

2b

Deterministische endliche Automaten

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 11. Februar 2025
Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel



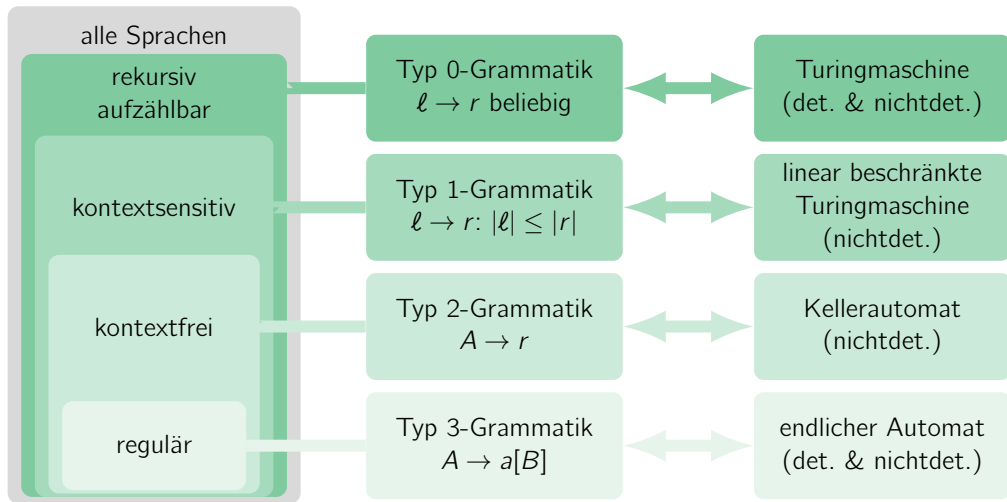
Formalismen, um formale Sprachen zu repräsentieren:

- ▶ **Grammatiken**: Sie **erzeugen** Wörter einer Sprache.
- ▶ **Maschinenmodelle**: Sie **erkennen** Wörter einer Sprache.

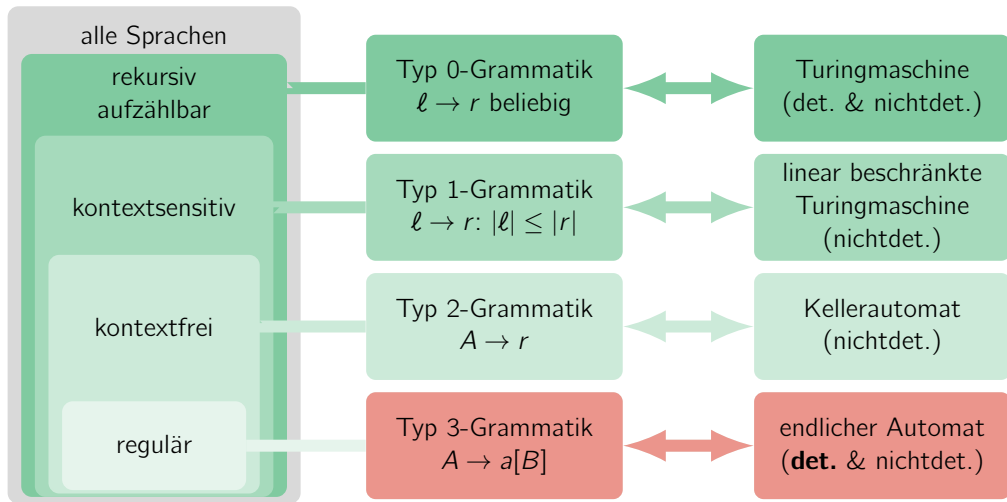
Welcher Formalismus besser ist, hängt von der konkreten Fragestellung ab.

Wichtige Fragestellung: **Welche Maschine akzeptiert welche Sprachklasse?**

Überblick über Grammatiken und Maschinenmodelle



Überblick über Grammatiken und Maschinenmodelle



Wiederholung: Reguläre Sprachen

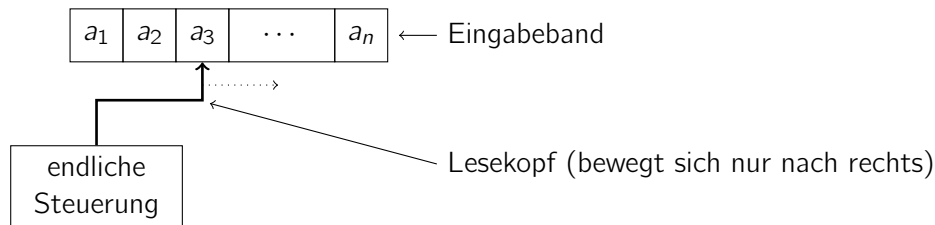
- ▶ Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ ist vom Typ 3 (alternativ regulär), wenn alle Produktionen in P von der Form $A \rightarrow r \in P$ sind, wobei $r = a$ oder $r = aA'$ für $a \in \Sigma, A' \in V$.
- ▶ Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist vom Typ 3 (alternativ regulär), falls es eine Typ 3-Grammatik G gibt, sodass $L(G) = L$ gilt.

Deterministische endliche Automaten

Informelle Kurzfassung:

- ▶ Deterministische endliche Automaten starten im **Startzustand**.
- ▶ Sie lesen zeichenweise ein **Eingabewort**.
- ▶ Sie wechseln dabei den **Zustand** (eindeutig). Es gibt nur endlich viele Zustände.
- ▶ Nach Lesen der Eingabe: **akzeptieren** oder **verwerfen**.
 - ▶ Akzeptieren = in einem **Endzustand**
 - ▶ Verwerfen = nicht in einem **Endzustand**
- ▶ Die **akzeptierte Sprache** besteht aus allen Wörter, für die der Automat akzeptiert.

