

## 9c

# Reduktion und der Satz von Rice

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für  
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 11. Februar 2025  
Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel



- ▶ **Reduktion** ist ein Hilfsmittel, um Unentscheidbarkeit nachzuweisen.
- ▶ Statt Unentscheidbarkeit von Sprache  $L$  von Grund auf neu zu beweisen, zeige:  
Wenn man  $L$  entscheiden könnte, dann könnte man auch  $K$  (d.h. das spezielle Halteproblem) entscheiden.
- ▶ Da  $K$  bereits als unentscheidbar gezeigt wurde, folgt  $L$  ist unentscheidbar.
- ▶ Statt  $K$  können wir eine beliebige Sprache nehmen, die bereits als unentscheidbar bewiesen ist.

# Definition von Reduktion

## Definition

Seien  $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$  und  $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$  Sprachen.

Dann sagen wir  $L_1$  ist auf  $L_2$  **reduzierbar** (geschrieben  $L_1 \leq L_2$ ), falls es eine **totale berechenbare** Funktion  $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$  gibt, sodass für alle  $w \in \Sigma_1^*$  gilt:  $w \in L_1$  g.d.w.  $f(w) \in L_2$ .

Die Funktion  $f$  nennt man **Reduktion**.

# Definition von Reduktion

## Definition

Seien  $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$  und  $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$  Sprachen.

Dann sagen wir  $L_1$  ist auf  $L_2$  **reduzierbar** (geschrieben  $L_1 \leq L_2$ ), falls es eine **totale berechenbare** Funktion  $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$  gibt, sodass für alle  $w \in \Sigma_1^*$  gilt:  $w \in L_1$  g.d.w.  $f(w) \in L_2$ .

Die Funktion  $f$  nennt man **Reduktion**.

Eselsbrücke:

$$\underbrace{L_1}_{\text{„kleines“ Problem}} \leq \underbrace{L_2}_{\text{„großes“ Problem}}$$

# Definition von Reduktion

## Definition

Seien  $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$  und  $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$  Sprachen.

Dann sagen wir  $L_1$  ist auf  $L_2$  **reduzierbar** (geschrieben  $L_1 \leq L_2$ ), falls es eine **totale berechenbare** Funktion  $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$  gibt, sodass für alle  $w \in \Sigma_1^*$  gilt:  $w \in L_1$  g.d.w.  $f(w) \in L_2$ .

Die Funktion  $f$  nennt man **Reduktion**.

Eselsbrücke:

$L_1 \leq L_2$   
„kleines“ Problem   „großes“ Problem

►  $\leq$  sagt die Wahrheit.

► „Reduktion“ täuscht.

Man reduziert das „kleine“ Problem auf das „große“.

# Nachweis der (Semi-)Entscheidbarkeit

---

## Satz

Wenn  $L_1 \leq L_2$  und  $L_2$  entscheidbar ist, dann ist auch  $L_1$  entscheidbar.

# Nachweis der (Semi-)Entscheidbarkeit

## Satz

Wenn  $L_1 \leq L_2$  und  $L_2$  entscheidbar ist, dann ist auch  $L_1$  entscheidbar.

**Beweis** Sei  $f$  die  $L_1 \leq L_2$  bezeugende Funktion. Da  $L_2$  entscheidbar ist, ist  $\chi_{L_2}$  berechenbar. Es gilt

$$\chi_{L_1}(w) = 1 \text{ g.d.w. } w \in L_1 \text{ g.d.w. } f(w) \in L_2 \text{ g.d.w. } \chi_{L_2}(f(w)) = 1$$

Damit ist  $\chi_{L_1}(w) = \chi_{L_2}(f(w))$  berechenbar.



# Nachweis der (Semi-)Entscheidbarkeit

## Satz

Wenn  $L_1 \leq L_2$  und  $L_2$  entscheidbar ist, dann ist auch  $L_1$  entscheidbar.

**Beweis** Sei  $f$  die  $L_1 \leq L_2$  bezeugende Funktion. Da  $L_2$  entscheidbar ist, ist  $\chi_{L_2}$  berechenbar. Es gilt

$$\chi_{L_1}(w) = 1 \text{ g.d.w. } w \in L_1 \text{ g.d.w. } f(w) \in L_2 \text{ g.d.w. } \chi_{L_2}(f(w)) = 1$$

Damit ist  $\chi_{L_1}(w) = \chi_{L_2}(f(w))$  berechenbar. □

## Satz

Wenn  $L_1 \leq L_2$  und  $L_2$  semi-entscheidbar ist, dann ist auch  $L_1$  semi-entscheidbar.

