1, I(x_2) = 1, I(x_3) = 0$ .

## **Beweis** (Fortsetzung)

Zu zeigen:  $F$  ist erfüllbar g.d.w.  $(V, E)$  eine Clique der Größe  $m$  hat.

$\implies$  Wenn  $F$  erfüllbar ist, gibt es eine Belegung  $I$ , sodass in jeder Klausel  $K_i$  mindestens ein Literal wahr ist.

## **Beweis** (Fortsetzung)

Zu zeigen:  $F$  ist erfüllbar g.d.w.  $(V, E)$  eine Clique der Größe  $m$  hat.

⇒ Wenn  $F$  erfüllbar ist, gibt es eine Belegung  $I$ , sodass in jeder Klausel  $K_i$  mindestens ein Literal wahr ist.

D.h. es gibt Literale  $L_{1,j_1}, \dots, L_{m,j_m}$  mit  $I(L_{1,j_1}) = 1, \dots, I(L_{m,j_m}) = 1$ .

## **Beweis** (Fortsetzung)

Zu zeigen:  $F$  ist erfüllbar g.d.w.  $(V, E)$  eine Clique der Größe  $m$  hat.

⇒ Wenn  $F$  erfüllbar ist, gibt es eine Belegung  $I$ , sodass in jeder Klausel  $K_i$  mindestens ein Literal wahr ist.

D.h. es gibt Literale  $L_{1,j_1}, \dots, L_{m,j_m}$  mit  $I(L_{1,j_1}) = 1, \dots, I(L_{m,j_m}) = 1$ .

Diese Literale können sich paarweise nicht widersprechen.

D.h. sie sind im Graph paarweise miteinander verbunden.

## **Beweis** (Fortsetzung)

Zu zeigen:  $F$  ist erfüllbar g.d.w.  $(V, E)$  eine Clique der Größe  $m$  hat.

⇒ Wenn  $F$  erfüllbar ist, gibt es eine Belegung  $I$ , sodass in jeder Klausel  $K_i$  mindestens ein Literal wahr ist.

D.h. es gibt Literale  $L_{1,j_1}, \dots, L_{m,j_m}$  mit  $I(L_{1,j_1}) = 1, \dots, I(L_{m,j_m}) = 1$ .

Diese Literale können sich paarweise nicht widersprechen.

D.h. sie sind im Graph paarweise miteinander verbunden.

Daher formt  $\{(1, j_1), \dots, (m, j_m)\}$  eine Clique der Größe  $m$ .

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von CLIQUE

---

## **Beweis** (Fortsetzung)

- ⇐ Wir nehmen an, dass  $(V, E)$  eine Clique der Größe  $m$  hat und beweisen, dass  $F$  erfüllbar ist.

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von CLIQUE

---

## **Beweis** (Fortsetzung)

⇐ Wir nehmen an, dass  $(V, E)$  eine Clique der Größe  $m$  hat und beweisen, dass  $F$  erfüllbar ist.

Sei  $V' = \{(i_1, j_1), \dots, (i_m, j_m)\}$  eine Clique der Größe  $m$ .

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von CLIQUE

## **Beweis** (Fortsetzung)

⇐ Wir nehmen an, dass  $(V, E)$  eine Clique der Größe  $m$  hat und beweisen, dass  $F$  erfüllbar ist.

Sei  $V' = \{(i_1, j_1), \dots, (i_m, j_m)\}$  eine Clique der Größe  $m$ .

Da  $(i, x)$  und  $(i, y)$  nie miteinander verbunden sind, müssen alle  $i_1, \dots, i_m$  paarweise verschieden sein, also  $\{i_1, \dots, i_m\} = \{1, \dots, m\}$ . Mit anderen Worten gehören die Literale zu verschiedenen Klauseln.



# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von CLIQUE

## **Beweis** (Fortsetzung)

⇐ Wir nehmen an, dass  $(V, E)$  eine Clique der Größe  $m$  hat und beweisen, dass  $F$  erfüllbar ist.

Sei  $V' = \{(i_1, j_1), \dots, (i_m, j_m)\}$  eine Clique der Größe  $m$ .

