

2a

**Grammatikbeispiele, Mehrdeutigkeit und
Entfernen von ϵ -Produktionen**

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und TheorembeweisenStand: 11. Februar 2025
Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow aSBC$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{\textcolor{red}{S} \rightarrow \textcolor{blue}{aSBC}, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aa\textcolor{red}{S}BCBC \Rightarrow aa\textcolor{blue}{aSBC}BCBC$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow aSBC, \textcolor{red}{S} \rightarrow \textcolor{blue}{a}BC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaa\textcolor{red}{S}BCBCBC \Rightarrow aaa\textcolor{blue}{a}BCBCBC$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaa aB C B C B C B C$
 $\Rightarrow aaa ab C B C B C B C$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, \textcolor{red}{CB} \rightarrow \textcolor{blue}{BC}, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC$
 $\Rightarrow aaaab\textcolor{red}{CB}CBCBC \Rightarrow aaaab\textcolor{blue}{BC}CBCBC$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, \textcolor{red}{bB} \rightarrow \textcolor{blue}{bb}, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC$
 $\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaa\textcolor{red}{bB}CCBCBC \Rightarrow aaaa\textcolor{blue}{bb}CCBCBC$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, \textcolor{red}{CB} \rightarrow \textcolor{blue}{BC}, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbC\textcolor{red}{CB}CBC \\ &\Rightarrow aaaabbC\textcolor{blue}{BC}CBC \end{aligned}$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, \textcolor{red}{CB} \rightarrow \textcolor{blue}{BC}, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabb\textcolor{red}{CB}CCBC \Rightarrow aaaabb\textcolor{blue}{BC}CCBC \end{aligned}$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, \textcolor{red}{CB} \rightarrow \textcolor{blue}{BC}, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCC\textcolor{red}{CB}C \Rightarrow aaaabbBCC\textcolor{blue}{BCC} \end{aligned}$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, \textcolor{red}{CB} \rightarrow \textcolor{blue}{BC}, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBC \Rightarrow aaaabbBC\textcolor{red}{B}CC \\ &\Rightarrow aaaabbBC\textcolor{blue}{BC}CC \end{aligned}$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBC \Rightarrow aaaabbBCCBCC \\ &\Rightarrow aaaabbB\textcolor{red}{C}B\textcolor{blue}{C}CC \Rightarrow aaaabbB\textcolor{blue}{C}C\textcolor{red}{C}C \end{aligned}$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBBC \Rightarrow aaaabbBCCBCC \\ &\Rightarrow aaaabbBCBCCC \Rightarrow aaaab**b**BCCCC \Rightarrow aaaab**bb**BCCCC \end{aligned}$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBBC \Rightarrow aaaabbBCCBCC \\ &\Rightarrow aaaabbBCBCCC \Rightarrow aaaabbBBCCCC \Rightarrow aaaabb**b**BCCCC \\ &\Rightarrow aaaabb**bb**CCCC \end{aligned}$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBBC \Rightarrow aaaabbBCCBCC \\ &\Rightarrow aaaabbBCBCCC \Rightarrow aaaabbBBCCCC \Rightarrow aaaabbbbBCCCC \\ &\Rightarrow aaaabbbb b C C C C \Rightarrow aaaabbbb bc C C C \end{aligned}$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBBC \Rightarrow aaaabbBCCBCC \\ &\Rightarrow aaaabbBCBCCC \Rightarrow aaaabbBBCCCC \Rightarrow aaaabbbbBCCCC \\ &\Rightarrow aaaabbbbCCCC \Rightarrow aaaabbbb c C C C \Rightarrow aaaabbbb cc C C \end{aligned}$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBBC \Rightarrow aaaabbBCCBCC \\ &\Rightarrow aaaabbBCBCCC \Rightarrow aaaabbBBCCCC \Rightarrow aaaabbbbBCCCC \\ &\Rightarrow aaaabbbbbCCCC \Rightarrow aaaabbbbcbCCC \Rightarrow aaaabbbbcbccC \\ &\Rightarrow aaaabbbbcbccC \end{aligned}$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBBC \Rightarrow aaaabbBCCBCC \\ &\Rightarrow aaaabbBCBCCC \Rightarrow aaaabbBBCCCC \Rightarrow aaaabbbbBCCCC \\ &\Rightarrow aaaabbbbbCCCC \Rightarrow aaaabbbbcbCCC \Rightarrow aaaabbbbccCC \\ &\Rightarrow aaaabbbbcc cC \Rightarrow aaaabbbbcc cc \end{aligned}$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBBC \Rightarrow aaaabbBCCBCC \\ &\Rightarrow aaaabbBCBCCC \Rightarrow aaaabbBBCCCC \Rightarrow aaaabbbbBCCCC \\ &\Rightarrow aaaabbbbbCCCC \Rightarrow aaaabbbbcbCCC \Rightarrow aaaabbbbccCC \\ &\Rightarrow aaaabbbbccccC \Rightarrow aaaabbbbcccccc \end{aligned}$$

Steckengebliebene Folge von Ableitungsschritten:

$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaBCBC \Rightarrow aabCBC \Rightarrow aabcBC$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBBC \Rightarrow aaaabbBCCBCC \\ &\Rightarrow aaaabbBCBCCC \Rightarrow aaaabbBBCCCC \Rightarrow aaaabbbbBCCCC \\ &\Rightarrow aaaabbbbbCCCC \Rightarrow aaaabbbbcbCCC \Rightarrow aaaabbbbccCC \\ &\Rightarrow aaaabbbbccccC \Rightarrow aaaabbbbcccccc \end{aligned}$$

Steckengebliebene Folge von Ableitungsschritten:

$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaBCBC \Rightarrow aabCBC \Rightarrow aabcBC$

$L(G) = ?$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBBC \Rightarrow aaaabbBCCBCC \\ &\Rightarrow aaaabbBCBCCC \Rightarrow aaaabbBBCCCC \Rightarrow aaaabbbbBCCCC \\ &\Rightarrow aaaabbbbbCCCC \Rightarrow aaaabbbbcbCCC \Rightarrow aaaabbbbccCC \\ &\Rightarrow aaaabbbbccccC \Rightarrow aaaabbbbcccccc \end{aligned}$$

Steckengebliebene Folge von Ableitungsschritten:

$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaBCBC \Rightarrow aabCBC \Rightarrow aabcBC$

$L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis

⊇ Wir zeigen, dass $a^n b^n c^n \in L(G)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis

- ⊇ Wir zeigen, dass $a^n b^n c^n \in L(G)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
- ▶ Wende $n - 1$ mal $S \rightarrow aSBC$ und dann einmal $S \rightarrow aBC$ an:
 $S \Rightarrow^* a^{n-1} S (BC)^{n-1} \Rightarrow a^n (BC)^n$.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis

⊇ Wir zeigen, dass $a^n b^n c^n \in L(G)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

- ▶ Wende $n - 1$ mal $S \rightarrow aSBC$ und dann einmal $S \rightarrow aBC$ an:
 $S \Rightarrow^* a^{n-1} S (BC)^{n-1} \Rightarrow a^n (BC)^n$.
- ▶ Wende $CB \rightarrow BC$ solange an, bis es kein Teilwort CB mehr gibt:
 $a^n (BC)^n \Rightarrow^* a^n B^n C^n$.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis

- ⊇ Wir zeigen, dass $a^n b^n c^n \in L(G)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
- ▶ Wende $n - 1$ mal $S \rightarrow aSBC$ und dann einmal $S \rightarrow aBC$ an:
 $S \Rightarrow^* a^{n-1} S (BC)^{n-1} \Rightarrow a^n (BC)^n$.
 - ▶ Wende $CB \rightarrow BC$ solange an, bis es kein Teilwort CB mehr gibt:
 $a^n (BC)^n \Rightarrow^* a^n B^n C^n$.
 - ▶ Wende $aB \rightarrow ab$ und anschließend $n - 1$ mal $bB \rightarrow bb$ an:
 $a^n B^n C^n \Rightarrow a^n b B^{n-1} C^n \Rightarrow^* a^n b^n C^n$.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis

⊇ Wir zeigen, dass $a^n b^n c^n \in L(G)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

- ▶ Wende $n - 1$ mal $S \rightarrow aSBC$ und dann einmal $S \rightarrow aBC$ an:
 $S \Rightarrow^* a^{n-1} S (BC)^{n-1} \Rightarrow a^n (BC)^n$.
- ▶ Wende $CB \rightarrow BC$ solange an, bis es kein Teilwort CB mehr gibt:
 $a^n (BC)^n \Rightarrow^* a^n B^n C^n$.
- ▶ Wende $aB \rightarrow ab$ und anschließend $n - 1$ mal $bB \rightarrow bb$ an:
 $a^n B^n C^n \Rightarrow a^n b B^{n-1} C^n \Rightarrow^* a^n b^n C^n$.
- ▶ Wende einmal $bC \rightarrow bc$ und anschließend $n - 1$ mal $cC \rightarrow cc$ an:
 $a^n b^n C^n \Rightarrow a^n b^n c C^{n-1} \Rightarrow^* a^n b^n c^n$.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis

⊇ Wir zeigen, dass $a^n b^n c^n \in L(G)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

- ▶ Wende $n - 1$ mal $S \rightarrow aSBC$ und dann einmal $S \rightarrow aBC$ an:
 $S \Rightarrow^* a^{n-1} S (BC)^{n-1} \Rightarrow a^n (BC)^n$.
- ▶ Wende $CB \rightarrow BC$ solange an, bis es kein Teilwort CB mehr gibt:
 $a^n (BC)^n \Rightarrow^* a^n B^n C^n$.
- ▶ Wende $aB \rightarrow ab$ und anschließend $n - 1$ mal $bB \rightarrow bb$ an:
 $a^n B^n C^n \Rightarrow a^n b B^{n-1} C^n \Rightarrow^* a^n b^n C^n$.
- ▶ Wende einmal $bC \rightarrow bc$ und anschließend $n - 1$ mal $cC \rightarrow cc$ an:
 $a^n b^n C^n \Rightarrow a^n b^n c C^{n-1} \Rightarrow^* a^n b^n c^n$.