# Nachweis der (Semi-)Entscheidbarkeit

## Satz

Wenn  $L_1 \leq L_2$  und  $L_2$  entscheidbar ist, dann ist auch  $L_1$  entscheidbar.

**Beweis** Sei  $f$  die  $L_1 \leq L_2$  bezeugende Funktion. Da  $L_2$  entscheidbar ist, ist  $\chi_{L_2}$  berechenbar. Es gilt

$$\chi_{L_1}(w) = 1 \text{ g.d.w. } w \in L_1 \text{ g.d.w. } f(w) \in L_2 \text{ g.d.w. } \chi_{L_2}(f(w)) = 1$$

Damit ist  $\chi_{L_1}(w) = \chi_{L_2}(f(w))$  berechenbar. □

## Satz

Wenn  $L_1 \leq L_2$  und  $L_2$  semi-entscheidbar ist, dann ist auch  $L_1$  semi-entscheidbar.

**Beweis** Analog. □

# Nachweis der Unentscheidbarkeit

Mit Kontraposition folgt:

## Lemma

Wenn  $L_1 \leq L_2$  und  $L_1$  unentscheidbar ist, dann ist auch  $L_2$  unentscheidbar.

Das ist die Richtung, die wir meistens brauchen:

1.  $L_1$  sei eine bekannt unentscheidbare Sprache (z.B.  $K$ ).
2. Reduziere  $L_1$  auf  $L_2$  durch Angabe einer totalen berechenbaren Funktion  $f$  mit  $w \in L_1$  g.d.w.  $f(w) \in L_2$ .
3. Damit folgt, dass  $L_2$  unentscheidbar ist.

## Definition

Das (allgemeine) Halteproblem ist die Sprache  
 $H := \{w \# x \mid \text{TM } M_w \text{ hält für Eingabe } x\}.$

# Unentscheidbarkeit des Halteproblems

---

## **Satz**

Das allgemeine Halteproblem ist unentscheidbar.

# Unentscheidbarkeit des Halteproblems

## Satz

Das allgemeine Halteproblem ist unentscheidbar.

**Beweis** Wir reduzieren das **spezielle Halteproblem** auf das **allgemeine Halteproblem**, und zeigen daher  $K \leq H$ . Sei  $f(w) = w\#w$ .

# Unentscheidbarkeit des Halteproblems

## Satz

Das allgemeine Halteproblem ist unentscheidbar.

**Beweis** Wir reduzieren das spezielle Halteproblem auf das allgemeine Halteproblem, und zeigen daher  $K \leq H$ . Sei  $f(w) = w\#w$ .

Dann gilt

$$w \in K$$

# Unentscheidbarkeit des Halteproblems

## Satz

Das allgemeine Halteproblem ist unentscheidbar.

**Beweis** Wir reduzieren das spezielle Halteproblem auf das allgemeine Halteproblem, und zeigen daher  $K \leq H$ . Sei  $f(w) = w\#w$ .

Dann gilt

$w \in K$   
g.d.w.  $M_w$  hält für Eingabe  $w$

# Unentscheidbarkeit des Halteproblems

## Satz

Das allgemeine Halteproblem ist unentscheidbar.

**Beweis** Wir reduzieren das **spezielle Halteproblem** auf das **allgemeine Halteproblem**, und zeigen daher  $K \leq H$ . Sei  $f(w) = w\#w$ .

Dann gilt

$w \in K$   
g.d.w.  $M_w$  hält für Eingabe  $w$

$f(w) \in H$

# Unentscheidbarkeit des Halteproblems

## Satz

Das allgemeine Halteproblem ist unentscheidbar.

**Beweis** Wir reduzieren das **spezielle Halteproblem** auf das **allgemeine Halteproblem**, und zeigen daher  $K \leq H$ . Sei  $f(w) = w\#w$ .

Dann gilt

$$w \in K$$

g.d.w.  $M_w$  hält für Eingabe  $w$

$$w\#w \in H$$

g.d.w.  $f(w) \in H$

# Unentscheidbarkeit des Halteproblems

## Satz

Das allgemeine Halteproblem ist unentscheidbar.

**Beweis** Wir reduzieren das **spezielle Halteproblem** auf das **allgemeine Halteproblem**, und zeigen daher  $K \leq H$ . Sei  $f(w) = w\#w$ .

Dann gilt

$$w \in K$$

g.d.w.  $M_w$  hält für Eingabe  $w$

g.d.w.  $w\#w \in H$

g.d.w.  $f(w) \in H$

# Unentscheidbarkeit des Halteproblems

## Satz

Das allgemeine Halteproblem ist unentscheidbar.