Da  $(i, x)$  und  $(i, y)$  nie miteinander verbunden sind, müssen alle  $i_1, \dots, i_m$  paarweise verschieden sein, also  $\{i_1, \dots, i_m\} = \{1, \dots, m\}$ . Mit anderen Worten gehören die Literale zu verschiedenen Klauseln.

Da sie verbunden sind, widersprechen sich die Literale  $L_{i_1, j_1}, \dots, L_{i_m, j_m}$  paarweise nicht.

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von CLIQUE

## Beweis (Fortsetzung)

⇐ Wir nehmen an, dass  $(V, E)$  eine Clique der Größe  $m$  hat und beweisen, dass  $F$  erfüllbar ist.

Sei  $V' = \{(i_1, j_1), \dots, (i_m, j_m)\}$  eine Clique der Größe  $m$ .

Da  $(i, x)$  und  $(i, y)$  nie miteinander verbunden sind, müssen alle  $i_1, \dots, i_m$  paarweise verschieden sein, also  $\{i_1, \dots, i_m\} = \{1, \dots, m\}$ . Mit anderen Worten gehören die Literale zu verschiedenen Klauseln.

Da sie verbunden sind, widersprechen sich die Literale  $L_{i_1, j_1}, \dots, L_{i_m, j_m}$  paarweise nicht.

Definiere die Belegung  $I$  mit  $I(x) = 1$  wenn  $L_{i_k, j_k} = x$  und  $I(x) = 0$  wenn  $L_{i_k, j_k} = \neg x$  und  $I(y) = 1$  für alle anderen Variablen.

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von CLIQUE

## Beweis (Fortsetzung)

⇐ Wir nehmen an, dass  $(V, E)$  eine Clique der Größe  $m$  hat und beweisen, dass  $F$  erfüllbar ist.

Sei  $V' = \{(i_1, j_1), \dots, (i_m, j_m)\}$  eine Clique der Größe  $m$ .

Da  $(i, x)$  und  $(i, y)$  nie miteinander verbunden sind, müssen alle  $i_1, \dots, i_m$  paarweise verschieden sein, also  $\{i_1, \dots, i_m\} = \{1, \dots, m\}$ . Mit anderen Worten gehören die Literale zu verschiedenen Klauseln.

Da sie verbunden sind, widersprechen sich die Literale  $L_{i_1, j_1}, \dots, L_{i_m, j_m}$  paarweise nicht.

Definiere die Belegung  $I$  mit  $I(x) = 1$  wenn  $L_{i_k, j_k} = x$  und  $I(x) = 0$  wenn  $L_{i_k, j_k} = \neg x$  und  $I(y) = 1$  für alle anderen Variablen.

$I$  macht die Literale  $L_{i_1, j_1}, \dots, L_{i_m, j_m}$  wahr und da mindestens ein Literal pro Klausel wahr ist, ist  $F$  wahr.

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von CLIQUE

## Beweis (Fortsetzung)

⇐ Wir nehmen an, dass  $(V, E)$  eine Clique der Größe  $m$  hat und beweisen, dass  $F$  erfüllbar ist.

Sei  $V' = \{(i_1, j_1), \dots, (i_m, j_m)\}$  eine Clique der Größe  $m$ .

Da  $(i, x)$  und  $(i, y)$  nie miteinander verbunden sind, müssen alle  $i_1, \dots, i_m$  paarweise verschieden sein, also  $\{i_1, \dots, i_m\} = \{1, \dots, m\}$ . Mit anderen Worten gehören die Literale zu verschiedenen Klauseln.

Da sie verbunden sind, widersprechen sich die Literale  $L_{i_1, j_1}, \dots, L_{i_m, j_m}$  paarweise nicht.

Definiere die Belegung  $I$  mit  $I(x) = 1$  wenn  $L_{i_k, j_k} = x$  und  $I(x) = 0$  wenn  $L_{i_k, j_k} = \neg x$  und  $I(y) = 1$  für alle anderen Variablen.

$I$  macht die Literale  $L_{i_1, j_1}, \dots, L_{i_m, j_m}$  wahr und da mindestens ein Literal pro Klausel wahr ist, ist  $F$  wahr.