Zusammensetzen aller Ableitungsschritte zeigt $S \Rightarrow^* a^n b^n c^n$.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis (Fortsetzung)

$\subseteq$ Wir zeigen, dass alle Wörter in $L(G)$ von der Form $a^n b^n c^n$ sind.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis (Fortsetzung)

⊆ Wir zeigen, dass alle Wörter in $L(G)$ von der Form $a^n b^n c^n$ sind.

Für $S \Rightarrow_G^* u$ mit u Satzform zeigen die Produktionen:

$$\#_a(u) = \#_b(u) + \#_B(u) = \#_c(u) + \#_C(u).$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis (Fortsetzung)

⊆ Wir zeigen, dass alle Wörter in $L(G)$ von der Form $a^n b^n c^n$ sind.

Für $S \Rightarrow_G^* u$ mit u Satzform zeigen die Produktionen:

$$\#_a(u) = \#_b(u) + \#_B(u) = \#_c(u) + \#_C(u).$$

Für $S \Rightarrow_G^* w$ mit $w \in \{a, b, c\}^*$ gilt: a 's werden ganz links erzeugt,

d.h. $w = a^n w'$ mit $w' \in \{b, c\}^*$ und $n = \#_b(w') = \#_c(w')$.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis (Fortsetzung)

⊆ Wir zeigen, dass alle Wörter in $L(G)$ von der Form $a^n b^n c^n$ sind.

Für $S \Rightarrow_G^* u$ mit u Satzform zeigen die Produktionen:

$$\#_a(u) = \#_b(u) + \#_B(u) = \#_c(u) + \#_C(u).$$

Für $S \Rightarrow_G^* w$ mit $w \in \{a, b, c\}^*$ gilt: a 's werden ganz links erzeugt,
d.h. $w = a^n w'$ mit $w' \in \{b, c\}^*$ und $n = \#_b(w') = \#_c(w')$.

Es gilt $w' = bw''$, da jedes auf a folgende Symbol durch $aB \rightarrow ab$ erzeugt wird
und die Produktionen keine Terminalsymbole vertauschen.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis (Fortsetzung)

Ebenso können die Terminalsymbole des Wortes $w' \in \{b, c\}^*$ nur durch $bB \rightarrow bb$, $bC \rightarrow bc$ und $cC \rightarrow cc$ erzeugt worden sein.

Diese Produktionen erlauben nur **einen Wechsel von b zu c** und **keine Wechsel von c zu b** . Auch ein **Umordnen der Terminalsymbole** ist **nicht möglich**.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis (Fortsetzung)

Ebenso können die Terminalsymbole des Wortes $w' \in \{b, c\}^*$ nur durch $bB \rightarrow bb$, $bC \rightarrow bc$ und $cC \rightarrow cc$ erzeugt worden sein.

Diese Produktionen erlauben nur **einen Wechsel von b zu c** und **keine Wechsel von c zu b** . Auch ein **Umordnen der Terminalsymbole** ist **nicht möglich**.

Daher gilt $w' = b^i c^j$ und mit $n = \#_b(w') = \#_c(w')$ sogar $w' = b^n c^n$.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis (Fortsetzung)

Ebenso können die Terminalsymbole des Wortes $w' \in \{b, c\}^*$ nur durch $bB \rightarrow bb$, $bC \rightarrow bc$ und $cC \rightarrow cc$ erzeugt worden sein.

Diese Produktionen erlauben nur **einen Wechsel von b zu c** und **keine Wechsel von c zu b** . Auch ein **Umordnen der Terminalsymbole** ist **nicht möglich**.

Daher gilt $w' = b^i c^j$ und mit $n = \#_b(w') = \#_c(w')$ sogar $w' = b^n c^n$.

Also ist $w = a^n b^n c^n$.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow aSBC, S \rightarrow aBC, CB \rightarrow BC, aB \rightarrow ab, bB \rightarrow bb, bC \rightarrow bc, cC \rightarrow cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis (Fortsetzung)

Ebenso können die Terminalsymbole des Wortes $w' \in \{b, c\}^*$ nur durch $bB \rightarrow bb$, $bC \rightarrow bc$ und $cC \rightarrow cc$ erzeugt worden sein.

Diese Produktionen erlauben nur **einen Wechsel von b zu c** und **keine Wechsel von c zu b** . Auch ein **Umordnen der Terminalsymbole** ist **nicht möglich**.

Daher gilt $w' = b^i c^j$ und mit $n = \#_b(w') = \#_c(w')$ sogar $w' = b^n c^n$.

Also ist $w = a^n b^n c^n$.

Aber w war beliebig gewählt. Daher sind alle $w \in L(G)$ von der Form $a^n b^n c^n$.



Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA,$
 $Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \varepsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \varepsilon\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow \$T\$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow \$T\$, \textcolor{red}{T} \rightarrow \textcolor{blue}{a}AT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \varepsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \varepsilon\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow \$\textcolor{red}{T}\$ \Rightarrow \$\textcolor{blue}{a}AT\$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow \$T\$, \textcolor{red}{T} \rightarrow \textcolor{blue}{a}A\textcolor{blue}{T}, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aA\textcolor{red}{T}\$ \Rightarrow \$aAa\textcolor{blue}{AT}\$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, \textcolor{red}{T} \rightarrow \textcolor{blue}{bBT}, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, \textcolor{red}{T} \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbB\textcolor{red}{T}\$ \\ \Rightarrow \$aAaAbB\$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$$
 $\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aAaAbB\$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA,$
 $\textcolor{red}{A}b \rightarrow \textcolor{blue}{b}A, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$$
 $\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaA\textcolor{red}{A}bB\$ \Rightarrow \$aaA\textcolor{blue}{b}AB\$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA,$
 $\textcolor{red}{A}b \rightarrow \textcolor{blue}{b}A, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$$
 $\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aa\textcolor{red}{A}bAB\$ \Rightarrow \$aab\textcolor{blue}{A}AB\$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, \textcolor{red}{B\$} \rightarrow \textcolor{blue}{\$b}, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$ \\ \Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAA\textcolor{red}{B\$} \\ \Rightarrow \$aabAA\textcolor{blue}{\$b}$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, \textcolor{red}{A\$} \rightarrow \textcolor{blue}{\$a}, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$ \\ \Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$ \\ \Rightarrow \$aabA\textcolor{red}{\$}b \Rightarrow \$aabA\textcolor{blue}{\$}ab$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA,$
 $Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, \textcolor{red}{A}\$ \rightarrow \textcolor{blue}{\$}a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$$
 $\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$$
 $\Rightarrow \$aabAA\$b \Rightarrow \$aab\textcolor{red}{A}\$ab \Rightarrow \$aab\textcolor{blue}{\$}aab$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$ \\ &\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$ \\ &\Rightarrow \$aabAA\$b \Rightarrow \$aabA\$ab \Rightarrow \$aab\$aab \Rightarrow a\$ab\$aab \end{aligned}$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$ \\ &\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$ \\ &\Rightarrow \$aabAA\$b \Rightarrow \$aabA\$ab \Rightarrow \$aab\$aab \Rightarrow a\$ab\$aab \\ &\Rightarrow aa\$b\$aab \end{aligned}$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$ \\ &\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$ \\ &\Rightarrow \$aabAA\$b \Rightarrow \$aabA\$ab \Rightarrow \$aab\$aab \Rightarrow a\$ab\$aab \\ &\Rightarrow aa\$b\$aab \Rightarrow aab\$\$aab \end{aligned}$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$ \\ \Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$ \\ \Rightarrow \$aabAA\$b \Rightarrow \$aabA\$ab \Rightarrow \$aab\$aab \Rightarrow a\$ab\$aab \\ \Rightarrow aa\$b\$aab \Rightarrow aab\$\$aab \Rightarrow aabaab$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA, \\ Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$ \\ &\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$ \\ &\Rightarrow \$aabAA\$b \Rightarrow \$aabA\$ab \Rightarrow \$aab\$aab \Rightarrow a\$ab\$aab \\ &\Rightarrow aa\$b\$aab \Rightarrow aab\$\$aab \Rightarrow aabaab \end{aligned}$$

$L(G) = ?$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA,$
 $Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$ \\ &\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$ \\ &\Rightarrow \$aabAA\$b \Rightarrow \$aabA\$ab \Rightarrow \$aab\$aab \Rightarrow a\$ab\$aab \\ &\Rightarrow aa\$b\$aab \Rightarrow aab\$\$aab \Rightarrow aabaab \end{aligned}$$
$$L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA,$
 $Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$
gilt $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA,$
 $Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$
gilt $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Beweis

“ $\supseteq$ ” Wir zeigen, dass $ww \in L(G)$ für alle $w \in \{a, b\}^*$.

- ▶ Mit $S \rightarrow \$T\$$ wird zunächst eine Umrahmung mit $\$ \$$ erzeugt.

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \varepsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA,$
 $Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \varepsilon\}$
gilt $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Beweis

“ $\supseteq$ ” Wir zeigen, dass $ww \in L(G)$ für alle $w \in \{a, b\}^*$.

- ▶ Mit $S \rightarrow \$T\$$ wird zunächst eine Umrahmung mit $\$ \$$ erzeugt.
- ▶ Mit $T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \varepsilon$ wird eine Satzform aus Blöcken aA, bB erzeugt.

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA,$
 $Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$
gilt $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Beweis

“ $\supseteq$ ” Wir zeigen, dass $ww \in L(G)$ für alle $w \in \{a, b\}^*$.

- ▶ Mit $S \rightarrow \$T\$$ wird zunächst eine Umrahmung mit $\$$ erzeugt.
- ▶ Mit $T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon$ wird eine Satzform aus Blöcken aA, bB erzeugt.
- ▶ Mit $Aa \rightarrow aA, Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB$ kommen A 's und B 's bis vor $\$$.

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA,$
 $Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$
gilt $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Beweis

“ $\supseteq$ ” Wir zeigen, dass $ww \in L(G)$ für alle $w \in \{a, b\}^*$.