**Beweis** Wir reduzieren das **spezielle Halteproblem** auf das **allgemeine Halteproblem**, und zeigen daher  $K \leq H$ . Sei  $f(w) = w\#w$ .

Dann gilt

$w \in K$   
g.d.w.  $M_w$  hält für Eingabe  $w$   
g.d.w.  $w\#w \in H$   
g.d.w.  $f(w) \in H$

$f$  kann durch eine TM berechnet werden. Daher gilt  $K \leq H$ . Da  $K$  unentscheidbar ist, ist  $H$  unentscheidbar.  $\square$

# Halteproblem auf leerem Band

---

## Definition

Das **Halteproblem auf leerem Band** ist die Sprache  
 $H_0 := \{w \mid M_w \text{ hält für die leere Eingabe}\}.$

# Unentscheidbarkeit des Halteproblems auf leerem Band

---

## **Satz**

Das Halteproblem auf leerem Band ist unentscheidbar.

# Unentscheidbarkeit des Halteproblems auf leerem Band

## Satz

Das Halteproblem auf leerem Band ist unentscheidbar.

**Beweis** Wir reduzieren  $H$  auf  $H_0$ : Sei  $f(w_M \# x) = w_{M_x}$ , wobei die DTM  $M_x$  erst  $x$  auf das Band schreibt, sich dann wie  $M$  verhält.

# Unentscheidbarkeit des Halteproblems auf leerem Band

## Satz

Das Halteproblem auf leerem Band ist unentscheidbar.

**Beweis** Wir reduzieren  $H$  auf  $H_0$ : Sei  $f(w_M \# x) = w_{M_x}$ , wobei die DTM  $M_x$  erst  $x$  auf das Band schreibt, sich dann wie  $M$  verhält.

Dann gilt

$$w_M \# x \in H$$

# Unentscheidbarkeit des Halteproblems auf leerem Band

## Satz

Das Halteproblem auf leerem Band ist unentscheidbar.

**Beweis** Wir reduzieren  $H$  auf  $H_0$ : Sei  $f(w_M \# x) = w_{M_x}$ , wobei die DTM  $M_x$  erst  $x$  auf das Band schreibt, sich dann wie  $M$  verhält.

Dann gilt

$w_M \# x \in H$   
g.d.w.  $M$  hält für Eingabe  $x$

# Unentscheidbarkeit des Halteproblems auf leerem Band

## Satz

Das Halteproblem auf leerem Band ist unentscheidbar.

**Beweis** Wir reduzieren  $H$  auf  $H_0$ : Sei  $f(w_M \# x) = w_{M_x}$ , wobei die DTM  $M_x$  erst  $x$  auf das Band schreibt, sich dann wie  $M$  verhält.

Dann gilt

$w_M \# x \in H$   
g.d.w.  $M$  hält für Eingabe  $x$

$f(w_M \# x) \in H_0$

# Unentscheidbarkeit des Halteproblems auf leerem Band

## Satz

Das Halteproblem auf leerem Band ist unentscheidbar.

**Beweis** Wir reduzieren  $H$  auf  $H_0$ : Sei  $f(w_M \# x) = w_{M_x}$ , wobei die DTM  $M_x$  erst  $x$  auf das Band schreibt, sich dann wie  $M$  verhält.

Dann gilt

$w_M \# x \in H$   
g.d.w.  $M$  hält für Eingabe  $x$

$w_{M_x} \in H_0$   
g.d.w.  $f(w_M \# x) \in H_0$

# Unentscheidbarkeit des Halteproblems auf leerem Band

## Satz

Das Halteproblem auf leerem Band ist unentscheidbar.

**Beweis** Wir reduzieren  $H$  auf  $H_0$ : Sei  $f(w_M \# x) = w_{M_x}$ , wobei die DTM  $M_x$  erst  $x$  auf das Band schreibt, sich dann wie  $M$  verhält.

Dann gilt

$$w_M \# x \in H$$

g.d.w.  $M$  hält für Eingabe  $x$

$$M_x \text{ hält für die leere Eingabe}$$

g.d.w.  $w_{M_x} \in H_0$

g.d.w.  $f(w_M \# x) \in H_0$

# Unentscheidbarkeit des Halteproblems auf leerem Band

## Satz

Das Halteproblem auf leerem Band ist unentscheidbar.

