

## 7a

**Äquivalenz von kontextfreien Sprachen und  
von Kellerautomaten**

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für  
Theoretische Informatik und TheorembeweisenStand: 11. Februar 2025  
Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel

## Definition

Ein (nichtdeterministischer) Kellerautomat (pushdown automaton, PDA) ist ein 6-Tupel  $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ , wobei:

- ▶  $Z$  ist eine endliche Menge von Zuständen
- ▶  $\Sigma$  ist das (endliche) Eingabealphabet
- ▶  $\Gamma$  ist das (endliche) Kelleralphabet
- ▶  $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}_e(Z \times \Gamma^*)$  ist die Überföhrungsfunktion
- ▶  $z_0 \in Z$  ist der Startzustand
- ▶  $\# \in \Gamma$  ist das Startsymbol im Keller.

# Kontextfreie Sprachen werden von PDAs akzeptiert

## Satz

Für jede kontextfreie Sprache  $L$  gibt es einen PDA  $M$  mit  $L(M) = L$ .

**Beweis** Sei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit  $L(G) = L \setminus \{\epsilon\}$  eine kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform.

# Kontextfreie Sprachen werden von PDAs akzeptiert

## Satz

Für jede kontextfreie Sprache  $L$  gibt es einen PDA  $M$  mit  $L(M) = L$ .

**Beweis** Sei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit  $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$  eine kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform.

Grundgedanke:

- ▶ Wir definieren  $M$ , sodass er eine Linksableitung  $S \Rightarrow^* a_1 \cdots a_n$  simuliert.
- ▶ Da  $G$  in Greibach-Normalform ist, ist eine Linksableitung nach  $i$  Schritten immer von der Form  $S \Rightarrow^i a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_j$ .
- ▶ Beginne Simulation mit Eingabe  $a_1 \cdots a_n$  und  $S$  auf dem Keller.
- ▶ Nach  $i$  Schritten ist  $a_1 \cdots a_i$  verarbeitet und  $B_1 \cdots B_j$  auf dem Keller.
- ▶ Insbesondere ist nach  $n$  Schritten  $a_1 \cdots a_n$  verarbeitet und  $\varepsilon$  auf dem Keller.

# Kontextfreie Sprachen werden von PDAs akzeptiert

**Beweis** (Fortsetzung) Sei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit  $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$  eine kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform.

Sei  $M = (\{z_0\}, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$  ein PDA, sodass

$$\delta(z_0, a, A) := \{(z_0, B_1 \cdots B_n) \mid (A \rightarrow aB_1 \cdots B_n) \in P\}$$

$$\delta(z_0, \varepsilon, A) := \begin{cases} \{(z_0, \varepsilon)\} & \text{falls } \varepsilon \in L \text{ und } A = S \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Im Skript wird  $L(M) = L$  gezeigt.



# Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

---

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform:

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aB, B \rightarrow b \mid aBC, C \rightarrow b\}, S)$$

# Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform:

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aB, B \rightarrow b \mid aBC, C \rightarrow b\}, S)$$

PDA zu  $G$ :  $M = (\{z_0\}, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$  mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a, S) &:= \{(z_0, B)\} & \delta(z_0, b, B) &:= \{(z_0, \varepsilon)\} & \delta(z_0, a, B) &:= \{(z_0, BC)\} \\ \delta(z_0, b, C) &:= \{(z_0, \varepsilon)\} & \delta(z_0, c, A) &:= \emptyset \text{ sonst (für } c \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}) \end{aligned}$$

# Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform:

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aB, B \rightarrow b \mid aBC, C \rightarrow b\}, S)$$

PDA zu  $G$ :  $M = (\{z_0\}, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$  mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a, S) &:= \{(z_0, B)\} & \delta(z_0, b, B) &:= \{(z_0, \varepsilon)\} & \delta(z_0, a, B) &:= \{(z_0, BC)\} \\ \delta(z_0, b, C) &:= \{(z_0, \varepsilon)\} & \delta(z_0, c, A) &:= \emptyset \text{ sonst (für } c \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}) \end{aligned}$$

Eine Konfigurationsfolge von  $M$  für die Eingabe  $aaabbb$  ist

$$(z_0, aaabbb, S)$$



# Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform:

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aB, B \rightarrow b \mid aBC, C \rightarrow b\}, S)$$

PDA zu  $G$ :  $M = (\{z_0\}, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$  mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a, S) &:= \{(z_0, B)\} & \delta(z_0, b, B) &:= \{(z_0, \varepsilon)\} & \delta(z_0, a, B) &:= \{(z_0, BC)\} \\ \delta(z_0, b, C) &:= \{(z_0, \varepsilon)\} & \delta(z_0, c, A) &:= \emptyset \text{ sonst (für } c \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}) \end{aligned}$$

Eine Konfigurationsfolge von  $M$  für die Eingabe  $aaabbb$  ist

$$(z_0, aaabbb, S) \vdash (z_0, aabbb, B)$$

# Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform:

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aB, B \rightarrow b \mid aBC, C \rightarrow b\}, S)$$

PDA zu  $G$ :  $M = (\{z_0\}, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$  mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a, S) &:= \{(z_0, B)\} & \delta(z_0, b, B) &:= \{(z_0, \varepsilon)\} & \delta(z_0, a, B) &:= \{(z_0, BC)\} \\ \delta(z_0, b, C) &:= \{(z_0, \varepsilon)\} & \delta(z_0, c, A) &:= \emptyset \text{ sonst (für } c \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}) \end{aligned}$$

Eine Konfigurationsfolge von  $M$  für die Eingabe  $aaabbb$  ist

$$(z_0, aaabbb, S) \vdash (z_0, aabbb, B) \vdash (z_0, abbb, BC)$$

# Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform:

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aB, B \rightarrow b \mid aBC, C \rightarrow b\}, S)$$

PDA zu  $G$ :  $M = (\{z_0\}, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$  mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a, S) &:= \{(z_0, B)\} & \delta(z_0, b, B) &:= \{(z_0, \varepsilon)\} & \delta(z_0, a, B) &:= \{(z_0, BC)\} \\ \delta(z_0, b, C) &:= \{(z_0, \varepsilon)\} & \delta(z_0, c, A) &:= \emptyset \text{ sonst (für } c \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}) \end{aligned}$$

Eine Konfigurationsfolge von  $M$  für die Eingabe  $aaabbb$  ist

$$\begin{aligned} (z_0, aaabbb, S) &\vdash (z_0, aabbb, B) \vdash (z_0, abbb, BC) \\ &\vdash (z_0, bbb, BCC) \end{aligned}$$

# Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform:

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aB, B \rightarrow b \mid aBC, C \rightarrow b\}, S)$$