- ▶ Mit $S \rightarrow \$T\$$ wird zunächst eine Umrahmung mit $\$$ erzeugt.
- ▶ Mit $T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon$ wird eine Satzform aus Blöcken aA, bB erzeugt.
- ▶ Mit $Aa \rightarrow aA, Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB$ kommen A 's und B 's bis vor $\$$.
- ▶ Mit $A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \b werden die A 's und B 's in a 's und b 's verwandelt.

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA,$
 $Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$
gilt $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Beweis

“ $\supseteq$ ” Wir zeigen, dass $ww \in L(G)$ für alle $w \in \{a, b\}^*$.

- ▶ Mit $S \rightarrow \$T\$$ wird zunächst eine Umrahmung mit $\$$ erzeugt.
- ▶ Mit $T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon$ wird eine Satzform aus Blöcken aA, bB erzeugt.
- ▶ Mit $Aa \rightarrow aA, Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB$ kommen A 's und B 's bis vor $\$$.
- ▶ Mit $A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \b werden die A 's und B 's in a 's und b 's verwandelt.
- ▶ Mit $\$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$$ wird das linke $\$$ zum rechten geschoben, mit $\$\$ \rightarrow \epsilon$ werden die beiden $\$$'s dann eliminiert.

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA,$
 $Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}$
gilt $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Beweis

“ $\supseteq$ ” Wir zeigen, dass $ww \in L(G)$ für alle $w \in \{a, b\}^*$.

- ▶ Mit $S \rightarrow \$T\$$ wird zunächst eine Umrahmung mit $\$ \$$ erzeugt.
- ▶ Mit $T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon$ wird eine Satzform aus Blöcken aA, bB erzeugt.
- ▶ Mit $Aa \rightarrow aA, Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB$ kommen A 's und B 's bis vor $\$$.
- ▶ Mit $A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \b werden die A 's und B 's in a 's und b 's verwandelt.
- ▶ Mit $\$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$$ wird das linke $\$$ zum rechten geschoben, mit $\$ \$ \rightarrow \epsilon$ werden die beiden $\$$'s dann eliminiert.
- ▶ Die relative Lage aller a 's zu b 's bzw. aller A 's zu B 's wird nie geändert.

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA,$
 $Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}.$ gilt
 $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}.$

Beweis (Fortsetzung)

“ $\subseteq$ ” Wir zeigen, dass alle Wörter in $L(G)$ von der Form ww sind.

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow \$T\$, T \rightarrow aAT, T \rightarrow bBT, T \rightarrow \epsilon, \$a \rightarrow a\$, \$b \rightarrow b\$, Aa \rightarrow aA,$
 $Ab \rightarrow bA, Ba \rightarrow aB, Bb \rightarrow bB, A\$ \rightarrow \$a, B\$ \rightarrow \$b, \$\$ \rightarrow \epsilon\}.$ gilt
 $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}.$

Beweis (Fortsetzung)

“ $\subseteq$ ” Wir zeigen, dass alle Wörter in $L(G)$ von der Form ww sind.

Alle Ableitungen müssen mit unwesentlichen Abweichungen von der unter “ $\supseteq$ ” angegebenen Form sein und deshalb zu ww führen. $\square$

Mehrdeutige Grammatiken

Beispiel: $(E, \{*, +, 1, 2\}, P, E)$ mit $P = \{E \rightarrow E * E, E \rightarrow E + E, E \rightarrow 1, E \rightarrow 2\}$

Zwei Ableitungen für $1 + 2 * 2$:

- ▶ $E \Rightarrow E * E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow 1 + E * E \Rightarrow 1 + 2 * E \Rightarrow 1 + 2 * 2$
- ▶ $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow 1 + E * E \Rightarrow 1 + 2 * E \Rightarrow 1 + 2 * 2$

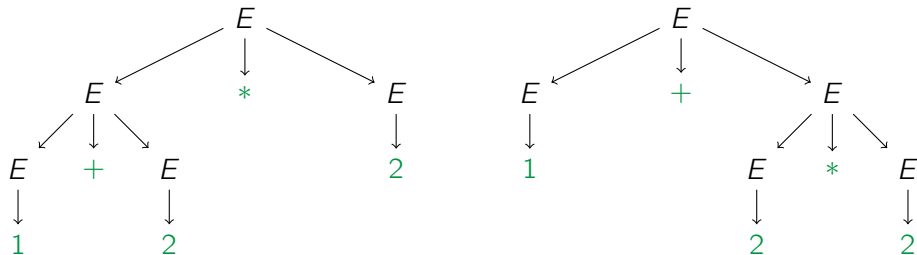
Mehrdeutige Grammatiken

Beispiel: $(E, \{*, +, 1, 2\}, P, E)$ mit $P = \{E \rightarrow E * E, E \rightarrow E + E, E \rightarrow 1, E \rightarrow 2\}$

Zwei Ableitungen für $1 + 2 * 2$:

- ▶ $E \Rightarrow E * E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow 1 + E * E \Rightarrow 1 + 2 * E \Rightarrow 1 + 2 * 2$
- ▶ $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow 1 + E * E \Rightarrow 1 + 2 * E \Rightarrow 1 + 2 * 2$

Syntaxbäume dazu:



Mehrdeutige Grammatiken

Definition

Eine Typ 2-Grammatik ist **mehrdeutig**, wenn es verschieden strukturierte Syntaxbäume für dasselbe Wort w gibt.