**Beweis** Wir reduzieren  $H$  auf  $H_0$ : Sei  $f(w_M \# x) = w_{M_x}$ , wobei die DTM  $M_x$  erst  $x$  auf das Band schreibt, sich dann wie  $M$  verhält.

Dann gilt

$$w_M \# x \in H$$

g.d.w.  $M$  hält für Eingabe  $x$

g.d.w.  $M_x$  hält für die leere Eingabe

g.d.w.  $w_{M_x} \in H_0$

g.d.w.  $f(w_M \# x) \in H_0$

# Unentscheidbarkeit des Halteproblems auf leerem Band

## Satz

Das Halteproblem auf leerem Band ist unentscheidbar.

**Beweis** Wir reduzieren  $H$  auf  $H_0$ : Sei  $f(w_M \# x) = w_{M_x}$ , wobei die DTM  $M_x$  erst  $x$  auf das Band schreibt, sich dann wie  $M$  verhält.

Dann gilt

$$w_M \# x \in H$$

g.d.w.  $M$  hält für Eingabe  $x$

g.d.w.  $M_x$  hält für die leere Eingabe

g.d.w.  $w_{M_x} \in H_0$

g.d.w.  $f(w_M \# x) \in H_0$

$f$  kann durch eine Turingmaschine berechnet werden. Daher gilt  $H \leq H_0$ .

Da  $H$  unentscheidbar ist, ist  $H_0$  unentscheidbar. □

## Satz von Rice

Sei  $\mathcal{R}$  die Klasse aller turingberechenbaren Funktionen. Sei  $\mathcal{S}$  eine beliebige Teilmenge, sodass  $\emptyset \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ . Dann ist folgende Sprache unentscheidbar:

$$C(\mathcal{S}) = \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$$

## Satz von Rice

Sei  $\mathcal{R}$  die Klasse aller turingberechenbaren Funktionen. Sei  $\mathcal{S}$  eine beliebige Teilmenge, sodass  $\emptyset \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ . Dann ist folgende Sprache unentscheidbar:

$$C(\mathcal{S}) = \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$$

Der Satz wurde von Henry Gordon Rice 1953 veröffentlicht. Er zeigt:

- ▶ Fast alle interessanten Eigenschaften von Turingmaschinen sind algorithmisch nicht entscheidbar.
- ▶ Z.B. folgt, dass die Sprache  $L = \{w \mid M_w \text{ berechnet eine konstante Funktion}\}$  nicht entscheidbar ist.

## Satz von Rice

Sei  $\mathcal{R}$  die Klasse aller turingberechenbaren Funktionen. Sei  $\mathcal{S}$  eine beliebige Teilmenge, sodass  $\emptyset \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ . Dann ist folgende Sprache unentscheidbar:

$$C(\mathcal{S}) = \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$$

**Beweis** Sei  $\Omega(x) = \text{undefiniert}$  für alle  $x$ .

## Satz von Rice

Sei  $\mathcal{R}$  die Klasse aller turingberechenbaren Funktionen. Sei  $\mathcal{S}$  eine beliebige Teilmenge, sodass  $\emptyset \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ . Dann ist folgende Sprache unentscheidbar:

$$C(\mathcal{S}) = \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$$

**Beweis** Sei  $\Omega(x) = \text{undefiniert}$  für alle  $x$ .

Zeige:

1.  $H_0 \leq C(\mathcal{S})$  falls  $\Omega \notin \mathcal{S}$ .
2.  $H_0 \leq C(\mathcal{S})$  falls  $\Omega \in \mathcal{S}$ .

## Satz von Rice

Sei  $\mathcal{R}$  die Klasse aller turingberechenbaren Funktionen. Sei  $\mathcal{S}$  eine beliebige Teilmenge, sodass  $\emptyset \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ . Dann ist folgende Sprache unentscheidbar:

$$C(\mathcal{S}) = \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$$

**Beweis** Sei  $\Omega(x) = \text{undefiniert}$  für alle  $x$ .

Zeige:

1.  $H_0 \leq C(\mathcal{S})$  falls  $\Omega \notin \mathcal{S}$ .
2.  $H_0 \leq C(\mathcal{S})$  falls  $\Omega \in \mathcal{S}$ .

Wir beweisen nur Punkt 1, da Punkt 2 analog geht (siehe Skript).

# Der Satz von Rice

---

- Fall  $\Omega \notin \mathcal{S}$ : Da  $\emptyset \in \mathcal{S}$ , gibt es eine Funktion  $q \in \mathcal{S}$ , die von einer DTM  $Q$  berechnet wird.