Illustration eines endlichen Automaten



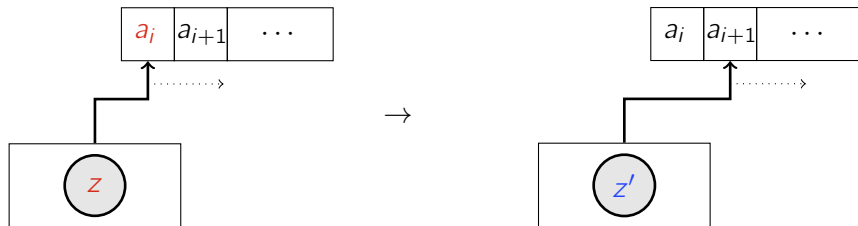
Definition eines DFA

Definition

Ein **deterministischer endlicher Automat** (*deterministic finite automaton*, **DFA**) ist ein 5-Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$, wobei:

- ▶ Z ist eine endliche Menge von **Zuständen**
- ▶ Σ ist das (endliche) **Eingabealphabet** mit $Z \cap \Sigma = \emptyset$
- ▶ $\delta : Z \times \Sigma \rightarrow Z$ ist die (totale) **Überföhrungsfunktion**
- ▶ $z_0 \in Z$ ist der **Startzustand**
- ▶ $E \subseteq Z$ ist die Menge der **Endzustände**.

Illustration des Zustandsübergangs

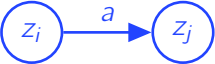


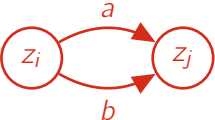
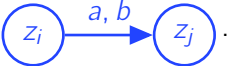
$\delta(z, a_i) = z'$ bedeutet:

Im Zustand z bei Eingabe a_i wechselt der DFA in z' .

Zustandsgraph eines DFA

Für DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$:

- ▶ Für **Zustand** $z \in Z$ gibt es Knoten .
- ▶ **Startzustand** $z_0 \in Z$: eingehender Pfeil .
- ▶ **Endzustände** $z \in E$: doppelte Kreise .
- ▶ **Übergänge** $\delta(z_i, a) = z_j$ als Kante  dargestellt

und statt  zeichnen wir .

Beispiel für einen DFA

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

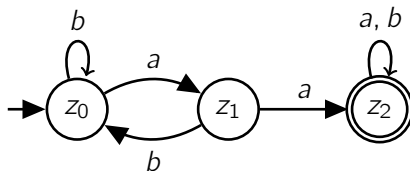
$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Beispiel für einen DFA

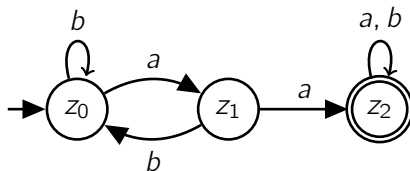
DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :

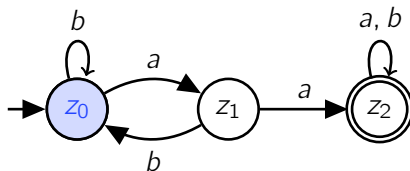


Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe *abbaaa*:

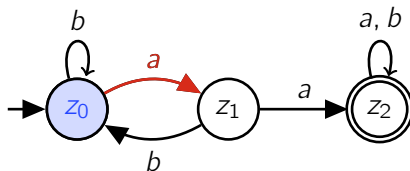
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe *abbaaa*:

- Starte in z_0 .

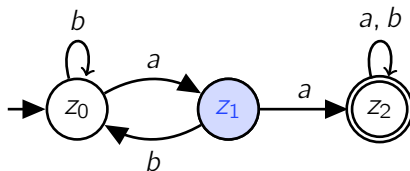
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe *a***bb***aaa*:

- ▶ Starte in z_0 .
- ▶ Lies *a*

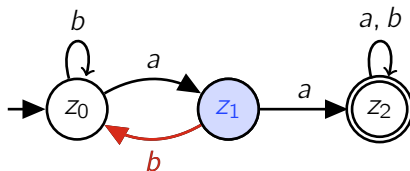
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe *abbaaa*:

- ▶ Starte in z_0 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_1 .

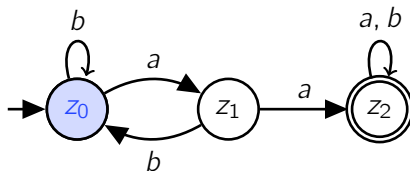
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $a**b**aaaa$:

- ▶ Starte in z_0 .
- ▶ Lies a und wechsele in z_1 .
- ▶ Lies b

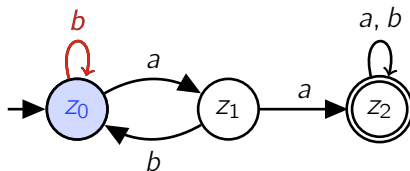
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $a**b**aaaa$:

- ▶ Starte in z_0 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_1 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .

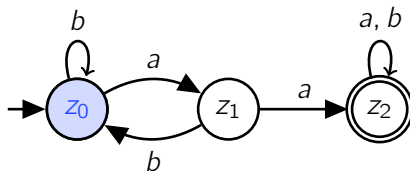
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

- ▶ Starte in z_0 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_1 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies b

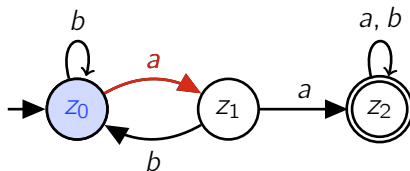
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

- ▶ Starte in z_0 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_1 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .

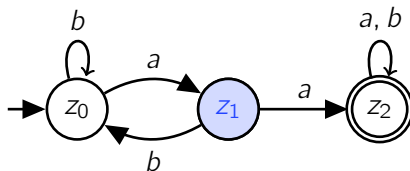
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe *abb^aaa*:

- ▶ Starte in z_0 .
- ▶ Lies *a* und wechsle in z_1 .
- ▶ Lies *b* und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies *b* und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies *a*

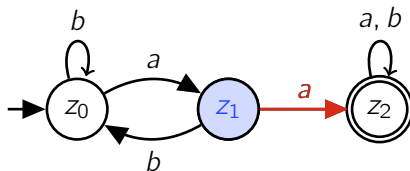
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe *abb***a***aa*:

- ▶ Starte in z_0 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_1 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_1 .

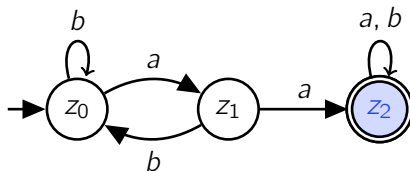
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe *abba***a***a*:

- ▶ Starte in z_0 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_1 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_1 .
- ▶ Lies a

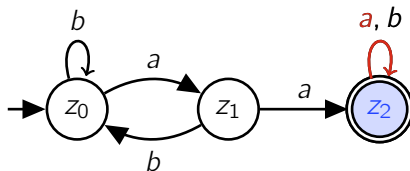
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe *abba****a****a*:

- ▶ Starte in z_0 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_1 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_1 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_2 .

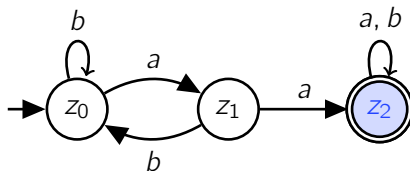
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe *abb^aaa*:

- ▶ Starte in z_0 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_1 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_1 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_2 .
- ▶ Lies a

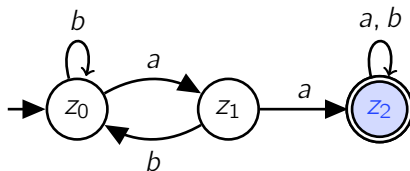
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe *abb^aaa*:

- ▶ Starte in z_0 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_1 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_1 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_2 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_2 .

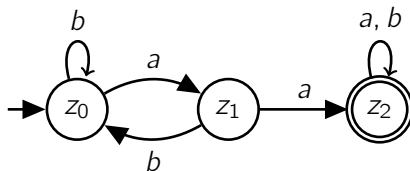
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe *abbaaa*:

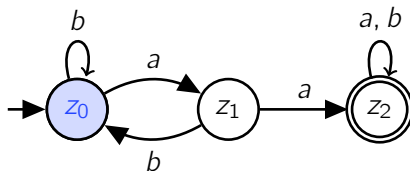
- ▶ Starte in z_0 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_1 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_1 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_2 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_2 .
- ▶ Akzeptiere.

Beispiel für einen verwerfenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe *bbab*:

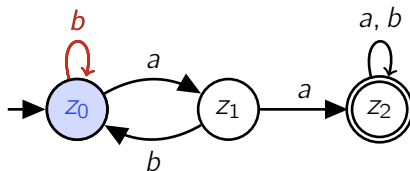
Beispiel für einen verwerfenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

- Starte in z_0 .

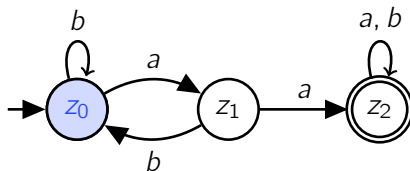
Beispiel für einen verwerfenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

- ▶ Starte in z_0 .
- ▶ Lies b

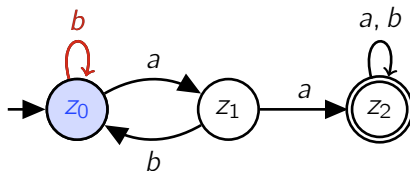
Beispiel für einen verwerfenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe *bbab*:

- ▶ Starte in z_0 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .

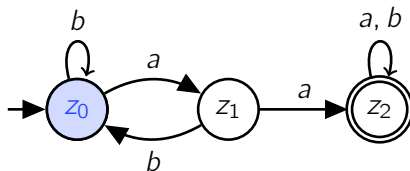
Beispiel für einen verwerfenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $b\textcolor{red}{b}ab$:

- ▶ Starte in z_0 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies b

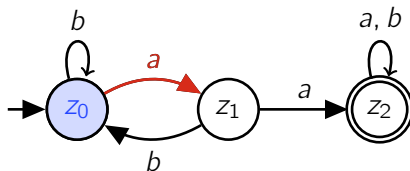
Beispiel für einen verwerfenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $b\textcolor{red}{b}ab$:

- ▶ Starte in z_0 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .

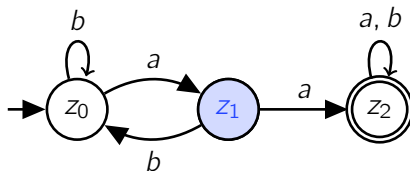
Beispiel für einen verwerfenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

- ▶ Starte in z_0 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies a

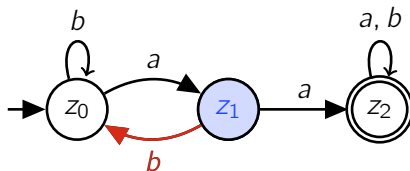
Beispiel für einen verwerfenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe *bbab*:

- ▶ Starte in z_0 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_1 .