Daher:  $3\text{-CNF-SAT} \leq_p \text{CLIQUE}$ .

Da  $3\text{-CNF-SAT}$   $\mathcal{NP}$ -schwer ist, folgt dass  $\text{CLIQUE}$   $\mathcal{NP}$ -schwer ist. □

# Unabhängige Knotenmenge

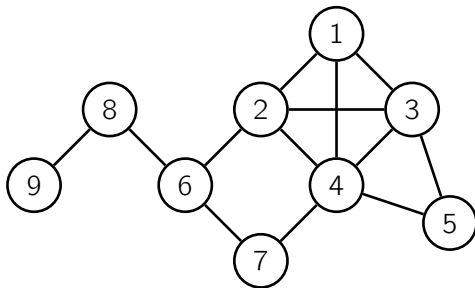
## Definition

Für einen Graphen  $G = (V, E)$  ist  $V' \subseteq V$  eine **unabhängige Knotenmenge** (*independent set*), wenn keine zwei Knoten aus  $V'$  über eine Kante verbunden sind, d.h.  $u, v \in V'$  impliziert  $\{u, v\} \notin E$ .

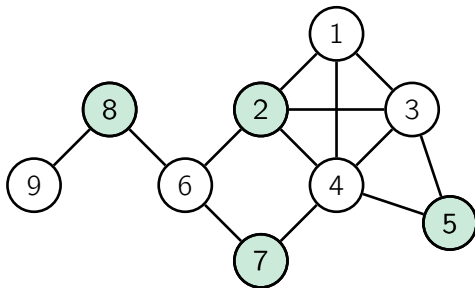
Beachte:

- ▶  $\emptyset$  ist immer eine unabhängige Knotenmenge.
- ▶ Man möchte typischerweise eine große Menge  $V'$  finden.

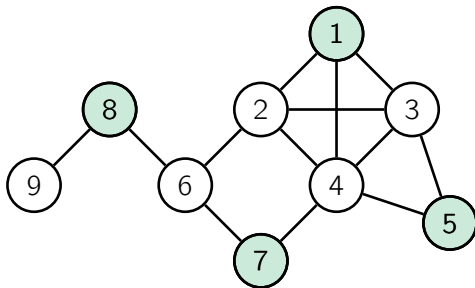
# Beispiele für unabhängige Knotenmengen



# Beispiele für unabhängige Knotenmengen

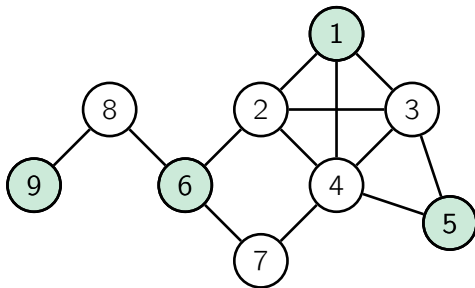


# Beispiele für unabhängige Knotenmengen

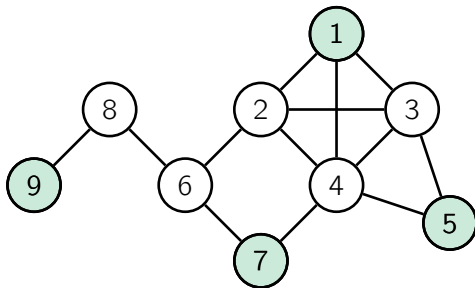




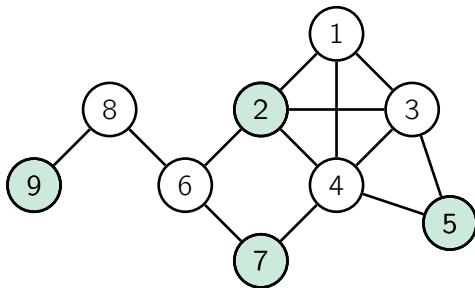
# Beispiele für unabhängige Knotenmengen