PDA zu  $G$ :  $M = (\{z_0\}, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$  mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a, S) &:= \{(z_0, B)\} & \delta(z_0, b, B) &:= \{(z_0, \epsilon)\} & \delta(z_0, a, B) &:= \{(z_0, BC)\} \\ \delta(z_0, b, C) &:= \{(z_0, \epsilon)\} & \delta(z_0, c, A) &:= \emptyset \text{ sonst (für } c \in \Sigma \cup \{\epsilon\}) \end{aligned}$$

Eine Konfigurationsfolge von  $M$  für die Eingabe  $aaabbb$  ist

$$\begin{aligned} (z_0, aaabbb, S) &\vdash (z_0, aabbb, B) \vdash (z_0, abbb, BC) \\ &\vdash (z_0, bbb, BCC) \vdash (z_0, bb, CC) \end{aligned}$$

# Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform:

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aB, B \rightarrow b \mid aBC, \textcolor{red}{C} \rightarrow \textcolor{red}{b}\}, S)$$

PDA zu  $G$ :  $M = (\{z_0\}, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$  mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a, S) &:= \{(z_0, B)\} & \delta(z_0, b, B) &:= \{(z_0, \varepsilon)\} & \delta(z_0, a, B) &:= \{(z_0, BC)\} \\ \delta(z_0, \textcolor{red}{b}, \textcolor{red}{C}) &:= \{(z_0, \textcolor{blue}{\varepsilon})\} & \delta(z_0, c, A) &:= \emptyset \text{ sonst (für } c \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}) \end{aligned}$$

Eine Konfigurationsfolge von  $M$  für die Eingabe  $aaabbb$  ist

$$\begin{aligned} &(z_0, aaabbb, S) \vdash (z_0, aabbb, B) \vdash (z_0, abbb, BC) \\ &\vdash (z_0, bbb, BCC) \vdash (z_0, \textcolor{red}{bb}, \textcolor{red}{CC}) \vdash (z_0, b, C) \end{aligned}$$

# Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform:

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aB, B \rightarrow b \mid aBC, \textcolor{red}{C} \rightarrow \textcolor{red}{b}\}, S)$$

PDA zu  $G$ :  $M = (\{z_0\}, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$  mit

$$\begin{aligned} \delta(z_0, a, S) &:= \{(z_0, B)\} & \delta(z_0, b, B) &:= \{(z_0, \varepsilon)\} & \delta(z_0, a, B) &:= \{(z_0, BC)\} \\ \delta(z_0, \textcolor{red}{b}, \textcolor{red}{C}) &:= \{(z_0, \textcolor{blue}{\varepsilon})\} & \delta(z_0, c, A) &:= \emptyset \text{ sonst (für } c \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}) \end{aligned}$$

Eine Konfigurationsfolge von  $M$  für die Eingabe  $aaabbb$  ist

$$\begin{aligned} &(z_0, aaabbb, S) \vdash (z_0, aabbb, B) \vdash (z_0, abbb, BC) \\ &\vdash (z_0, bbb, BCC) \vdash (z_0, bb, CC) \vdash (z_0, \textcolor{red}{b}, \textcolor{red}{C}) \vdash (z_0, \varepsilon, \varepsilon) \end{aligned}$$

# Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

---

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aB, B \rightarrow b \mid aBC, C \rightarrow b\}, S)$$

Eine Konfigurationsfolge von  $M$  für die Eingabe  $aaabbb$  ist

Die entsprechende Linksableitung von  $G$  ist

# Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aB, B \rightarrow b \mid aBC, C \rightarrow b\}, S)$$

Eine Konfigurationsfolge von  $M$  für die Eingabe  $aaabbb$  ist

$$(z_0, aaabbb, S)$$

Die entsprechende Linksableitung von  $G$  ist

$S$



# Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aB, B \rightarrow b \mid aBC, C \rightarrow b\}, S)$$

Eine Konfigurationsfolge von  $M$  für die Eingabe  $aaabbb$  ist

$$(z_0, aaabbb, S) \vdash (z_0, aabbb, B)$$

Die entsprechende Linksableitung von  $G$  ist

$$S \Rightarrow aB$$

# Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aB, B \rightarrow b \mid aBC, C \rightarrow b\}, S)$$

Eine Konfigurationsfolge von  $M$  für die Eingabe  $aaabbb$  ist

$$(z_0, aaabbb, S) \vdash (z_0, aabbb, B) \vdash (z_0, abbb, BC)$$

Die entsprechende Linksableitung von  $G$  ist

$$S \Rightarrow aB \Rightarrow aaBC$$

# Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aB, B \rightarrow b \mid aBC, C \rightarrow b\}, S)$$

Eine Konfigurationsfolge von  $M$  für die Eingabe  $aaabbb$  ist

$$\begin{aligned} & (z_0, aaabbb, S) \vdash (z_0, aabbb, B) \vdash (z_0, abbb, BC) \\ & \vdash (z_0, bbb, BCC) \end{aligned}$$

Die entsprechende Linksableitung von  $G$  ist

$$S \Rightarrow aB \Rightarrow aaBC \Rightarrow aaBC$$

# Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aB, B \rightarrow b \mid aBC, C \rightarrow b\}, S)$$

Eine Konfigurationsfolge von  $M$  für die Eingabe  $aaabbb$  ist

$$\begin{aligned} & (z_0, aaabbb, S) \vdash (z_0, aabbb, B) \vdash (z_0, abbb, BC) \\ & \vdash (z_0, bbb, BCC) \vdash (z_0, bb, CC) \end{aligned}$$

Die entsprechende Linksableitung von  $G$  ist

$$S \Rightarrow aB \Rightarrow aaBC \Rightarrow aaaBCC \Rightarrow aaabCC$$

# Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aB, B \rightarrow b \mid aBC, C \rightarrow b\}, S)$$

Eine Konfigurationsfolge von  $M$  für die Eingabe  $aaabbb$  ist

$$\begin{aligned} & (z_0, aaabbb, S) \vdash (z_0, aabbb, B) \vdash (z_0, abbb, BC) \\ & \vdash (z_0, bbb, BCC) \vdash (z_0, bb, CC) \vdash (z_0, b, C) \end{aligned}$$

Die entsprechende Linksableitung von  $G$  ist

$$S \Rightarrow aB \Rightarrow aaBC \Rightarrow aaaBCC \Rightarrow aaabCC \Rightarrow aaab bC$$

# Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aB, B \rightarrow b \mid aBC, C \rightarrow b\}, S)$$

Eine Konfigurationsfolge von  $M$  für die Eingabe  $aaabbb$  ist

$$\begin{aligned} & (z_0, aaabbb, S) \vdash (z_0, aabbb, B) \vdash (z_0, abbb, BC) \\ & \vdash (z_0, bbb, BCC) \vdash (z_0, bb, CC) \vdash (z_0, b, C) \vdash (z_0, \varepsilon, \varepsilon) \end{aligned}$$

Die entsprechende Linksableitung von  $G$  ist

$$S \Rightarrow aB \Rightarrow aaBC \Rightarrow aaaBCC \Rightarrow aaabCC \Rightarrow aaabbC \Rightarrow aaabbb$$

# Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

---

## Satz

Sei  $M = (Z, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$  ein PDA. Dann ist  $L(M)$  kontextfrei.

# Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

## Satz

Sei  $M = (Z, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$  ein PDA. Dann ist  $L(M)$  kontextfrei.

**Beweis** Grundgedanke:

- ▶ Nehme o.B.d.A. an, dass  $M$  maximal 2 Kellersymbole erzeugt.
- ▶ Definiere Grammatik mit der sogenannten **Tripelkonstruktion**:
  - ▶ Die Variablen der Grammatik sind Tripel  $\langle z', A, z \rangle$ , die alle Wörter  $w$  erzeugen, die den PDA von  $z'$  mit Kellerinhalt  $A$  und Wort  $w$  zu  $z$  und leeren Keller führen.



# Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

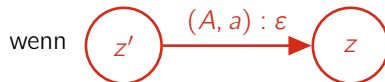
## Satz

Sei  $M = (Z, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$  ein PDA. Dann ist  $L(M)$  kontextfrei.

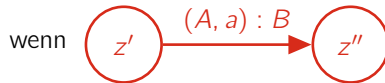
## Beweis (Fortsetzung)

- Die Produktionen sind (für  $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ )

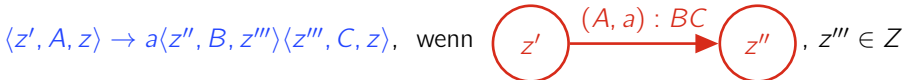
$$\langle z', A, z \rangle \rightarrow a,$$



$$\langle z', A, z \rangle \rightarrow a \langle z'', B, z \rangle,$$



$$\langle z', A, z \rangle \rightarrow a \langle z'', B, z''' \rangle \langle z''', C, z \rangle,$$



# Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

## Satz

Sei  $M = (Z, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$  ein PDA. Dann ist  $L(M)$  kontextfrei.

**Beweis** (Fortsetzung) Nehme o.B.d.A. an, dass  $M$  ein PDA mit  $k \leq 2$  für alle  $(z', B_1 \cdots B_k) \in \delta(z, a, A)$  (und  $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ ) ist.

# Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

## Satz

Sei  $M = (Z, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$  ein PDA. Dann ist  $L(M)$  kontextfrei.

**Beweis** (Fortsetzung) Nehme o.B.d.A. an, dass  $M$  ein PDA mit  $k \leq 2$  für alle  $(z', B_1 \cdots B_k) \in \delta(z, a, A)$  (und  $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ ) ist.

Konstruiere  $G = (V, \Sigma, P, S)$  (mit 2. Sonderregel), wobei  $S$  ein neues Symbol ist und

$$V := \{S\} \cup \{\langle z_i, A, z_j \rangle \mid z_i, z_j \in Z, A \in \Gamma\}$$

$$P := \{S \rightarrow \langle z_0, \#, z \rangle \mid z \in Z\}$$

$$\cup \{\langle z', A, z \rangle \rightarrow a \mid (z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A), a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, A \in \Gamma\}$$

$$\cup \{\langle z', A, z \rangle \rightarrow a \langle z'', B, z \rangle \mid (z'', B) \in \delta(z', a, A), z \in Z, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, A \in \Gamma\}$$

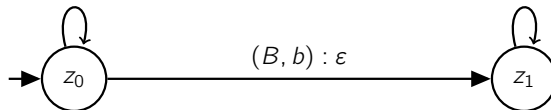
$$\cup \{\langle z', A, z \rangle \rightarrow a \langle z'', B, z''' \rangle \langle z''', C, z \rangle \mid (z'', BC) \in \delta(z', a, A), z, z''' \in Z, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, A \in \Gamma\}$$

# Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA  $M$ :

$(\#, a) : B\#, (\#, \epsilon) : \epsilon, (B, a) : BB$

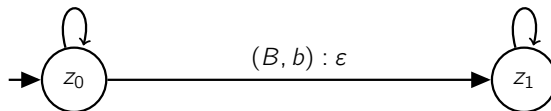
$(B, b) : \epsilon, (\#, \epsilon) : \epsilon$



# Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA  $M$ :

$(\#, a) : B\#, (\#, \epsilon) : \epsilon, (B, a) : BB$   $(B, b) : \epsilon, (\#, \epsilon) : \epsilon$



Grammatik zu  $M$ :  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit

$$V = \{S, \langle z_0, B, z_0 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle, \langle z_1, B, z_0 \rangle, \langle z_1, B, z_1 \rangle, \\ \langle z_0, \#, z_0 \rangle, \langle z_0, \#, z_1 \rangle, \langle z_1, \#, z_0 \rangle, \langle z_1, \#, z_1 \rangle\}$$

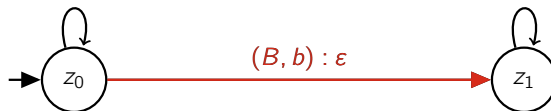
$$P = \{S \rightarrow \langle z_0, \#, z_0 \rangle, S \rightarrow \langle z_0, \#, z_1 \rangle\} \\ \cup \{\langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow b, \langle z_1, B, z_1 \rangle \rightarrow b, \langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow \epsilon, \langle z_1, \#, z_1 \rangle \rightarrow \epsilon\} \\ \cup \{\langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_0 \rangle\langle z_0, \#, z_0 \rangle, \langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_1 \rangle\langle z_1, \#, z_0 \rangle, \\ \langle z_0, \#, z_1 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_0 \rangle\langle z_0, \#, z_1 \rangle, \langle z_0, \#, z_1 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_1 \rangle\langle z_1, \#, z_1 \rangle, \\ \langle z_0, B, z_0 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_0 \rangle\langle z_0, B, z_0 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_0 \rangle\langle z_0, B, z_1 \rangle, \\ \langle z_0, B, z_0 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_1 \rangle\langle z_1, B, z_0 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_1 \rangle\langle z_1, B, z_1 \rangle\}$$

# Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA  $M$ :

$(\#, a) : B\#, (\#, \epsilon) : \epsilon, (B, a) : BB$

$(B, b) : \epsilon, (\#, \epsilon) : \epsilon$



Grammatik zu  $M$ :  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit

$$V = \{S, \langle z_0, B, z_0 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle, \langle z_1, B, z_0 \rangle, \langle z_1, B, z_1 \rangle, \\ \langle z_0, \#, z_0 \rangle, \langle z_0, \#, z_1 \rangle, \langle z_1, \#, z_0 \rangle, \langle z_1, \#, z_1 \rangle\}$$

$$P = \{S \rightarrow \langle z_0, \#, z_0 \rangle, S \rightarrow \langle z_0, \#, z_1 \rangle\}$$

$$\cup \{\langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow b, \langle z_1, B, z_1 \rangle \rightarrow b, \langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow \epsilon, \langle z_1, \#, z_1 \rangle \rightarrow \epsilon\}$$