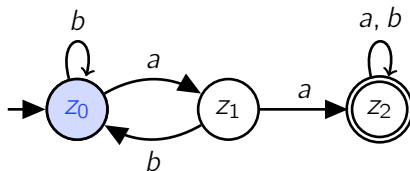
Beispiel für einen verwerfenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe *bbab*:

- ▶ Starte in z_0 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_1 .
- ▶ Lies b

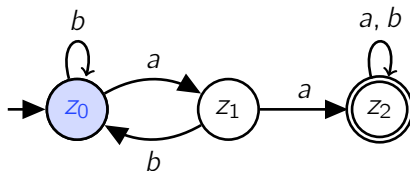
Beispiel für einen verwerfenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe *bbab*:

- ▶ Starte in z_0 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_1 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .

Beispiel für einen verwerfenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe *bbab*:

- ▶ Starte in z_0 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ Lies a und wechsle in z_1 .
- ▶ Lies b und wechsle in z_0 .
- ▶ **Verwirf.**

Definition

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA.

Wir definieren $\tilde{\delta} : Z \times \Sigma^* \rightarrow Z$ rekursiv durch

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}(z, \epsilon) &:= z \\ \tilde{\delta}(z, aw) &:= \tilde{\delta}(\delta(z, a), w)\end{aligned}$$

Die von M akzeptierte Sprache ist

$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \tilde{\delta}(z_0, w) \in E\}$$

Akzeptanz bei DFAs

Definition

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA.

Wir definieren $\tilde{\delta} : Z \times \Sigma^* \rightarrow Z$ rekursiv durch

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}(z, \epsilon) &:= z \\ \tilde{\delta}(z, aw) &:= \tilde{\delta}(\delta(z, a), w)\end{aligned}$$

Die von M akzeptierte Sprache ist

$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \tilde{\delta}(z_0, w) \in E\}$$

Alternativ:

$$\tilde{\delta}(z, a_1 a_2 \dots a_n) = \delta(\dots \delta(\delta(z, a_1), a_2) \dots, a_n)$$

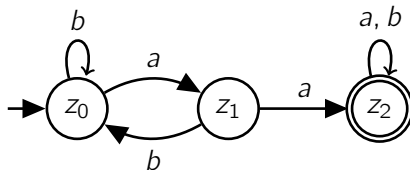
$\tilde{\delta}$ wendet δ solange an, bis das Eingabewort abgearbeitet ist.

Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe *abbaaa*:

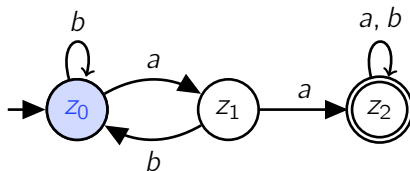
$$\tilde{\delta}(z_0, abbaaa) = \delta(\delta(\delta(\delta(\delta(\delta(z_0, a), b), b), a), a), a), a)$$

Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe *abbaaa*:

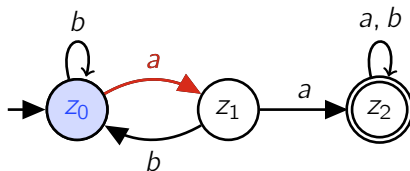
$$\tilde{\delta}(z_0, abbaaa) = \delta(\delta(\delta(\delta(\delta(\delta(z_0, a), b), b), a), a), a), a)$$

Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe *abbaaa*:

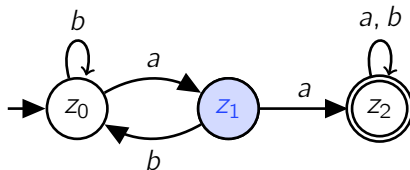
$$\tilde{\delta}(z_0, abbaaa) = \delta(\delta(\delta(\delta(\delta(\delta(z_0, a), b), b), a), a), a), a)$$

Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe *abbaaa*:

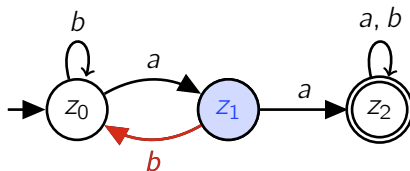
$$\tilde{\delta}(z_0, abbaaa) = \delta(\delta(\delta(\delta(\delta(z_1, b), b), a), a), a), a)$$

Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe $a**b**aaaa$:

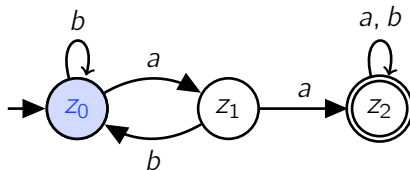
$$\tilde{\delta}(z_0, abbaaa) = \delta(\delta(\delta(\delta(\delta(z_1, \textcolor{red}{b}), b), a), a), a)$$

Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

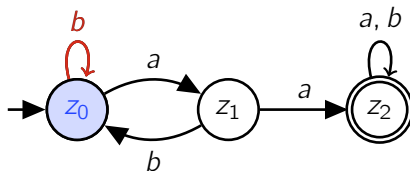
$$\tilde{\delta}(z_0, abbaaa) = \delta(\delta(\delta(\delta(\delta(z_0, b), a), a), a), a), a)$$

Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

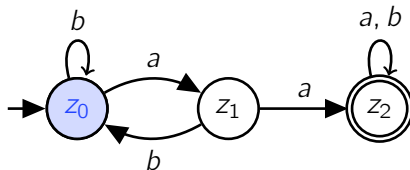
$$\tilde{\delta}(z_0, abbaaa) = \delta(\delta(\delta(\delta(\delta(z_0, b), a), a), a), a), a)$$

Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

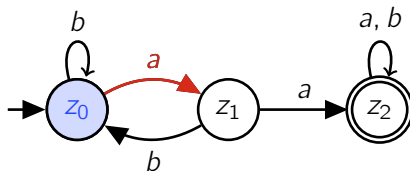
$$\tilde{\delta}(z_0, abbaaa) = \delta(\delta(\delta(\delta(z_0, a), a), b), a), a)$$

Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe $abb\textcolor{red}{a}aa$:

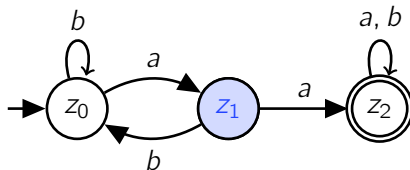
$$\tilde{\delta}(z_0, abb\textcolor{red}{a}aa) = \delta(\delta(\delta(\textcolor{blue}{z}_0, \textcolor{red}{a}), a), a)$$

Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe $abb\textcolor{red}{a}aa$:

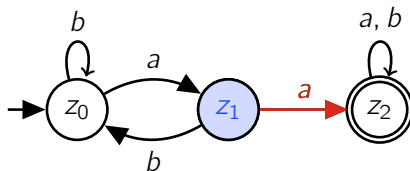
$$\tilde{\delta}(z_0, abb\textcolor{red}{a}aa) = \delta(\delta(\textcolor{blue}{z}_1, a), a)$$

Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe $abbaa$:

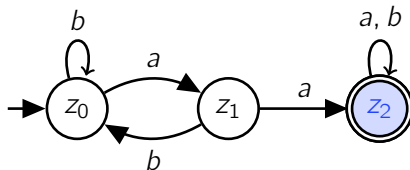
$$\tilde{\delta}(z_0, abbaaa) = \delta(\delta(z_1, a), a)$$

Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe $abbaa$:

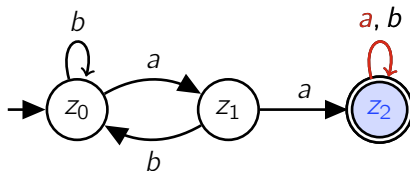
$$\tilde{\delta}(z_0, abbaaa) = \delta(z_2, a)$$

Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe $abbaa$ a:

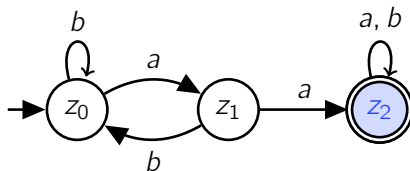
$$\tilde{\delta}(z_0, abbaaa) = \delta(z_2, a)$$

Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe *abbaa***a**:

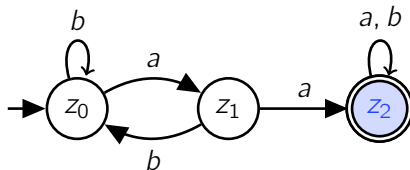
$$\tilde{\delta}(z_0, abbaaa) = z_2$$

Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

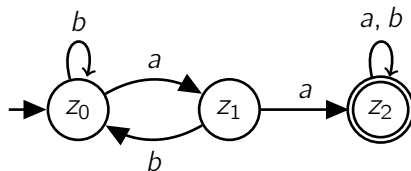
$$\tilde{\delta}(z_0, abbaaa) = z_2 \in E$$

Weiteres Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

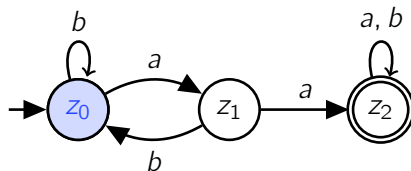
$$\tilde{\delta}(z_0, bbab) = \delta(\delta(\delta(\delta(z_0, b), b), a), b)$$

Weiteres Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

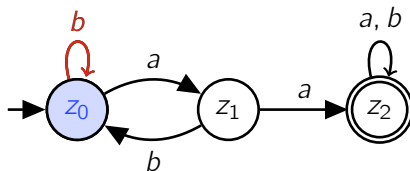
$$\tilde{\delta}(z_0, bbab) = \delta(\delta(\delta(\delta(z_0, b), b), a), b)$$

Weiteres Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

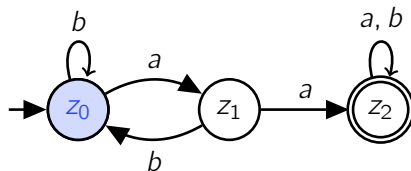
$$\tilde{\delta}(z_0, bbab) = \delta(\delta(\delta(\delta(z_0, b), a), b), b)$$

Weiteres Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

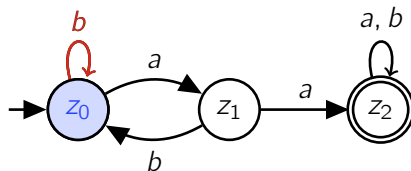
$$\tilde{\delta}(z_0, bbab) = \delta(\delta(\delta(\delta(z_0, b), a), b), a), b)$$

Weiteres Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe $b\textcolor{red}{b}ab$:

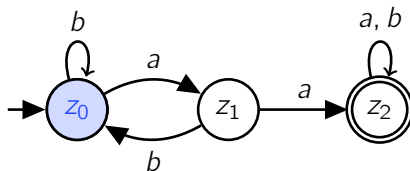
$$\tilde{\delta}(z_0, b\textcolor{red}{b}ab) = \delta(\delta(\delta(\textcolor{blue}{z}_0, \textcolor{red}{b}), a), b)$$

Weiteres Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

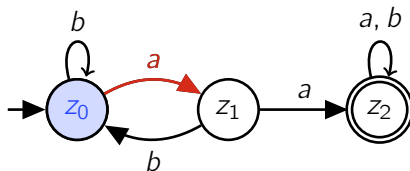
$$\tilde{\delta}(z_0, bbab) = \delta(\delta(z_0, a), b)$$