# Beispiele für unabhängige Knotenmengen



# Beispiele für unabhängige Knotenmengen

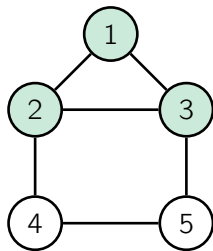


## Komplementgraph

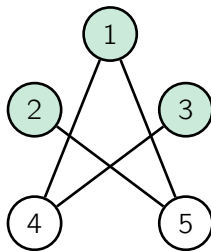
Für einen Graphen  $G = (V, E)$  ist der **Komplementgraph zu  $G$**  der Graph  $\overline{G} = (V, \overline{E})$  mit

$$\overline{E} := \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$$

# Beispiel für den Komplementgraphen

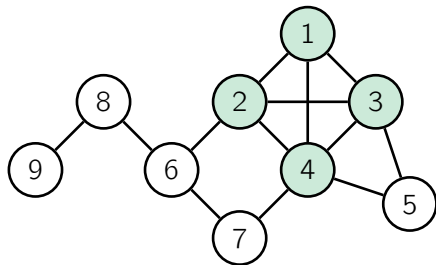


Graph

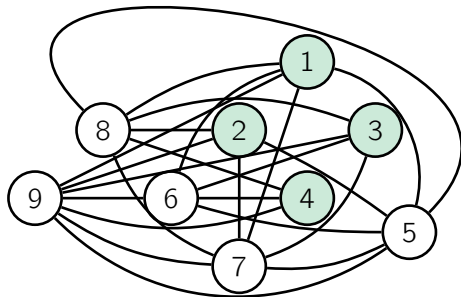


Komplementgraph

## Weiteres Beispiel für den Komplementgraphen



Graph



Komplementgraph

# Unabhängige Knotenmengen vs. Cliques

## Lemma

Für jeden ungerichteten Graphen  $G$  gilt:  $G$  hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $k$  g.d.w.  $\overline{G}$  eine Clique der Größe  $k$  hat.

# Unabhängige Knotenmengen vs. Cliques

## Lemma

Für jeden ungerichteten Graphen  $G$  gilt:  $G$  hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $k$  g.d.w.  $\overline{G}$  eine Clique der Größe  $k$  hat.

**Beweis** Sei  $V' \subseteq V$ .



# Unabhängige Knotenmengen vs. Cliques

## Lemma

Für jeden ungerichteten Graphen  $G$  gilt:  $G$  hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $k$  g.d.w.  $\overline{G}$  eine Clique der Größe  $k$  hat.

**Beweis** Sei  $V' \subseteq V$ .

$V'$  ist eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $k$

# Unabhängige Knotenmengen vs. Cliques

## Lemma

Für jeden ungerichteten Graphen  $G$  gilt:  $G$  hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $k$  g.d.w.  $\overline{G}$  eine Clique der Größe  $k$  hat.

**Beweis** Sei  $V' \subseteq V$ .

$V'$  ist eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $k$   
g.d.w.  $\{u, v\} \notin E$  für  $u, v \in V'$  und  $|V'| = k$

# Unabhängige Knotenmengen vs. Cliques

## Lemma

Für jeden ungerichteten Graphen  $G$  gilt:  $G$  hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $k$  g.d.w.  $\overline{G}$  eine Clique der Größe  $k$  hat.

**Beweis** Sei  $V' \subseteq V$ .

$V'$  ist eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $k$   
g.d.w.  $\{u, v\} \notin E$  für  $u, v \in V'$  und  $|V'| = k$

$V'$  ist eine Clique der Größe  $k$  in  $\overline{G}$

# Unabhängige Knotenmengen vs. Cliques

## Lemma

Für jeden ungerichteten Graphen  $G$  gilt:  $G$  hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $k$  g.d.w.  $\overline{G}$  eine Clique der Größe  $k$  hat.

**Beweis** Sei  $V' \subseteq V$ .

$V'$  ist eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $k$   
g.d.w.  $\{u, v\} \notin E$  für  $u, v \in V'$  und  $|V'| = k$

$\{u, v\} \in \overline{E}$  für  $u, v \in V'$ ,  $u \neq v$  und  $|V'| = k$   
g.d.w.  $V'$  ist eine Clique der Größe  $k$  in  $\overline{G}$



# Unabhängige Knotenmengen vs. Cliques

## Lemma

Für jeden ungerichteten Graphen  $G$  gilt:  $G$  hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $k$  g.d.w.  $\overline{G}$  eine Clique der Größe  $k$  hat.