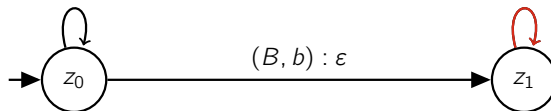
$$\cup \{\langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_0 \rangle\langle z_0, \#, z_0 \rangle, \langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_1 \rangle\langle z_1, \#, z_0 \rangle, \\ \langle z_0, \#, z_1 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_0 \rangle\langle z_0, \#, z_1 \rangle, \langle z_0, \#, z_1 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_1 \rangle\langle z_1, \#, z_1 \rangle, \\ \langle z_0, B, z_0 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_0 \rangle\langle z_0, B, z_0 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_0 \rangle\langle z_0, B, z_1 \rangle, \\ \langle z_0, B, z_0 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_1 \rangle\langle z_1, B, z_0 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_1 \rangle\langle z_1, B, z_1 \rangle\}$$

# Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA  $M$ :

$(\#, a) : B\#, (\#, \epsilon) : \epsilon, (B, a) : BB$

$(B, b) : \epsilon, (\#, \epsilon) : \epsilon$



Grammatik zu  $M$ :  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit

$$V = \{S, \langle z_0, B, z_0 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle, \langle z_1, B, z_0 \rangle, \langle z_1, B, z_1 \rangle, \\ \langle z_0, \#, z_0 \rangle, \langle z_0, \#, z_1 \rangle, \langle z_1, \#, z_0 \rangle, \langle z_1, \#, z_1 \rangle\}$$

$$P = \{S \rightarrow \langle z_0, \#, z_0 \rangle, S \rightarrow \langle z_0, \#, z_1 \rangle\}$$

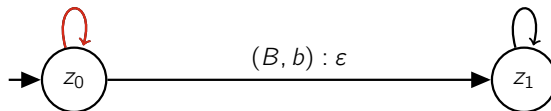
$$\cup \{\langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow b, \langle z_1, B, z_1 \rangle \rightarrow b, \langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow \epsilon, \langle z_1, \#, z_1 \rangle \rightarrow \epsilon\}$$

$$\cup \{\langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_0 \rangle \langle z_0, \#, z_0 \rangle, \langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, \#, z_0 \rangle, \\ \langle z_0, \#, z_1 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_0 \rangle \langle z_0, \#, z_1 \rangle, \langle z_0, \#, z_1 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, \#, z_1 \rangle, \\ \langle z_0, B, z_0 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_0 \rangle \langle z_0, B, z_0 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_0 \rangle \langle z_0, B, z_1 \rangle, \\ \langle z_0, B, z_0 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, B, z_0 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, B, z_1 \rangle\}$$

# Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA  $M$ :

$(\#, a) : B\#, (\#, \epsilon) : \epsilon, (B, a) : BB$   $(B, b) : \epsilon, (\#, \epsilon) : \epsilon$



Grammatik zu  $M$ :  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit

$$V = \{S, \langle z_0, B, z_0 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle, \langle z_1, B, z_0 \rangle, \langle z_1, B, z_1 \rangle, \\ \langle z_0, \#, z_0 \rangle, \langle z_0, \#, z_1 \rangle, \langle z_1, \#, z_0 \rangle, \langle z_1, \#, z_1 \rangle\}$$

$$P = \{S \rightarrow \langle z_0, \#, z_0 \rangle, S \rightarrow \langle z_0, \#, z_1 \rangle\} \\ \cup \{\langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow b, \langle z_1, B, z_1 \rangle \rightarrow b, \langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow \epsilon, \langle z_1, \#, z_1 \rangle \rightarrow \epsilon\} \\ \cup \{\langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_0 \rangle\langle z_0, \#, z_0 \rangle, \langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_1 \rangle\langle z_1, \#, z_0 \rangle, \\ \langle z_0, \#, z_1 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_0 \rangle\langle z_0, \#, z_1 \rangle, \langle z_0, \#, z_1 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_1 \rangle\langle z_1, \#, z_1 \rangle, \\ \langle z_0, B, z_0 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_0 \rangle\langle z_0, B, z_0 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_0 \rangle\langle z_0, B, z_1 \rangle, \\ \langle z_0, B, z_0 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_1 \rangle\langle z_1, B, z_0 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_1 \rangle\langle z_1, B, z_1 \rangle\}$$

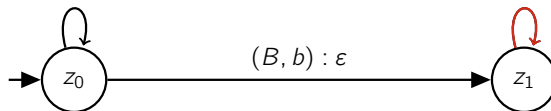


# Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA  $M$ :

$(\#, a) : B\#, (\#, \epsilon) : \epsilon, (B, a) : BB$

$(B, b) : \epsilon, (\#, \epsilon) : \epsilon$



Grammatik zu  $M$ :  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit

$$V = \{S, \langle z_0, B, z_0 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle, \langle z_1, B, z_0 \rangle, \langle z_1, B, z_1 \rangle, \\ \langle z_0, \#, z_0 \rangle, \langle z_0, \#, z_1 \rangle, \langle z_1, \#, z_0 \rangle, \langle z_1, \#, z_1 \rangle\}$$

$$P = \{S \rightarrow \langle z_0, \#, z_0 \rangle, S \rightarrow \langle z_0, \#, z_1 \rangle\}$$

$$\cup \{\langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow b, \langle z_1, B, z_1 \rangle \rightarrow b, \langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow \epsilon, \langle z_1, \#, z_1 \rangle \rightarrow \epsilon\}$$

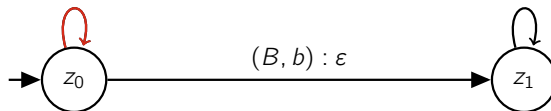
$$\cup \{\langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_0 \rangle \langle z_0, \#, z_0 \rangle, \langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, \#, z_0 \rangle, \\ \langle z_0, \#, z_1 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_0 \rangle \langle z_0, \#, z_1 \rangle, \langle z_0, \#, z_1 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, \#, z_1 \rangle, \\ \langle z_0, B, z_0 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_0 \rangle \langle z_0, B, z_0 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_0 \rangle \langle z_0, B, z_1 \rangle, \\ \langle z_0, B, z_0 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, B, z_0 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, B, z_1 \rangle\}$$

# Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA  $M$ :

$(\#, a) : B\#, (\#, \epsilon) : \epsilon, (B, a) : BB$

$(B, b) : \epsilon, (\#, \epsilon) : \epsilon$



Grammatik zu  $M$ :  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit

$$V = \{S, \langle z_0, B, z_0 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle, \langle z_1, B, z_0 \rangle, \langle z_1, B, z_1 \rangle, \\ \langle z_0, \#, z_0 \rangle, \langle z_0, \#, z_1 \rangle, \langle z_1, \#, z_0 \rangle, \langle z_1, \#, z_1 \rangle\}$$