Weiteres Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

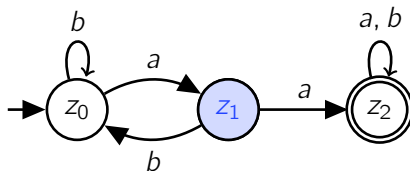
$$\tilde{\delta}(z_0, bbab) = \delta(\delta(z_0, a), b)$$

Weiteres Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

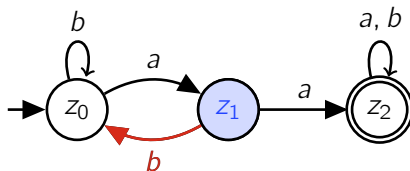
$$\tilde{\delta}(z_0, bbab) = \delta(z_1, b)$$

Weiteres Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

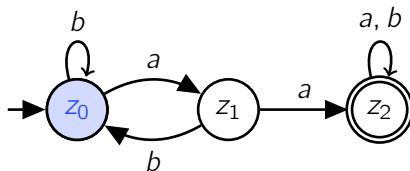
$$\tilde{\delta}(z_0, bbab) = \delta(z_1, b)$$

Weiteres Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

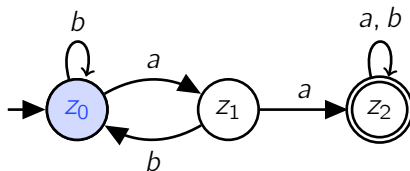
$$\tilde{\delta}(z_0, bbab) = z_0$$

Weiteres Beispiel für die $\tilde{\delta}$ -Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

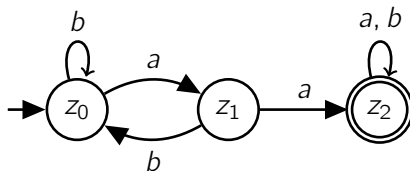
$$\tilde{\delta}(z_0, bbab) = z_0 \notin E$$

Akzeptierte Sprache des Beispiels

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



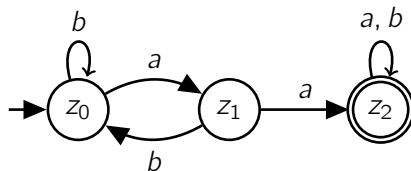
Akzeptierte Sprache = ?

Akzeptierte Sprache des Beispiels

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M :



Akzeptierte Sprache = $\{uaav \mid u, v \in \{a, b\}^*\}$

Definition

Seien $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA und $w \in \Sigma^*$ ein Wort der Länge n .

Die Folge von Zuständen $z_0, \dots, z_n$ mit $z_i = \delta(z_{i-1}, w[i])$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ ist ein **Lauf** von M für w .

Definition

Seien $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA und $w \in \Sigma^*$ ein Wort der Länge n .

Die Folge von Zuständen $z_0, \dots, z_n$ mit $z_i = \delta(z_{i-1}, w[i])$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ ist ein **Lauf** von M für w .

Für einen Lauf schreiben wir auch

$$z_0 \xrightarrow{w[1]} z_1 \xrightarrow{w[2]} \dots \xrightarrow{w[n-1]} z_{n-1} \xrightarrow{w[n]} z_n$$

Beispiele für Läufe

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Beispiele für Läufe

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Lauf für *abbaaa* (akzeptierend):

$$z_0 \xrightarrow{a} z_1 \xrightarrow{b} z_0 \xrightarrow{b} z_0 \xrightarrow{a} z_1 \xrightarrow{a} z_2 \xrightarrow{a} z_2$$

Beispiele für Läufe

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Lauf für *abbaaa* (akzeptierend):

$$z_0 \xrightarrow{a} z_1 \xrightarrow{b} z_0 \xrightarrow{b} z_0 \xrightarrow{a} z_1 \xrightarrow{a} z_2 \xrightarrow{a} z_2$$

Lauf für *bbab* (verwerfend):

$$z_0 \xrightarrow{b} z_0 \xrightarrow{b} z_0 \xrightarrow{a} z_1 \xrightarrow{b} z_0$$

Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über $\{a, b\}$, der alle Wörter akzeptiert, die mit *abaa* beginnen und mit *bab* enden (z.B. *abaabab*, *abaaaabab*, *abaababab*):

Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über $\{a, b\}$, der alle Wörter akzeptiert, die mit $abaa$ beginnen und mit bab enden (z.B. *abaabab*, *abaaaabab*, *abaababab*):



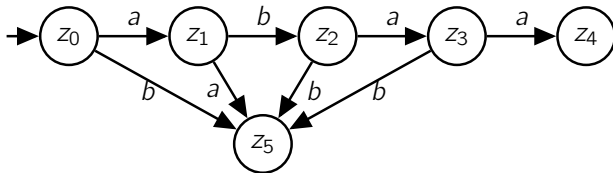
Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über $\{a, b\}$, der alle Wörter akzeptiert, die mit $abaa$ beginnen und mit bab enden (z.B. *abaabab*, *abaaaabab*, *abaababab*):



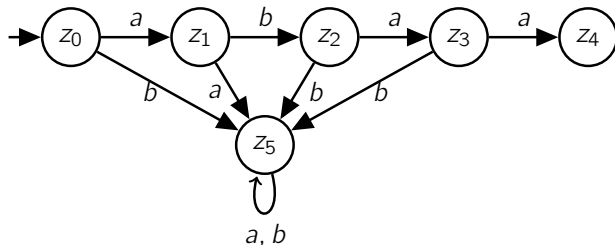
Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über $\{a, b\}$, der alle Wörter akzeptiert, die mit $abaa$ beginnen und mit bab enden (z.B. *abaabab*, *abaaaabab*, *abaababab*):