Definition

Eine Typ 2-Sprache ist **inhärent mehrdeutig**, wenn es nur mehrdeutige Grammatiken gibt, die diese Sprache erzeugen.

Mehrdeutige Grammatiken

Definition

Eine Typ 2-Grammatik ist **mehrdeutig**, wenn es verschieden strukturierte Syntaxbäume für dasselbe Wort w gibt.

Definition

Eine Typ 2-Sprache ist **inhärent mehrdeutig**, wenn es nur mehrdeutige Grammatiken gibt, die diese Sprache erzeugen.

Die Sprache

$$\{a^m b^m c^n d^n \mid m, n \in \mathbb{N}_{>0}\} \cup \{a^m b^n c^n d^m \mid m, n \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

ist inhärent mehrdeutig (Beweis in Hopcroft et al. 2006).

ε -Produktionen: 1. Sonderregel

- Das leere Wort ε kann bisher nicht für Typ 1, 2, 3-Grammatiken erzeugt werden. Produktion $S \rightarrow \varepsilon$ erfüllt die Typ 1-Bedingung $|S| \leq |\varepsilon|$ nicht.

ε -Produktionen: 1. Sonderregel

- Das leere Wort ε kann bisher nicht für Typ 1, 2, 3-Grammatiken erzeugt werden. Produktion $S \rightarrow \varepsilon$ erfüllt die Typ 1-Bedingung $|S| \leq |\varepsilon|$ nicht.

Daher:

1. Sonderregel: ε -Produktion in Typ 1, 2, 3-Grammatiken

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ vom Typ 1, 2 oder 3 darf eine Produktion $S \rightarrow \varepsilon \in P$ enthalten, vorausgesetzt, dass S auf keiner rechten Seite einer Produktion in P vorkommt.

ϵ -Produktionen: 1. Sonderregel

- Das leere Wort ϵ kann bisher nicht für Typ 1, 2, 3-Grammatiken erzeugt werden. Produktion $S \rightarrow \epsilon$ erfüllt die Typ 1-Bedingung $|S| \leq |\epsilon|$ nicht.

Daher:

1. Sonderregel: ϵ -Produktion in Typ 1, 2, 3-Grammatiken

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ vom Typ 1, 2 oder 3 darf eine Produktion $S \rightarrow \epsilon \in P$ enthalten, vorausgesetzt, dass S auf keiner rechten Seite einer Produktion in P vorkommt.

Sonderregel erlaubt nicht:

$$G = (\{S\}, \{a\}, \{S \rightarrow \epsilon, S \rightarrow aSa\}, S)$$

Sonderregel erlaubt:

$$G = (\{S', S\}, \{a\}, \{S' \rightarrow \epsilon, S' \rightarrow aSa, S \rightarrow aSa\}, S')$$

Leeres Wort hinzufügen geht mit 1. Sonderregel immer

Satz (Anwendung von 1. Sonderregel)

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ vom Typ $i \in \{1, 2, 3\}$ mit $\varepsilon \notin L(G)$. Sei $S' \notin V$.

Dann erzeugt $G' = (V \cup \{S'\}, \Sigma, P \cup \{S' \rightarrow \varepsilon\} \cup \{S' \rightarrow r \mid S \rightarrow r \in P\}, S')$ die Sprache $L(G') = L(G) \cup \{\varepsilon\}$, G' erfüllt die 1. Sonderregel und G' ist vom Typ i .

Leeres Wort hinzufügen geht mit 1. Sonderregel immer

Satz (Anwendung von 1. Sonderregel)

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ vom Typ $i \in \{1, 2, 3\}$ mit $\varepsilon \notin L(G)$. Sei $S' \notin V$.

Dann erzeugt $G' = (V \cup \{S'\}, \Sigma, P \cup \{S' \rightarrow \varepsilon\} \cup \{S' \rightarrow r \mid S \rightarrow r \in P\}, S')$ die Sprache $L(G') = L(G) \cup \{\varepsilon\}$, G' erfüllt die 1. Sonderregel und G' ist vom Typ i .

Beweis

1. $L(G') = L(G) \cup \{\varepsilon\}$: Da $S' \Rightarrow \varepsilon$, gilt $\varepsilon \in L(G')$.

Für $w \neq \varepsilon$ gilt:

$S \Rightarrow_G^* w$. g.d.w. $S' \Rightarrow_{G'}^* w$. Der jeweils erste Ableitungsschritt muss ausgetauscht werden, d.h. $S \Rightarrow_G r$ vs. $S' \Rightarrow_{G'} r$.

2. Da S' neu ist, kommt S' auf keiner rechten Seite vor.
3. Da $S \rightarrow r \in P$ vom Typ i sind, sind auch $S' \rightarrow r$ vom Typ i . □

ε -Produktionen: 2. Sonderregel

Weitere Sonderregel:

2. Sonderregel: ε -Produktionen in Typ 2- und Typ 3-Grammatiken

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ vom Typ 2 oder 3 darf Produktionen von der Form $A \rightarrow \varepsilon \in P$ enthalten, wo $A \in V \setminus \{S\}$.