**Beweis** Sei  $V' \subseteq V$ .

$V'$  ist eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $k$   
g.d.w.  $\{u, v\} \notin E$  für  $u, v \in V'$  und  $|V'| = k$

g.d.w.  $\{u, v\} \in \overline{E}$  für  $u, v \in V'$ ,  $u \neq v$  und  $|V'| = k$

g.d.w.  $V'$  ist eine Clique der Größe  $k$  in  $\overline{G}$



# Das INDEPENDENT-SET-Problem

## Definition

Das **INDEPENDENT-SET-Problem** lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  und eine Zahl  $k \in \mathbb{N}$

gefragt: Besitzt  $G$  eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $k$ ?

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von INDEPENDENT-SET

---

## Satz

INDEPENDENT-SET ist  $\mathcal{NP}$ -vollständig.

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von INDEPENDENT-SET

## Satz

INDEPENDENT-SET ist  $\mathcal{NP}$ -vollständig.

## Beweis

### 1. INDEPENDENT-SET $\in \mathcal{NP}$ :

Rate nichtdeterministisch eine Menge  $V' \subseteq V$  von  $k$  Knoten.

Verifiziere deterministisch, ob für jedes Paar  $\{u, v\} \in V'$  gilt:  $\{u, v\} \notin E$ .

Dies geht in Polynomialzeit.

Daher kann INDEPENDENT-SET in Polynomialzeit auf einer NTM entschieden werden.



# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von INDEPENDENT-SET

---

## Beweis

2. INDEPENDENT-SET ist  $\mathcal{NP}$ -schwer:

Wir zeigen  $\text{CLIQUE} \leq_p \text{INDEPENDENT-SET}$ .

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von INDEPENDENT-SET

---

## Beweis

### 2. INDEPENDENT-SET ist $\mathcal{NP}$ -schwer:

Wir zeigen  $\text{CLIQUE} \leq_p \text{INDEPENDENT-SET}$ .

Sei  $f((V, E), m) = ((V, \bar{E}), m)$  mit  $\bar{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, \{u, v\} \notin E\}$ .

## Beweis

### 2. INDEPENDENT-SET ist $\mathcal{NP}$ -schwer:

Wir zeigen  $\text{CLIQUE} \leq_p \text{INDEPENDENT-SET}$ .

Sei  $f((V, E), m) = ((V, \bar{E}), m)$  mit  $\bar{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, \{u, v\} \notin E\}$ .

Die Funktion  $f$  ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von INDEPENDENT-SET

## Beweis

### 2. INDEPENDENT-SET ist $\mathcal{NP}$ -schwer:

Wir zeigen  $\text{CLIQUE} \leq_p \text{INDEPENDENT-SET}$ .

Sei  $f((V, E), m) = ((V, \bar{E}), m)$  mit  $\bar{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, \{u, v\} \notin E\}$ .

Die Funktion  $f$  ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

Dann gilt:  $(V, E)$  hat eine Clique der Größe  $m$  g.d.w.

$(V, \bar{E})$  eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $m$  hat.

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von INDEPENDENT-SET

## Beweis

### 2. INDEPENDENT-SET ist $\mathcal{NP}$ -schwer:

Wir zeigen  $\text{CLIQUE} \leq_p \text{INDEPENDENT-SET}$ .

Sei  $f((V, E), m) = ((V, \bar{E}), m)$  mit  $\bar{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, \{u, v\} \notin E\}$ .

Die Funktion  $f$  ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

Dann gilt:  $(V, E)$  hat eine Clique der Größe  $m$  g.d.w.

$(V, \bar{E})$  eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $m$  hat.

Daher:  $\text{CLIQUE} \leq_p \text{INDEPENDENT-SET}$ .