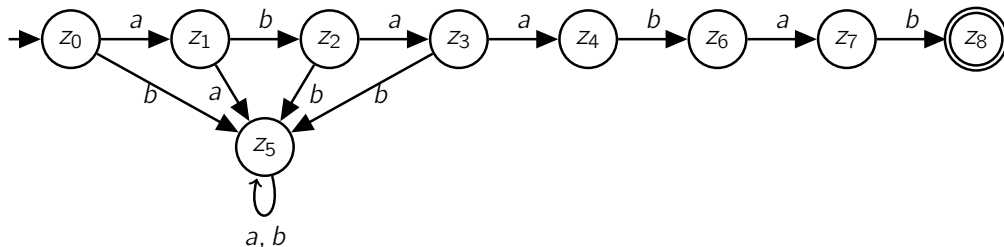
Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über $\{a, b\}$, der alle Wörter akzeptiert, die mit $abaa$ beginnen und mit bab enden (z.B. *abaabab*, *abaaaabab*, *abaababab*):



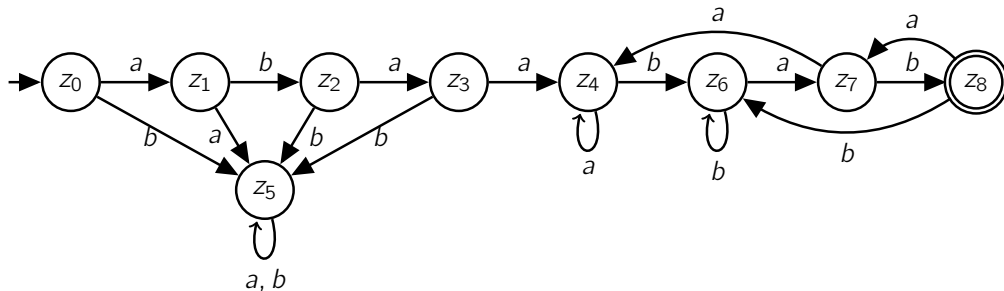
Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über $\{a, b\}$, der alle Wörter akzeptiert, die mit *abaa* beginnen und mit *bab* enden (z.B. *abaabab*, *abaaaabab*, *abaababab*):



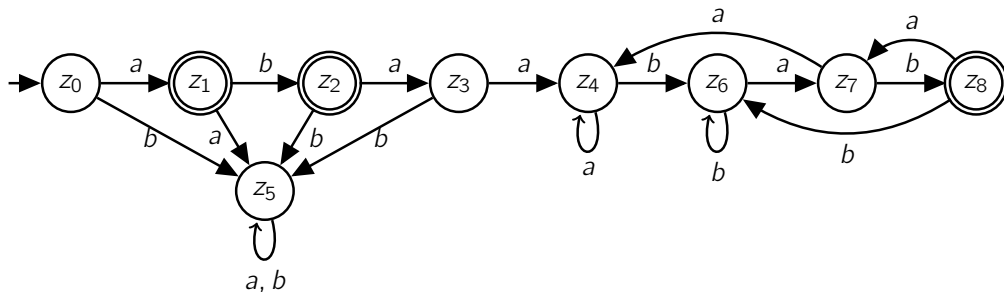
Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über $\{a, b\}$, der alle Wörter akzeptiert, die mit $abaa$ beginnen und mit bab enden (z.B. *abaabab*, *abaaaabab*, *abaababab*):

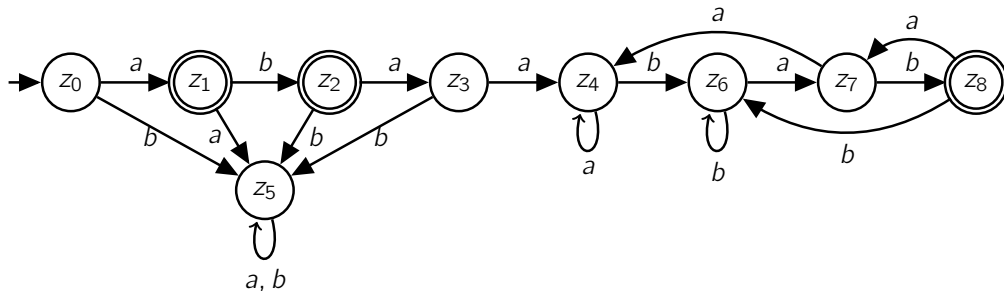


Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Zusätzlich die Wörter a und ab akzeptieren:



Beispiel für die Konstruktion eines DFA



Bedeutung der Zustände:

$z_0 = \epsilon$ wurde gelesen

$z_1 = a$ wurde gelesen

$z_2 = ab$ wurde gelesen

$z_3 = aba$ wurde gelesen

$z_4 = abaa$ wurde gelesen

$z_5 =$ ein falsches Präfix wurde gelesen
(Müllzustand)

$z_6 = abaa \dots b$ wurde gelesen

$z_7 = abaa \dots ba$ wurde gelesen

$z_8 = abaa \dots bab$ wurde gelesen

Weiteres Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über
 $\Sigma = \{+, -, ., 0, \dots, 9\}$,
der alle Wörter akzeptiert,
die Gleitkommazahlen
darstellen
(z.B. $+27$, -3.14 , $.666$):

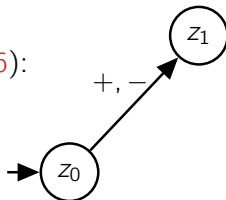
Weiteres Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über
 $\Sigma = \{+, -, ., 0, \dots, 9\}$,
der alle Wörter akzeptiert,
die Gleitkommazahlen
darstellen
(z.B. $+27$, -3.14 , $.666$):