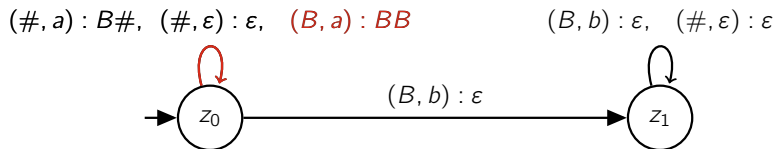
$$P = \{S \rightarrow \langle z_0, \#, z_0 \rangle, S \rightarrow \langle z_0, \#, z_1 \rangle\}$$

$$\cup \{\langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow b, \langle z_1, B, z_1 \rangle \rightarrow b, \langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow \epsilon, \langle z_1, \#, z_1 \rangle \rightarrow \epsilon\}$$

$$\cup \{\langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_0 \rangle \langle z_0, \#, z_0 \rangle, \langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, \#, z_0 \rangle, \\ \langle z_0, \#, z_1 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_0 \rangle \langle z_0, \#, z_1 \rangle, \langle z_0, \#, z_1 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, \#, z_1 \rangle, \\ \langle z_0, B, z_0 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_0 \rangle \langle z_0, B, z_0 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_0 \rangle \langle z_0, B, z_1 \rangle, \\ \langle z_0, B, z_0 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, B, z_0 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow a \langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, B, z_1 \rangle\}$$

# Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA  $M$ :



Grammatik zu  $M$ :  $G = (V, \Sigma, P, S)$  mit

$$V = \{S, \langle z_0, B, z_0 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle, \langle z_1, B, z_0 \rangle, \langle z_1, B, z_1 \rangle, \\ \langle z_0, \#, z_0 \rangle, \langle z_0, \#, z_1 \rangle, \langle z_1, \#, z_0 \rangle, \langle z_1, \#, z_1 \rangle\}$$

$$P = \{S \rightarrow \langle z_0, \#, z_0 \rangle, S \rightarrow \langle z_0, \#, z_1 \rangle\} \\ \cup \{\langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow b, \langle z_1, B, z_1 \rangle \rightarrow b, \langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow \epsilon, \langle z_1, \#, z_1 \rangle \rightarrow \epsilon\} \\ \cup \{\langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_0 \rangle\langle z_0, \#, z_0 \rangle, \langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_1 \rangle\langle z_1, \#, z_0 \rangle, \\ \langle z_0, \#, z_1 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_0 \rangle\langle z_0, \#, z_1 \rangle, \langle z_0, \#, z_1 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_1 \rangle\langle z_1, \#, z_1 \rangle, \\ \langle z_0, B, z_0 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_0 \rangle\langle z_0, B, z_0 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_0 \rangle\langle z_0, B, z_1 \rangle, \\ \langle z_0, B, z_0 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_1 \rangle\langle z_1, B, z_0 \rangle, \langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_1 \rangle\langle z_1, B, z_1 \rangle\}$$

## Beispiel für die Tripelkonstruktion

Diese Grammatik kann man noch vereinfachen, indem man untersucht, welche Produktionen nie in einer erfolgreichen Ableitung verwendet werden können.

Das Ergebnis ist  $G' = (V', \Sigma, P', S)$ , wobei

$$V' = \{S, \langle z_0, B, z_1 \rangle, \langle z_1, B, z_1 \rangle, \langle z_0, \#, z_0 \rangle, \langle z_0, \#, z_1 \rangle, \langle z_1, \#, z_1 \rangle\}$$

$$P' = \{S \rightarrow \langle z_0, \#, z_0 \rangle, \\ S \rightarrow \langle z_0, \#, z_1 \rangle\}$$

$$\cup \{\langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow b, \\ \langle z_1, B, z_1 \rangle \rightarrow b, \\ \langle z_0, \#, z_0 \rangle \rightarrow \varepsilon, \\ \langle z_1, \#, z_1 \rangle \rightarrow \varepsilon\}$$

$$\cup \{\langle z_0, \#, z_1 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_1 \rangle\langle z_1, \#, z_1 \rangle, \\ \langle z_0, B, z_1 \rangle \rightarrow a\langle z_0, B, z_1 \rangle\langle z_1, B, z_1 \rangle\}$$

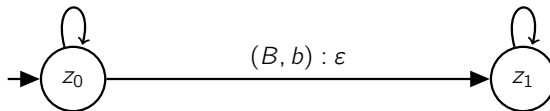
Diese Grammatik kann man noch weiter vereinfachen (siehe Skript).

# Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA  $M$ :

$(\#, a) : B\#, (\#, \varepsilon) : \varepsilon, (B, a) : BB$

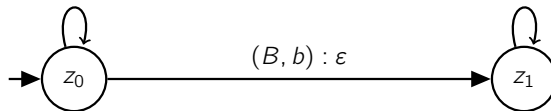
$(B, b) : \varepsilon, (\#, \varepsilon) : \varepsilon$



# Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA  $M$ :

$(\#, a) : B\#, (\#, \varepsilon) : \varepsilon, (B, a) : BB$   $(B, b) : \varepsilon, (\#, \varepsilon) : \varepsilon$



Eine Konfigurationsfolge von  $M$  für die Eingabe  $aabb$  ist

$(z_0, aabb, \#)$

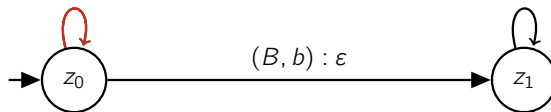
Eine entsprechende Linksableitung von  $G$  ist

$S \Rightarrow \langle z_0, \#, z_1 \rangle$

# Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA  $M$ :

$(\#, a) : B\#, (\#, \epsilon) : \epsilon, (B, a) : BB$   $(B, b) : \epsilon, (\#, \epsilon) : \epsilon$



Eine Konfigurationsfolge von  $M$  für die Eingabe  $aabb$  ist

$$(z_0, aabb, \#) \vdash (z_0, abb, B\#)$$

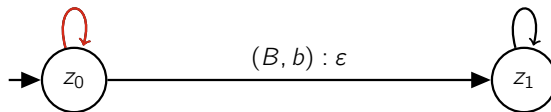
Eine entsprechende Linksableitung von  $G$  ist

$$S \Rightarrow \langle z_0, \#, z_1 \rangle \Rightarrow a \langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, \#, z_1 \rangle$$

# Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA  $M$ :

$(\#, a) : B\#, (\#, \varepsilon) : \varepsilon, (B, a) : BB$   $(B, b) : \varepsilon, (\#, \varepsilon) : \varepsilon$