Da  $\text{CLIQUE}$   $\mathcal{NP}$ -schwer ist, folgt dass  $\text{INDEPENDENT-SET}$   $\mathcal{NP}$ -schwer ist. □

# Überdeckende Knotenmenge

## Definition

Für einen Graphen  $G = (V, E)$  ist  $V' \subseteq V$  eine **überdeckende Knotenmenge** (*vertex cover*), wenn jede Kante aus  $E$  mindestens einen Knoten in  $V'$  hat, d.h. für alle Knoten  $u, v \in V$ :  $\{u, v\} \in E$  impliziert  $u \in V' \vee v \in V'$ .

# Überdeckende Knotenmenge

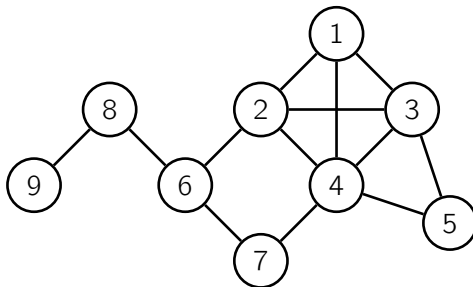
## Definition

Für einen Graphen  $G = (V, E)$  ist  $V' \subseteq V$  eine **überdeckende Knotenmenge** (*vertex cover*), wenn jede Kante aus  $E$  mindestens einen Knoten in  $V'$  hat, d.h. für alle Knoten  $u, v \in V$ :  $\{u, v\} \in E$  impliziert  $u \in V' \vee v \in V'$ .

Beachte:

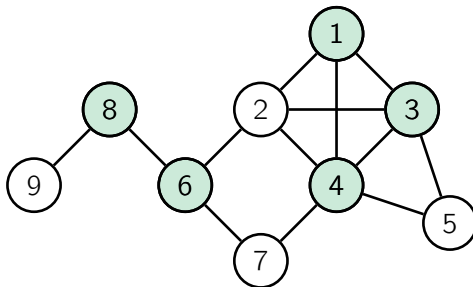
- ▶  $V$  ist immer eine überdeckende Knotenmenge.
- ▶ Man möchte typischerweise eine kleine Menge  $V'$  finden.

# Beispiele für überdeckende Knotenmengen

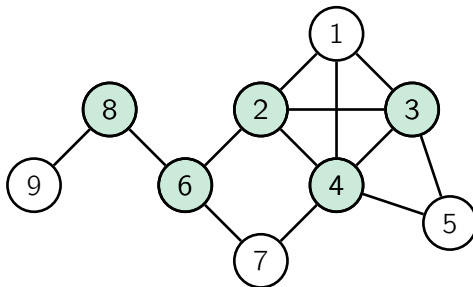




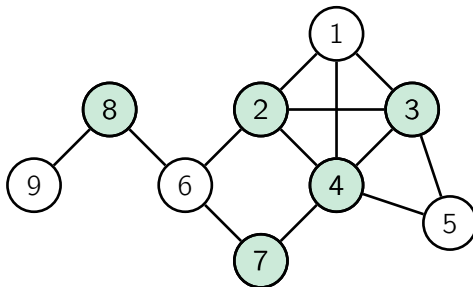
# Beispiele für überdeckende Knotenmengen



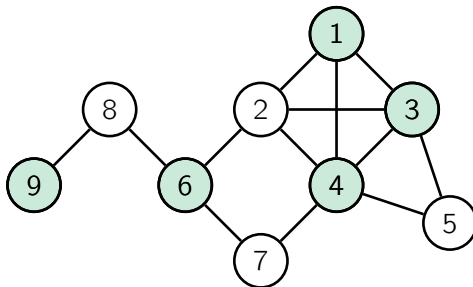
# Beispiele für überdeckende Knotenmengen



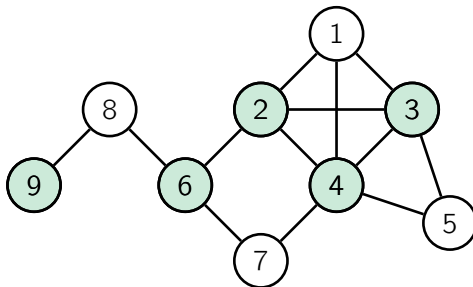
# Beispiele für überdeckende Knotenmengen



# Beispiele für überdeckende Knotenmengen



# Beispiele für überdeckende Knotenmengen



# Überdeckende Knotenmengen vs. unabhängige Knotenmengen

## Lemma

$G = (V, E)$  hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $k$  g.d.w.  
 $G$  hat eine überdeckende Knotenmenge der Größe  $|V| - k$ .