# Der Satz von Rice

---

- Fall  $\Omega \notin \mathcal{S}$ : Da  $\emptyset \subset \mathcal{S}$ , gibt es eine Funktion  $q \in \mathcal{S}$ , die von einer DTM  $Q$  berechnet wird.

Wir konstruieren eine DTM  $M^*$ . Für DTM  $M$  und Eingabe  $y$ :

1.  $M^*$  simuliert  $M$  auf leerer Eingabe.
2. Wenn  $M$  anhält, dann simuliert  $M^*$  die DTM  $Q$  mit Eingabe  $y$ .

- Fall  $\Omega \notin \mathcal{S}$ : Da  $\emptyset \subset \mathcal{S}$ , gibt es eine Funktion  $q \in \mathcal{S}$ , die von einer DTM  $Q$  berechnet wird.

Wir konstruieren eine DTM  $M^*$ . Für DTM  $M$  und Eingabe  $y$ :

1.  $M^*$  simuliert  $M$  auf leerer Eingabe.
2. Wenn  $M$  anhält, dann simuliert  $M^*$  die DTM  $Q$  mit Eingabe  $y$ .

Sei  $f$  die Funktion, die aus der Beschreibung  $w$  für DTM  $M_w$  die Beschreibung  $f(w)$  von  $M_w^*$  erstellt. Diese Funktion ist total und berechenbar.

# Der Satz von Rice

- Fall  $\Omega \notin \mathcal{S}$ : Da  $\emptyset \subset \mathcal{S}$ , gibt es eine Funktion  $q \in \mathcal{S}$ , die von einer DTM  $Q$  berechnet wird.

Wir konstruieren eine DTM  $M^*$ . Für DTM  $M$  und Eingabe  $y$ :

1.  $M^*$  simuliert  $M$  auf leerer Eingabe.
2. Wenn  $M$  anhält, dann simuliert  $M^*$  die DTM  $Q$  mit Eingabe  $y$ .

Sei  $f$  die Funktion, die aus der Beschreibung  $w$  für DTM  $M_w$  die Beschreibung  $f(w)$  von  $M_w^*$  erstellt. Diese Funktion ist total und berechenbar.

Wir müssen noch zeigen, dass  $w \in H_0$  g.d.w.  $f(w) \in C(\mathcal{S})$ .

# Der Satz von Rice

---

$\Rightarrow$  Dann gilt

$$w \in H_0$$

# Der Satz von Rice

---

$\Rightarrow$  Dann gilt

$w \in H_0 \Rightarrow M_w$  hält auf leerer Eingabe

# Der Satz von Rice

---

$\Rightarrow$  Dann gilt

$$\begin{aligned} w \in H_0 &\Rightarrow M_w \text{ hält auf leerer Eingabe} \\ &\Rightarrow M_w^* \text{ berechnet } q \end{aligned}$$

# Der Satz von Rice

---

⇒ Dann gilt

$w \in H_0 \Rightarrow M_w$  hält auf leerer Eingabe

⇒  $M_w^*$  berechnet  $q$

⇒ die von  $M_w^*$  berechnete Funktion liegt in  $\mathcal{S}$

# Der Satz von Rice

---

⇒ Dann gilt

$w \in H_0 \Rightarrow M_w$  hält auf leerer Eingabe

⇒  $M_w^*$  berechnet  $q$

⇒ die von  $M_w^*$  berechnete Funktion liegt in  $\mathcal{S}$

⇒  $f(w) \in C(\mathcal{S})$

# Der Satz von Rice

$\Rightarrow$  Dann gilt

$w \in H_0 \Rightarrow M_w$  hält auf leerer Eingabe

$\Rightarrow M_w^*$  berechnet  $q$

$\Rightarrow$  die von  $M_w^*$  berechnete Funktion liegt in  $\mathcal{S}$

$\Rightarrow f(w) \in C(\mathcal{S})$

$\Leftarrow$  Statt  $f(w) \in C(\mathcal{S}) \Rightarrow w \in H_0$  beweisen wir die Kontraposition  
 $w \notin H_0 \Rightarrow f(w) \notin C(\mathcal{S})$ .

# Der Satz von Rice

$\Rightarrow$  Dann gilt

$w \in H_0 \Rightarrow M_w$  hält auf leerer Eingabe

$\Rightarrow M_w^*$  berechnet  $q$

$\Rightarrow$  die von  $M_w^*$  berechnete Funktion liegt in  $\mathcal{S}$

$\Rightarrow f(w) \in C(\mathcal{S})$

$\Leftarrow$  Statt  $f(w) \in C(\mathcal{S}) \Rightarrow w \in H_0$  beweisen wir die Kontraposition  
 $w \notin H_0 \Rightarrow f(w) \notin C(\mathcal{S})$ .