ε -Produktionen: 2. Sonderregel

Weitere Sonderregel:

2. Sonderregel: ε -Produktionen in Typ 2- und Typ 3-Grammatiken

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ vom Typ 2 oder 3 darf Produktionen von der Form $A \rightarrow \varepsilon \in P$ enthalten, wo $A \in V \setminus \{S\}$.

Das ist keine echte Erweiterung, denn:

Satz (Entfernen von ε -Produktionen)

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Typ i -Grammatik (mit 1. und 2. Sonderregel), wo $i \in \{2, 3\}$. Dann gibt es eine Typ i -Grammatik G' mit $L(G') = L(G)$ und G' enthält keine ε -Produktionen außer $S \rightarrow \varepsilon$, falls vorhanden.

ε -Produktionen: 2. Sonderregel

Weitere Sonderregel:

2. Sonderregel: ε -Produktionen in Typ 2- und Typ 3-Grammatiken

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ vom Typ 2 oder 3 darf Produktionen von der Form $A \rightarrow \varepsilon \in P$ enthalten, wo $A \in V \setminus \{S\}$.

Das ist keine echte Erweiterung, denn:

Satz (Entfernen von ε -Produktionen)

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Typ i -Grammatik (mit 1. und 2. Sonderregel), wo $i \in \{2, 3\}$. Dann gibt es eine Typ i -Grammatik G' mit $L(G') = L(G)$ und G' enthält keine ε -Produktionen außer $S \rightarrow \varepsilon$, falls vorhanden.

Beweis Algorithmus 1 auf späterer Folie erzeugt G' . □

Entfernen von ε -Produktionen

Intuitiver Ansatz:

1. Wiederhole bis alle ε -Produktionen (außer $S \rightarrow \varepsilon$, falls vorhanden) entfernt sind:
 - 1.1 Sei $A \rightarrow \varepsilon \in P$, wo $A \neq S$.
 - 1.2 Entferne $A \rightarrow \varepsilon$.
 - 1.3 Für jede Produktion $B \rightarrow uAv$ füge eine neue Produktion $B \rightarrow uv$ hinzu, die den Ableitungsschritt $A \Rightarrow \varepsilon$ vorwegnimmt.

Entfernen von ε -Produktionen

Intuitiver Ansatz:

1. Wiederhole bis alle ε -Produktionen (außer $S \rightarrow \varepsilon$, falls vorhanden) entfernt sind:
 - 1.1 Sei $A \rightarrow \varepsilon \in P$, wo $A \neq S$.
 - 1.2 Entferne $A \rightarrow \varepsilon$.
 - 1.3 Für jede Produktion $B \rightarrow uAv$ füge eine neue Produktion $B \rightarrow uv$ hinzu, die den Ableitungsschritt $A \Rightarrow \varepsilon$ vorwegnimmt.

Mit anderen Worten: Statt $B \rightarrow uAv$ gefolgt von $A \rightarrow \varepsilon$ anzuwenden, können wir also $B \rightarrow uv$ direkt anwenden. Dann brauchen wir $A \rightarrow \varepsilon$ nicht mehr.

Entfernen von ε -Produktionen

Intuitiver Ansatz:

1. Wiederhole bis alle ε -Produktionen (außer $S \rightarrow \varepsilon$, falls vorhanden) entfernt sind:
 - 1.1 Sei $A \rightarrow \varepsilon \in P$, wo $A \neq S$.
 - 1.2 Entferne $A \rightarrow \varepsilon$.
 - 1.3 Für jede Produktion $B \rightarrow uAv$ füge eine neue Produktion $B \rightarrow uv$ hinzu, die den Ableitungsschritt $A \Rightarrow \varepsilon$ vorwegnimmt.

Mit anderen Worten: Statt $B \rightarrow uAv$ gefolgt von $A \rightarrow \varepsilon$ anzuwenden, können wir also $B \rightarrow uv$ direkt anwenden. Dann brauchen wir $A \rightarrow \varepsilon$ nicht mehr.

Für eine reguläre Produktion $B \rightarrow aA$ wird $B \rightarrow a$ hinzugefügt.
Die Grammatik bleibt regulär.

Entfernen von ε -Produktionen

Intuitiver Ansatz:

1. Wiederhole bis alle ε -Produktionen (außer $S \rightarrow \varepsilon$, falls vorhanden) entfernt sind:
 - 1.1 Sei $A \rightarrow \varepsilon \in P$, wo $A \neq S$.
 - 1.2 Entferne $A \rightarrow \varepsilon$.
 - 1.3 Für jede Produktion $B \rightarrow uAv$ füge eine neue Produktion $B \rightarrow uv$ hinzu, die den Ableitungsschritt $A \Rightarrow \varepsilon$ vorwegnimmt.