# Überdeckende Knotenmengen vs. unabhängige Knotenmengen

## Lemma

$G = (V, E)$  hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $k$  g.d.w.  
 $G$  hat eine überdeckende Knotenmenge der Größe  $|V| - k$ .

**Beweis** Sei  $V' \subseteq V$ .

# Überdeckende Knotenmengen vs. unabhängige Knotenmengen

## Lemma

$G = (V, E)$  hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $k$  g.d.w.  
 $G$  hat eine überdeckende Knotenmenge der Größe  $|V| - k$ .

**Beweis** Sei  $V' \subseteq V$ .

$V'$  ist eine unabhängige Knotenmenge



# Überdeckende Knotenmengen vs. unabhängige Knotenmengen

## Lemma

$G = (V, E)$  hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $k$  g.d.w.  
 $G$  hat eine überdeckende Knotenmenge der Größe  $|V| - k$ .

**Beweis** Sei  $V' \subseteq V$ .

$V'$  ist eine unabhängige Knotenmenge  
g.d.w.  $\{u, v\} \notin E$  für alle  $u, v \in V'$

# Überdeckende Knotenmengen vs. unabhängige Knotenmengen

## Lemma

$G = (V, E)$  hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $k$  g.d.w.  
 $G$  hat eine überdeckende Knotenmenge der Größe  $|V| - k$ .

**Beweis** Sei  $V' \subseteq V$ .

$V'$  ist eine unabhängige Knotenmenge

g.d.w.  $\{u, v\} \notin E$  für alle  $u, v \in V'$

g.d.w.  $u \notin V' \vee v \notin V'$  für alle  $\{u, v\} \in E$

# Überdeckende Knotenmengen vs. unabhängige Knotenmengen

## Lemma

$G = (V, E)$  hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $k$  g.d.w.  
 $G$  hat eine überdeckende Knotenmenge der Größe  $|V| - k$ .

**Beweis** Sei  $V' \subseteq V$ .

$V'$  ist eine unabhängige Knotenmenge

g.d.w.  $\{u, v\} \notin E$  für alle  $u, v \in V'$

g.d.w.  $u \notin V' \vee v \notin V'$  für alle  $\{u, v\} \in E$

$V \setminus V'$  ist eine überdeckende Knotenmenge

# Überdeckende Knotenmengen vs. unabhängige Knotenmengen

## Lemma

$G = (V, E)$  hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $k$  g.d.w.  
 $G$  hat eine überdeckende Knotenmenge der Größe  $|V| - k$ .

**Beweis** Sei  $V' \subseteq V$ .

$V'$  ist eine unabhängige Knotenmenge

g.d.w.  $\{u, v\} \notin E$  für alle  $u, v \in V'$

g.d.w.  $u \notin V' \vee v \notin V'$  für alle  $\{u, v\} \in E$

$(u \in V \setminus V') \vee (v \in V \setminus V')$  für alle  $\{u, v\} \in E$

g.d.w.  $V \setminus V'$  ist eine überdeckende Knotenmenge

# Überdeckende Knotenmengen vs. unabhängige Knotenmengen

## Lemma

$G = (V, E)$  hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $k$  g.d.w.  
 $G$  hat eine überdeckende Knotenmenge der Größe  $|V| - k$ .