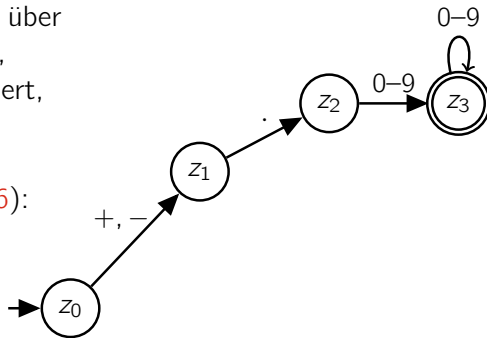
Weiteres Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über
 $\Sigma = \{+, -, ., 0, \dots, 9\}$,
der alle Wörter akzeptiert,
die Gleitkommazahlen
darstellen
(z.B. $+27$, -3.14 , $.666$):



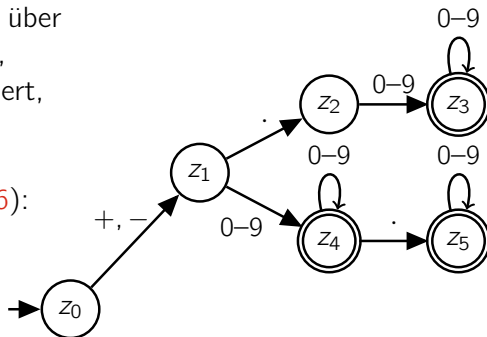
Weiteres Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über
 $\Sigma = \{+, -, ., 0, \dots, 9\}$,
der alle Wörter akzeptiert,
die Gleitkommazahlen
darstellen
(z.B. $+27$, -3.14 , $.666$):



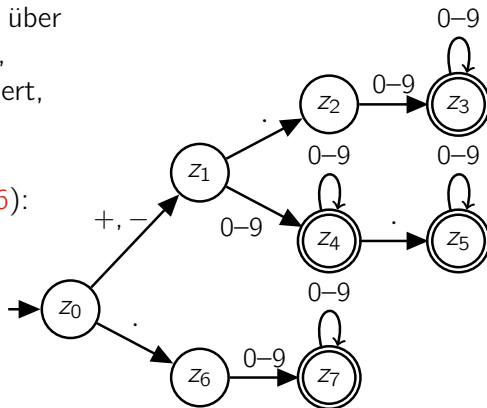
Weiteres Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über
 $\Sigma = \{+, -, ., 0, \dots, 9\}$,
der alle Wörter akzeptiert,
die Gleitkommazahlen
darstellen
(z.B. $+27$, -3.14 , $.666$):



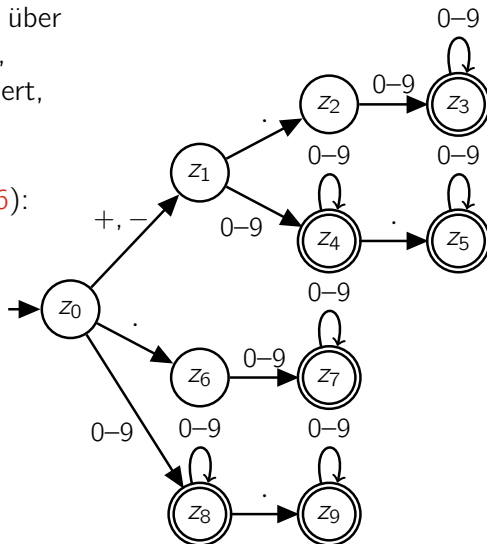
Weiteres Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über
 $\Sigma = \{+, -, ., 0, \dots, 9\}$,
der alle Wörter akzeptiert,
die Gleitkommazahlen
darstellen
(z.B. $+27$, -3.14 , $.666$):



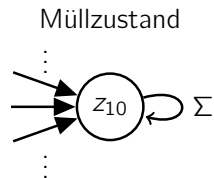
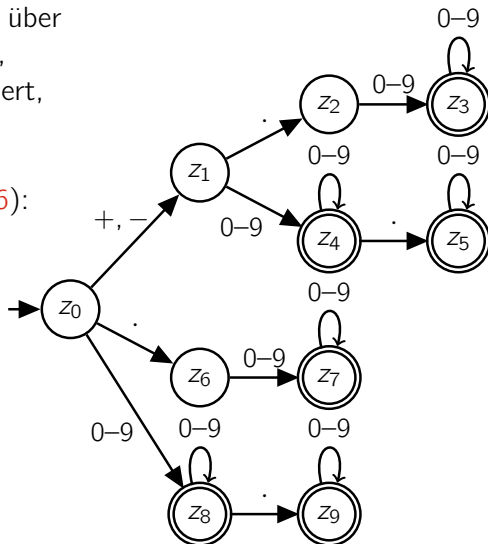
Weiteres Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über
 $\Sigma = \{+, -, ., 0, \dots, 9\}$,
der alle Wörter akzeptiert,
die Gleitkommazahlen
darstellen
(z.B. $+27$, -3.14 , $.666$):



Weiteres Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über
 $\Sigma = \{+, -, ., 0, \dots, 9\}$,
der alle Wörter akzeptiert,
die Gleitkommazahlen
darstellen
(z.B. $+27$, -3.14 , $.666$):



Anwendungen von Automaten

- ▶ Automaten werden zur **Spezifikation von Systemen und Protokollen** verwendet.
- ▶ Sie werden zur **Textsuche und Texterkennung** verwendet.
- ▶ Sie dienen als Implementierung für **reguläre Ausdrücke** (mehr hierzu später).