Eine Konfigurationsfolge von  $M$  für die Eingabe  $aabb$  ist

$(z_0, aabb, \#) \vdash (z_0, abb, B\#) \vdash (z_0, bb, BB\#)$

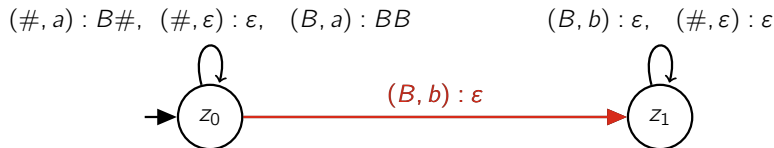
Eine entsprechende Linksableitung von  $G$  ist

$S \Rightarrow \langle z_0, \#, z_1 \rangle \Rightarrow a\langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, \#, z_1 \rangle \Rightarrow aa\langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, B, z_1 \rangle \langle z_1, \#, z_1 \rangle$



# Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA  $M$ :



Eine Konfigurationsfolge von  $M$  für die Eingabe  $aabb$  ist

$$(z_0, aabb, \#) \vdash (z_0, abb, B\#) \vdash (z_0, \textcolor{red}{bb}, \textcolor{red}{B}B\#) \vdash (z_1, b, B\#)$$

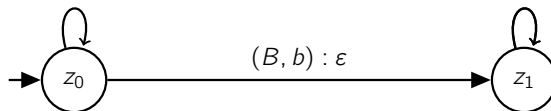
Eine entsprechende Linksableitung von  $G$  ist

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \langle z_0, \#, z_1 \rangle \Rightarrow a \langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, \#, z_1 \rangle \Rightarrow aa \langle \textcolor{red}{z_0}, \textcolor{red}{B}, \textcolor{red}{z_1} \rangle \langle z_1, B, z_1 \rangle \langle z_1, \#, z_1 \rangle \\ &\Rightarrow aab \langle z_1, B, z_1 \rangle \langle z_1, \#, z_1 \rangle \end{aligned}$$

# Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA  $M$ :

$(\#, a) : B\#, (\#, \varepsilon) : \varepsilon, (B, a) : BB$   $(B, b) : \varepsilon, (\#, \varepsilon) : \varepsilon$



Eine Konfigurationsfolge von  $M$  für die Eingabe  $aabb$  ist

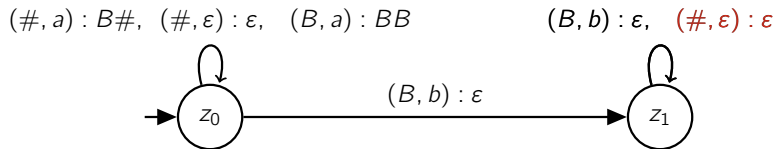
$(z_0, aabb, \#) \vdash (z_0, abb, B\#) \vdash (z_0, bb, BB\#) \vdash (z_1, \textcolor{red}{b}, \textcolor{red}{B}\#) \vdash (z_1, \varepsilon, \#)$

Eine entsprechende Linksableitung von  $G$  ist

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \langle z_0, \#, z_1 \rangle \Rightarrow a \langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, \#, z_1 \rangle \Rightarrow aa \langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, B, z_1 \rangle \langle z_1, \#, z_1 \rangle \\ &\Rightarrow aab \langle \textcolor{red}{z}_1, \textcolor{red}{B}, \textcolor{red}{z}_1 \rangle \langle z_1, \#, z_1 \rangle \Rightarrow aab \textcolor{blue}{b} \langle z_1, \#, z_1 \rangle \end{aligned}$$

# Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA  $M$ :



Eine Konfigurationsfolge von  $M$  für die Eingabe  $aabb$  ist

$$(z_0, aabb, \#) \vdash (z_0, abb, B\#) \vdash (z_0, bb, BB\#) \vdash (z_1, b, B\#) \vdash (z_1, \varepsilon, \#) \vdash (z_1, \varepsilon, \varepsilon)$$

Eine entsprechende Linksableitung von  $G$  ist

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \langle z_0, \#, z_1 \rangle \Rightarrow a \langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, \#, z_1 \rangle \Rightarrow aa \langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, B, z_1 \rangle \langle z_1, \#, z_1 \rangle \\ &\Rightarrow aab \langle z_1, B, z_1 \rangle \langle z_1, \#, z_1 \rangle \Rightarrow aabb \langle z_1, \#, z_1 \rangle \Rightarrow aabb \end{aligned}$$

# Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

---

**Beweis** (Fortsetzung) Wir zeigen die Verallgemeinerung:

$\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^* w$  g.d.w.  $(z', w, A) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$ .

# Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

**Beweis** (Fortsetzung) Wir zeigen die Verallgemeinerung:

$\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^* w$  g.d.w.  $(z', w, A) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$ .

Da  $S \rightarrow \langle z_0, \#, z \rangle \in P$  folgt:  $w \in L(G)$  g.d.w.  $w \in L(M)$ , d.h.  $L(G) = L(M)$ .

$\Rightarrow$  Sei  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^i w$  eine Linksableitung. Wir verwenden Induktion über  $i$ .

# Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

**Beweis** (Fortsetzung) Wir zeigen die Verallgemeinerung:

$\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^* w$  g.d.w.  $(z', w, A) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$ .

Da  $S \rightarrow \langle z_0, \#, z \rangle \in P$  folgt:  $w \in L(G)$  g.d.w.  $w \in L(M)$ , d.h.  $L(G) = L(M)$ .

$\Rightarrow$  Sei  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^i w$  eine Linksableitung. Wir verwenden Induktion über  $i$ .

► Fall  $i = 0$ : Unmöglich.

# Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

**Beweis** (Fortsetzung) Wir zeigen die Verallgemeinerung:

$\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^* w$  g.d.w.  $(z', w, A) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$ .

Da  $S \rightarrow \langle z_0, \#, z \rangle \in P$  folgt:  $w \in L(G)$  g.d.w.  $w \in L(M)$ , d.h.  $L(G) = L(M)$ .

$\Rightarrow$  Sei  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^i w$  eine Linksableitung. Wir verwenden Induktion über  $i$ .

► Fall  $i = 0$ : Unmöglich.

► Fall  $i = 1$ : Sei  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G w$ . Die verwendete Produktion muss  $\langle z', A, z \rangle \rightarrow a$  sein. Dann muss  $(z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A)$  gelten und damit gilt:  $(z', a, A) \vdash (z, \varepsilon, \varepsilon)$ .

# Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

**Beweis** (Fortsetzung) Wir zeigen die Verallgemeinerung:

$\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^* w$  g.d.w.  $(z', w, A) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$ .

Da  $S \rightarrow \langle z_0, \#, z \rangle \in P$  folgt:  $w \in L(G)$  g.d.w.  $w \in L(M)$ , d.h.  $L(G) = L(M)$ .

$\Rightarrow$  Sei  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^i w$  eine Linksableitung. Wir verwenden Induktion über  $i$ .