$w \notin H_0$

# Der Satz von Rice

$\Rightarrow$  Dann gilt

$w \in H_0 \Rightarrow M_w$  hält auf leerer Eingabe

$\Rightarrow M_w^*$  berechnet  $q$

$\Rightarrow$  die von  $M_w^*$  berechnete Funktion liegt in  $\mathcal{S}$

$\Rightarrow f(w) \in C(\mathcal{S})$

$\Leftarrow$  Statt  $f(w) \in C(\mathcal{S}) \Rightarrow w \in H_0$  beweisen wir die Kontraposition  
 $w \notin H_0 \Rightarrow f(w) \notin C(\mathcal{S})$ .

$w \notin H_0 \Rightarrow M_w$  hält nicht auf leerer Eingabe

# Der Satz von Rice

$\Rightarrow$  Dann gilt

$w \in H_0 \Rightarrow M_w$  hält auf leerer Eingabe

$\Rightarrow M_w^*$  berechnet  $q$

$\Rightarrow$  die von  $M_w^*$  berechnete Funktion liegt in  $\mathcal{S}$

$\Rightarrow f(w) \in C(\mathcal{S})$

$\Leftarrow$  Statt  $f(w) \in C(\mathcal{S}) \Rightarrow w \in H_0$  beweisen wir die Kontraposition  
 $w \notin H_0 \Rightarrow f(w) \notin C(\mathcal{S})$ .

$w \notin H_0 \Rightarrow M_w$  hält nicht auf leerer Eingabe

$\Rightarrow M_w^*$  berechnet  $\Omega$

# Der Satz von Rice

$\Rightarrow$  Dann gilt

$w \in H_0 \Rightarrow M_w$  hält auf leerer Eingabe

$\Rightarrow M_w^*$  berechnet  $q$

$\Rightarrow$  die von  $M_w^*$  berechnete Funktion liegt in  $\mathcal{S}$

$\Rightarrow f(w) \in C(\mathcal{S})$

$\Leftarrow$  Statt  $f(w) \in C(\mathcal{S}) \Rightarrow w \in H_0$  beweisen wir die Kontraposition  
 $w \notin H_0 \Rightarrow f(w) \notin C(\mathcal{S})$ .

$w \notin H_0 \Rightarrow M_w$  hält nicht auf leerer Eingabe

$\Rightarrow M_w^*$  berechnet  $\Omega$

$\Rightarrow$  die von  $M_w^*$  berechnete Funktion liegt nicht in  $\mathcal{S}$

# Der Satz von Rice

$\Rightarrow$  Dann gilt

$w \in H_0 \Rightarrow M_w$  hält auf leerer Eingabe

$\Rightarrow M_w^*$  berechnet  $q$

$\Rightarrow$  die von  $M_w^*$  berechnete Funktion liegt in  $\mathcal{S}$

$\Rightarrow f(w) \in C(\mathcal{S})$

$\Leftarrow$  Statt  $f(w) \in C(\mathcal{S}) \Rightarrow w \in H_0$  beweisen wir die Kontraposition  
 $w \notin H_0 \Rightarrow f(w) \notin C(\mathcal{S})$ .

$w \notin H_0 \Rightarrow M_w$  hält nicht auf leerer Eingabe

$\Rightarrow M_w^*$  berechnet  $\Omega$

$\Rightarrow$  die von  $M_w^*$  berechnete Funktion liegt nicht in  $\mathcal{S}$

$\Rightarrow f(w) \notin C(\mathcal{S})$

# Der Satz von Rice

$\Rightarrow$  Dann gilt

$w \in H_0 \Rightarrow M_w$  hält auf leerer Eingabe

$\Rightarrow M_w^*$  berechnet  $q$

$\Rightarrow$  die von  $M_w^*$  berechnete Funktion liegt in  $\mathcal{S}$

$\Rightarrow f(w) \in C(\mathcal{S})$

$\Leftarrow$  Statt  $f(w) \in C(\mathcal{S}) \Rightarrow w \in H_0$  beweisen wir die Kontraposition  
 $w \notin H_0 \Rightarrow f(w) \notin C(\mathcal{S})$ .