**Beweis** Sei  $V' \subseteq V$ .

$V'$  ist eine unabhängige Knotenmenge

g.d.w.  $\{u, v\} \notin E$  für alle  $u, v \in V'$

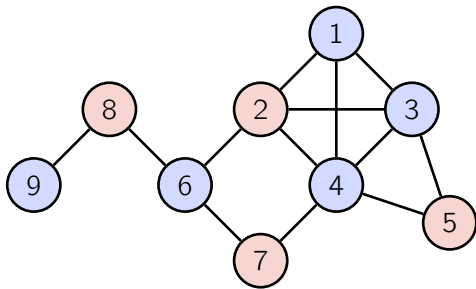
g.d.w.  $u \notin V' \vee v \notin V'$  für alle  $\{u, v\} \in E$

g.d.w.  $(u \in V \setminus V') \vee (v \in V \setminus V')$  für alle  $\{u, v\} \in E$

g.d.w.  $V \setminus V'$  ist eine überdeckende Knotenmenge



# Beispiel



unabhängige Knotenmenge



überdeckende Knotenmenge

# Das VERTEX-COVER-Problem

---

## Definition

Das VERTEX-COVER-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  und eine Zahl  $k \in \mathbb{N}$

gefragt: Besitzt  $G$  eine überdeckende Knotenmenge der Größe höchstens  $k$ ?

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von VERTEX-COVER

---

## **Satz**

VERTEX-COVER ist  $\mathcal{NP}$ -vollständig.



# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von VERTEX-COVER

## Satz

VERTEX-COVER ist  $\mathcal{NP}$ -vollständig.

## Beweis

### 1. VERTEX-COVER $\in \mathcal{NP}$ :

Sei  $G = (V, E)$ .

Rate nichtdeterministisch eine Menge  $V' \subseteq V$  von  $k$  Knoten.

Prüfe deterministisch (in Polynomialzeit), ob für alle  $\{u, v\} \in E$ :  $u \in V' \vee v \in V'$ .

D.h. VERTEX-COVER wird in Polynomialzeit von einer NTM entschieden.

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von VERTEX-COVER

---

**Beweis** (Fortsetzung)

2. VERTEX-COVER ist  $\mathcal{NP}$ -schwer:

Wir zeigen  $\text{INDEPENDENT-SET} \leq_p \text{VERTEX-COVER}$ .

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von VERTEX-COVER

---

**Beweis** (Fortsetzung)

2. VERTEX-COVER ist  $\mathcal{NP}$ -schwer:

Wir zeigen  $\text{INDEPENDENT-SET} \leq_p \text{VERTEX-COVER}$ .

Sei  $f((V, E, m)) = (V, E, |V| - m)$ .

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von VERTEX-COVER

---

**Beweis** (Fortsetzung)

2. VERTEX-COVER ist  $\mathcal{NP}$ -schwer:

Wir zeigen  $\text{INDEPENDENT-SET} \leq_p \text{VERTEX-COVER}$ .

Sei  $f((V, E, m)) = (V, E, |V| - m)$ .

Die Funktion  $f$  ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von VERTEX-COVER

## **Beweis** (Fortsetzung)

### 2. VERTEX-COVER ist $\mathcal{NP}$ -schwer:

Wir zeigen  $\text{INDEPENDENT-SET} \leq_p \text{VERTEX-COVER}$ .

Sei  $f((V, E, m)) = (V, E, |V| - m)$ .

Die Funktion  $f$  ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

Zudem gilt:

$(V, E)$  hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $m$  g.d.w.

$(V, E)$  hat eine überdeckende Knotenmenge der Größe  $|V| - m$ .

# $\mathcal{NP}$ -Vollständigkeit von VERTEX-COVER

## **Beweis** (Fortsetzung)

### 2. VERTEX-COVER ist $\mathcal{NP}$ -schwer:

Wir zeigen  $\text{INDEPENDENT-SET} \leq_p \text{VERTEX-COVER}$ .

Sei  $f((V, E, m)) = (V, E, |V| - m)$ .

Die Funktion  $f$  ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

Zudem gilt:

$(V, E)$  hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $m$  g.d.w.

$(V, E)$  hat eine überdeckende Knotenmenge der Größe  $|V| - m$ .

Daher:  $\text{INDEPENDENT-SET} \leq_p \text{VERTEX-COVER}$ .

Da  $\text{INDEPENDENT-SET}$   $\mathcal{NP}$ -schwer ist, folgt dass  $\text{VERTEX-COVER}$   $\mathcal{NP}$ -schwer ist. □