- ▶ Fall  $i = 0$ : Unmöglich.
- ▶ Fall  $i = 1$ : Sei  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G w$ . Die verwendete Produktion muss  $\langle z', A, z \rangle \rightarrow a$  sein. Dann muss  $(z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A)$  gelten und damit gilt:  $(z', a, A) \vdash (z, \varepsilon, \varepsilon)$ .
- ▶ Fall  $i > 1$ : Sei  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G u \Rightarrow_G^{i-1} w$  mit  $i - 1 > 0$ .



# Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

**Beweis** (Fortsetzung) Wir zeigen die Verallgemeinerung:

$\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^* w$  g.d.w.  $(z', w, A) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$ .

Da  $S \rightarrow \langle z_0, \#, z \rangle \in P$  folgt:  $w \in L(G)$  g.d.w.  $w \in L(M)$ , d.h.  $L(G) = L(M)$ .

$\Rightarrow$  Sei  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^i w$  eine Linksableitung. Wir verwenden Induktion über  $i$ .

- ▶ Fall  $i = 0$ : Unmöglich.
- ▶ Fall  $i = 1$ : Sei  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G w$ . Die verwendete Produktion muss  $\langle z', A, z \rangle \rightarrow a$  sein. Dann muss  $(z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A)$  gelten und damit gilt:  $(z', a, A) \vdash (z, \varepsilon, \varepsilon)$ .
- ▶ Fall  $i > 1$ : Sei  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G u \Rightarrow_G^{i-1} w$  mit  $i - 1 > 0$ .
  - ▶ Wenn  $u = a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ , dann kann  $i - 1 > 0$  nicht gelten.

# Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

**Beweis** (Fortsetzung) Wir zeigen die Verallgemeinerung:

$\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^* w$  g.d.w.  $(z', w, A) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$ .

Da  $S \rightarrow \langle z_0, \#, z \rangle \in P$  folgt:  $w \in L(G)$  g.d.w.  $w \in L(M)$ , d.h.  $L(G) = L(M)$ .

$\Rightarrow$  Sei  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^i w$  eine Linksableitung. Wir verwenden Induktion über  $i$ .

- ▶ Fall  $i = 0$ : Unmöglich.
- ▶ Fall  $i = 1$ : Sei  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G w$ . Die verwendete Produktion muss  $\langle z', A, z \rangle \rightarrow a$  sein. Dann muss  $(z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A)$  gelten und damit gilt:  $(z', a, A) \vdash (z, \varepsilon, \varepsilon)$ .
- ▶ Fall  $i > 1$ : Sei  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G u \Rightarrow_G^{i-1} w$  mit  $i - 1 > 0$ .
  - ▶ Wenn  $u = a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ , dann kann  $i - 1 > 0$  nicht gelten.
  - ▶ Wenn  $u = a\langle z'', B, z \rangle$ , dann  $(z'', B) \in \delta(z', a, A)$  und  $u = a\langle z'', B, z \rangle \Rightarrow^{i-1} aw' = w$ .

# Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

**Beweis** (Fortsetzung) Wir zeigen die Verallgemeinerung:

$\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^* w$  g.d.w.  $(z', w, A) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$ .

Da  $S \rightarrow \langle z_0, \#, z \rangle \in P$  folgt:  $w \in L(G)$  g.d.w.  $w \in L(M)$ , d.h.  $L(G) = L(M)$ .

$\Rightarrow$  Sei  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^i w$  eine Linksableitung. Wir verwenden Induktion über  $i$ .

- ▶ Fall  $i = 0$ : Unmöglich.
- ▶ Fall  $i = 1$ : Sei  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G w$ . Die verwendete Produktion muss  $\langle z', A, z \rangle \rightarrow a$  sein. Dann muss  $(z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A)$  gelten und damit gilt:  $(z', a, A) \vdash (z, \varepsilon, \varepsilon)$ .
- ▶ Fall  $i > 1$ : Sei  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G u \Rightarrow_G^{i-1} w$  mit  $i - 1 > 0$ .
  - ▶ Wenn  $u = a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ , dann kann  $i - 1 > 0$  nicht gelten.
  - ▶ Wenn  $u = a\langle z'', B, z \rangle$ , dann  $(z'', B) \in \delta(z', a, A)$  und  $u = a\langle z'', B, z \rangle \Rightarrow^{i-1} aw' = w$ .

Dann gilt  $\langle z'', B, z \rangle \Rightarrow^{i-1} w'$  und die Induktionshypothese liefert

$(z'', w', B) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$ . Mit  $(z'', B) \in \delta(z', a, A)$  zeigt dies

$(z', \underbrace{aw'}_w, A) \vdash_M (z'', w', B) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$ .

# Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

**Beweis** (Fortsetzung) Wir zeigen die Verallgemeinerung:

$\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^* w$  g.d.w.  $(z', w, A) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$ .

Da  $S \rightarrow \langle z_0, \#, z \rangle \in P$  folgt:  $w \in L(G)$  g.d.w.  $w \in L(M)$ , d.h.  $L(G) = L(M)$ .

$\Rightarrow$  Sei  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^i w$  eine Linksableitung. Wir verwenden Induktion über  $i$ .

- ▶ Fall  $i = 0$ : Unmöglich.
- ▶ Fall  $i = 1$ : Sei  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G w$ . Die verwendete Produktion muss  $\langle z', A, z \rangle \rightarrow a$  sein. Dann muss  $(z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A)$  gelten und damit gilt:  $(z', a, A) \vdash (z, \varepsilon, \varepsilon)$ .
- ▶ Fall  $i > 1$ : Sei  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G u \Rightarrow_G^{i-1} w$  mit  $i - 1 > 0$ .
  - ▶ Wenn  $u = a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ , dann kann  $i - 1 > 0$  nicht gelten.
  - ▶ Wenn  $u = a\langle z'', B, z \rangle$ , dann  $(z'', B) \in \delta(z', a, A)$  und  $u = a\langle z'', B, z \rangle \Rightarrow^{i-1} aw' = w$ .  
Dann gilt  $\langle z'', B, z \rangle \Rightarrow^{i-1} w'$  und die Induktionshypothese liefert  $(z'', w', B) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$ . Mit  $(z'', B) \in \delta(z', a, A)$  zeigt dies  $(z', \underbrace{aw'}_w, A) \vdash_M (z'', w', B) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$ .
- ▶ Der Fall  $u = a\langle z'', B, z''' \rangle \langle z''', C, z \rangle$  ist komplizierter aber ähnlich (siehe Skript).

# Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

---

$\Leftarrow$  Sei  $(z', w, A) \vdash_M^i (z, \varepsilon, \varepsilon)$ . Wir zeigen  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^* w$  mit Induktion über  $i$ .

# Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

---

- ← Sei  $(z', w, A) \vdash_M^i (z, \varepsilon, \varepsilon)$ . Wir zeigen  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^* w$  mit Induktion über  $i$ .
- Fall  $i = 0$ : Unmöglich.

# Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

- ← Sei  $(z', w, A) \vdash_M^i (z, \varepsilon, \varepsilon)$ . Wir zeigen  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^* w$  mit Induktion über  $i$ .
- ▶ Fall  $i = 0$ : Unmöglich.
  - ▶ Fall  $i = 1$ : Dann gilt  $w = a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$  und  $(z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A)$ .  
Damit gibt es  $\langle z', A, z \rangle \rightarrow a \in P$  und daher  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G a$ .

# Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

- ← Sei  $(z', w, A) \vdash_M^i (z, \varepsilon, \varepsilon)$ . Wir zeigen  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^* w$  mit Induktion über  $i$ .
- ▶ Fall  $i = 0$ : Unmöglich.
  - ▶ Fall  $i = 1$ : Dann gilt  $w = a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$  und  $(z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A)$ .  
Damit gibt es  $\langle z', A, z \rangle \rightarrow a \in P$  und daher  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G a$ .
  - ▶ Fall  $i > 1$ : Dann  $w = aw'$ ,  $(z', aw', A) \vdash (z'', w', W) \vdash_M^{i-1} (z, \varepsilon, \varepsilon)$  für  $i - 1 > 0$ ,  
 $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$  und  $W = \varepsilon$ ,  $W = B$  oder  $W = BC$ .



# Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

$\Leftarrow$  Sei  $(z', w, A) \vdash_M^i (z, \varepsilon, \varepsilon)$ . Wir zeigen  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^* w$  mit Induktion über  $i$ .

- ▶ Fall  $i = 0$ : Unmöglich.
- ▶ Fall  $i = 1$ : Dann gilt  $w = a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$  und  $(z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A)$ .  
Damit gibt es  $\langle z', A, z \rangle \rightarrow a \in P$  und daher  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G a$ .
- ▶ Fall  $i > 1$ : Dann  $w = aw'$ ,  $(z', aw', A) \vdash (z'', w', W) \vdash_M^{i-1} (z, \varepsilon, \varepsilon)$  für  $i - 1 > 0$ ,  
 $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$  und  $W = \varepsilon$ ,  $W = B$  oder  $W = BC$ .

Wir betrachten alle drei Fälle für  $W$  einzeln:

- ▶ Fall  $W = \varepsilon$ : Dieser Fall ist nicht möglich, da  $i - 1 > 0$  nicht gelten kann.

# Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

$\Leftarrow$  Sei  $(z', w, A) \vdash_M^i (z, \varepsilon, \varepsilon)$ . Wir zeigen  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^* w$  mit Induktion über  $i$ .

- ▶ Fall  $i = 0$ : Unmöglich.
- ▶ Fall  $i = 1$ : Dann gilt  $w = a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$  und  $(z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A)$ .  
Damit gibt es  $\langle z', A, z \rangle \rightarrow a \in P$  und daher  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G a$ .
- ▶ Fall  $i > 1$ : Dann  $w = aw'$ ,  $(z', aw', A) \vdash (z'', w', W) \vdash_M^{i-1} (z, \varepsilon, \varepsilon)$  für  $i - 1 > 0$ ,  
 $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$  und  $W = \varepsilon$ ,  $W = B$  oder  $W = BC$ .

Wir betrachten alle drei Fälle für  $W$  einzeln:

- ▶ Fall  $W = \varepsilon$ : Dieser Fall ist nicht möglich, da  $i - 1 > 0$  nicht gelten kann.
- ▶ Fall  $W = B$ : Dann ist  $\langle z', A, z \rangle \rightarrow a \langle z'', B, z \rangle \in P$ .  
Da  $(z'', w', B) \vdash_M^{i-1} (z, \varepsilon, \varepsilon)$ , liefert die Induktionshypothese  $\langle z'', B, z \rangle \Rightarrow_G^* w'$   
und daher:  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G a \langle z'', B, z \rangle \Rightarrow_G^* aw' = w$ .

# Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

← Sei  $\langle z', w, A \rangle \vdash_M^i (z, \varepsilon, \varepsilon)$ . Wir zeigen  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^* w$  mit Induktion über  $i$ .

- ▶ Fall  $i = 0$ : Unmöglich.
- ▶ Fall  $i = 1$ : Dann gilt  $w = a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$  und  $(z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A)$ .  
Damit gibt es  $\langle z', A, z \rangle \rightarrow a \in P$  und daher  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G a$ .
- ▶ Fall  $i > 1$ : Dann  $w = aw'$ ,  $\langle z', aw', A \rangle \vdash (z'', w', W) \vdash_M^{i-1} (z, \varepsilon, \varepsilon)$  für  $i - 1 > 0$ ,  
 $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$  und  $W = \varepsilon$ ,  $W = B$  oder  $W = BC$ .

Wir betrachten alle drei Fälle für  $W$  einzeln:

- ▶ Fall  $W = \varepsilon$ : Dieser Fall ist nicht möglich, da  $i - 1 > 0$  nicht gelten kann.
- ▶ Fall  $W = B$ : Dann ist  $\langle z', A, z \rangle \rightarrow a \langle z'', B, z \rangle \in P$ .  
Da  $\langle z'', w', B \rangle \vdash_M^{i-1} (z, \varepsilon, \varepsilon)$ , liefert die Induktionshypothese  $\langle z'', B, z \rangle \Rightarrow_G^* w'$   
und daher:  $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G a \langle z'', B, z \rangle \Rightarrow_G^* aw' = w$ .
- ▶ Fall  $W = BC$ : Dieser Fall ist komplizierter aber ähnlich (siehe Skript). □

# Äquivalenz von kontextfreien Sprachen und von Kellerautomaten

---

## Theorem

Kellerautomaten erkennen genau die kontextfreien Sprachen.

# Äquivalenz von kontextfreien Sprachen und von Kellerautomaten

---

## Theorem

Kellerautomaten erkennen genau die kontextfreien Sprachen.

**Beweis** Dies folgt aus den obigen Sätzen.



# Ausdruckskraft von PDAs mit einem Zustand

---

Die bisherigen Beweise zeigen auch, dass man PDAs auf PDAs mit **genau einem Zustand** einschränken kann.

# Ausdruckskraft von PDAs mit einem Zustand

---

Die bisherigen Beweise zeigen auch, dass man PDAs auf PDAs mit **genau einem Zustand** einschränken kann.

Sei  $M$  ein PDA.

1. Transformiere PDA  $M$  in Grammatik  $G$  mit  $L(G) = L(M)$ .
2. Transformiere Grammatik  $G$  in Grammatik  $G'$  in Greibach-Normalform (mit  $L(G') = L(G) \setminus \{\epsilon\}$ ).
3. Transformiere Grammatik  $G'$  in PDA  $M'$  mit  $L(M') = L(G)$ .

PDA  $M'$  hat nur einen Zustand.