$w \notin H_0 \Rightarrow M_w$  hält nicht auf leerer Eingabe

$\Rightarrow M_w^*$  berechnet  $\Omega$

$\Rightarrow$  die von  $M_w^*$  berechnete Funktion liegt nicht in  $\mathcal{S}$

$\Rightarrow f(w) \notin C(\mathcal{S})$

Daher  $H_0 \leq C(\mathcal{S})$ . Da  $H_0$  unentscheidbar ist, ist damit auch  $C(\mathcal{S})$  unentscheidbar. □

# Anwendung des Satzes von Rice

---

Sei  $L$  eine Sprache, die als unentscheidbar zu beweisen ist.

Schritte:

1. Definiere Menge  $S$  von Funktionen.
2. Zeige Nichttrivialität von  $S$ .
3. Begründe, dass  $S$  richtig gewählt, d.h.  $C(S) = L$ .
4. Der Satz von Rice zeigt dann das Resultat.

# Erstes Beispiel für die Anwendung des Satzes von Rice

## Satz

Es ist unentscheidbar, ob eine Turingmaschine für jede Eingabe  $i \in \mathbb{N}$  die Zahl  $i + 1 \in \mathbb{N}$  berechnet.

**Beweis** Sei  $\text{succ}(i) = i + 1$ . Sei  $\mathcal{S} := \{\text{succ}\}$ .

# Erstes Beispiel für die Anwendung des Satzes von Rice

## Satz

Es ist unentscheidbar, ob eine Turingmaschine für jede Eingabe  $i \in \mathbb{N}$  die Zahl  $i + 1 \in \mathbb{N}$  berechnet.

**Beweis** Sei  $\text{succ}(i) = i + 1$ . Sei  $\mathcal{S} := \{\text{succ}\}$ .

$\mathcal{S}$  ist nicht trivial:

- ▶  $\emptyset \subset \mathcal{S}$ : klar
- ▶  $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ :  $f$  mit  $f(i) = i + 2$  ist berechenbar, aber  $f \notin \mathcal{S}$ .

# Erstes Beispiel für die Anwendung des Satzes von Rice

## Satz

Es ist unentscheidbar, ob eine Turingmaschine für jede Eingabe  $i \in \mathbb{N}$  die Zahl  $i + 1 \in \mathbb{N}$  berechnet.

**Beweis** Sei  $\text{succ}(i) = i + 1$ . Sei  $\mathcal{S} := \{\text{succ}\}$ .

$\mathcal{S}$  ist nicht trivial:

- ▶  $\emptyset \subset \mathcal{S}$ : klar
- ▶  $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ :  $f$  mit  $f(i) = i + 2$  ist berechenbar, aber  $f \notin \mathcal{S}$ .

Mit Satz von Rice:

$$C(\mathcal{S}) = \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion ist } \text{succ}\}$$

ist nicht entscheidbar.



## Zweites Beispiel für die Anwendung des Satzes von Rice

---

### Satz

Es ist unentscheidbar, ob für die Turingmaschine  $M$  gilt, dass  $L(M) = \emptyset$ .

**Beweis** Sei  $\mathcal{S} := \{\Omega\}$ .

## Zweites Beispiel für die Anwendung des Satzes von Rice

### Satz

Es ist unentscheidbar, ob für die Turingmaschine  $M$  gilt, dass  $L(M) = \emptyset$ .

**Beweis** Sei  $\mathcal{S} := \{\Omega\}$ .

$\mathcal{S}$  ist nicht trivial:

- ▶  $\emptyset \subset \mathcal{S}$ : klar
- ▶  $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ :  $f$  mit  $f(x) = x$  ist berechenbar, aber  $f \notin \mathcal{S}$ .

## Zweites Beispiel für die Anwendung des Satzes von Rice

### Satz

Es ist unentscheidbar, ob für die Turingmaschine  $M$  gilt, dass  $L(M) = \emptyset$ .

**Beweis** Sei  $\mathcal{S} := \{\Omega\}$ .

$\mathcal{S}$  ist nicht trivial:

- ▶  $\emptyset \subset \mathcal{S}$ : klar
- ▶  $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ :  $f$  mit  $f(x) = x$  ist berechenbar, aber  $f \notin \mathcal{S}$ .

Mit Satz von Rice:

$$\begin{aligned} C(\mathcal{S}) &= \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\} \\ &= \{w \mid M_w \text{ akzeptiert nie}\} \\ &= \{w \mid L(M_w) = \emptyset\} \end{aligned}$$

ist nicht entscheidbar.



## Drittes Beispiel für die Anwendung des Satzes von Rice

---

### **Satz**

Es ist unentscheidbar, ob für die Turingmaschine  $M$  gilt, dass  $M$  für alle Eingaben hält.

## Drittes Beispiel für die Anwendung des Satzes von Rice

---

### Satz

Es ist unentscheidbar, ob für die Turingmaschine  $M$  gilt, dass  $M$  für alle Eingaben hält.

**Beweis** Sei  $\mathcal{S} := \{f \mid f(x) \text{ ist total und berechenbar}\}$ .

## Drittes Beispiel für die Anwendung des Satzes von Rice

### Satz

Es ist unentscheidbar, ob für die Turingmaschine  $M$  gilt, dass  $M$  für alle Eingaben hält.

**Beweis** Sei  $\mathcal{S} := \{f \mid f(x) \text{ ist total und berechenbar}\}$ .

$\mathcal{S}$  ist nicht trivial:

- ▶  $\emptyset \subset \mathcal{S}$  : Z.B. gilt  $id \in \mathcal{S}$  mit  $id(x) = x$  für alle  $x \in \mathbb{N}$ .
- ▶  $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ :  $f(1) = \text{undefiniert}$  und  $f(x) = 0$  für  $x \neq 1$ , ist berechenbar und  $f \notin \mathcal{S}$ .

## Drittes Beispiel für die Anwendung des Satzes von Rice

### Satz

Es ist unentscheidbar, ob für die Turingmaschine  $M$  gilt, dass  $M$  für alle Eingaben hält.

**Beweis** Sei  $\mathcal{S} := \{f \mid f(x) \text{ ist total und berechenbar}\}$ .

$\mathcal{S}$  ist nicht trivial:

- ▶  $\emptyset \subset \mathcal{S}$  : Z.B. gilt  $id \in \mathcal{S}$  mit  $id(x) = x$  für alle  $x \in \mathbb{N}$ .
- ▶  $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ :  $f(1) = \text{undefiniert}$  und  $f(x) = 0$  für  $x \neq 1$ , ist berechenbar und  $f \notin \mathcal{S}$ .

Mit Satz von Rice:

$$\begin{aligned} C(\mathcal{S}) &= \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\} \\ &= \{w \mid M_w \text{ akzeptiert für jede Eingabe}\} \end{aligned}$$

ist nicht entscheidbar.



# Bemerkungen

---

Der Satz von Rice lässt sich anwenden, auf Eigenschaften von  $L(M)$  bzw. der von  $M$  berechneten Funktion, aber er macht **keine Aussage über Eigenschaften von  $M$** .

# Bemerkungen

Der Satz von Rice lässt sich anwenden, auf Eigenschaften von  $L(M)$  bzw. der von  $M$  berechneten Funktion, aber er macht **keine Aussage über Eigenschaften von  $M$** .

Beispiele:

- Ist es entscheidbar, ob  $M$  höchstens 100 Zustände hat?

☞ Der Satz von Rice ist hier **nicht** anwendbar.

(Das Problem ist sogar entscheidbar.)

# Bemerkungen

Der Satz von Rice lässt sich anwenden, auf Eigenschaften von  $L(M)$  bzw. der von  $M$  berechneten Funktion, aber er macht **keine Aussage über Eigenschaften von  $M$** .

Beispiele:

- ▶ Ist es entscheidbar, ob  $M$  höchstens 100 Zustände hat?  
☞ Der Satz von Rice ist hier **nicht** anwendbar.  
(Das Problem ist sogar entscheidbar.)
- ▶ Ist es entscheidbar, ob  $M$  für jede Eingabe nach 1000 Schritten anhält?  
☞ Der Satz von Rice ist hier **nicht** anwendbar.  
(Das Problem ist sogar entscheidbar.)

# Bemerkungen

Der Satz von Rice lässt sich anwenden, auf Eigenschaften von  $L(M)$  bzw. der von  $M$  berechneten Funktion, aber er macht **keine Aussage über Eigenschaften von  $M$** .

Beispiele:

- ▶ Ist es entscheidbar, ob  $M$  höchstens 100 Zustände hat?  
 Der Satz von Rice ist hier **nicht** anwendbar.  
(Das Problem ist sogar entscheidbar.)
- ▶ Ist es entscheidbar, ob  $M$  für jede Eingabe nach 1000 Schritten anhält?  
 Der Satz von Rice ist hier **nicht** anwendbar.  
(Das Problem ist sogar entscheidbar.)
- ▶ Ist es entscheidbar, ob  $M$  für höchstens 50 verschiedene Eingaben anhält?  
 Der Satz von Rice ist anwendbar, da die Eigenschaft auch etwas über die berechnete Funktion aussagt (sie soll für höchstens 50 Eingaben definiert sein).  
(Das Problem ist dann unentscheidbar.)