Mit anderen Worten: Statt $B \rightarrow uAv$ gefolgt von $A \rightarrow \varepsilon$ anzuwenden, können wir also $B \rightarrow uv$ direkt anwenden. Dann brauchen wir $A \rightarrow \varepsilon$ nicht mehr.

Für eine reguläre Produktion $B \rightarrow aA$ wird $B \rightarrow a$ hinzugefügt.
Die Grammatik bleibt regulär.

Algorithmus 1 basiert auf dieser Idee, entfernt aber alle ε -Produktionen gleichzeitig.

Beispiel für das Entfernen von ε -Produktionen

Typ 2-Grammatik mit ε -Produktion:

$G = (\{A, S\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit $P = \{S \rightarrow AA1, A \rightarrow 0, A \rightarrow \varepsilon\}$

Beispiel für das Entfernen von ε -Produktionen

Typ 2-Grammatik mit ε -Produktion:

$G = (\{A, S\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit $P = \{S \rightarrow AA1, A \rightarrow 0, A \rightarrow \varepsilon\}$

$L(G) = \{001, 01, 1\}$

Beispiel für das Entfernen von ε -Produktionen

Typ 2-Grammatik **mit** ε -Produktion:

$G = (\{A, S\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit $P = \{S \rightarrow AA1, A \rightarrow 0, A \rightarrow \varepsilon\}$

$L(G) = \{001, 01, 1\}$

Äquivalente Typ 2-Grammatik **ohne** ε -Produktion:

$G' = (\{A, S\}, \{0, 1\}, P', S)$ mit $P' = \{S \rightarrow AA1, S \rightarrow A1, S \rightarrow 1, A \rightarrow 0\}$

Beispiel für das Entfernen von ε -Produktionen

Typ 2-Grammatik **mit** ε -Produktion:

$G = (\{A, S\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit $P = \{S \rightarrow AA1, A \rightarrow 0, A \rightarrow \varepsilon\}$

$L(G) = \{001, 01, 1\}$

Äquivalente Typ 2-Grammatik **ohne** ε -Produktion:

$G' = (\{A, S\}, \{0, 1\}, P', S)$ mit $P' = \{S \rightarrow AA1, S \rightarrow A1, S \rightarrow 1, A \rightarrow 0\}$

$L(G') = \{001, 01, 1\}$

Beispiel für das Entfernen von ε -Produktionen

Typ 2-Grammatik **mit** ε -Produktion:

$G = (\{A, S\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit $P = \{S \rightarrow AA1, A \rightarrow 0, A \rightarrow \varepsilon\}$

$L(G) = \{001, 01, 1\}$

Äquivalente Typ 2-Grammatik **ohne** ε -Produktion:

$G' = (\{A, S\}, \{0, 1\}, P', S)$ mit $P' = \{S \rightarrow AA1, S \rightarrow A1, S \rightarrow 1, A \rightarrow 0\}$

$L(G') = \{001, 01, 1\}$

Die neuen Produktionen $S \rightarrow A1$, $S \rightarrow 1$ nehmen den Ableitungsschritt $A \Rightarrow \varepsilon$ vorweg.

Algorithmus 1: Entfernen von ε -Produktionen

Eingabe: Typ i -Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit ε -Produktionen, $i \in \{2, 3\}$

Ausgabe: Typ i -Grammatik G' ohne ε -Produktionen (außer $S \rightarrow \varepsilon$, falls vorhanden), sodass $L(G') = L(G)$

Beginn

finde die Menge $W \subseteq V$ aller Variablen A für die gilt $A \Rightarrow^* \varepsilon$:

Beginn

$W := \{A \mid A \rightarrow \varepsilon \in P \text{ und } A \neq S\};$

wiederhole

füge alle A zu W hinzu mit $A \rightarrow A_1 \dots A_n \in P$ und $\forall i : A_i \in W$;

bis sich W nicht mehr ändert;

Ende

$P' := P \setminus \{A \rightarrow \varepsilon \mid A \rightarrow \varepsilon \in P \text{ und } A \neq S\};$

/ lösche Produktionen $A \rightarrow \varepsilon$ */*

wiederhole

für alle Produktionen $B \rightarrow uAv \in P'$ mit $|uv| > 0$ und $A \in W$ **tue**

füge die Produktion $B \rightarrow uv$ zu P' hinzu;

/ für $B \rightarrow u'Av'Aw'$ gibt es (mindestens) zwei Hinzufügungen: Für das Vorkommen von A direkt nach u' als auch für das Vorkommen direkt vor w' */*

Ende

bis sich P' nicht mehr ändert;

gib $G' = (V, \Sigma, P', S)$ als Ergebnisgrammatik aus;

Ende

Weiteres Beispiel für das Entfernen von ε -Produktionen

$G = (\{A, B, C, D, S\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow 1A, A \rightarrow AB, A \rightarrow DA, A \rightarrow \varepsilon, B \rightarrow 0,$
 $B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, D \rightarrow 1AC\}$

Weiteres Beispiel für das Entfernen von ϵ -Produktionen

$G = (\{A, B, C, D, S\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow 1A, A \rightarrow AB, A \rightarrow DA, A \rightarrow \epsilon, B \rightarrow 0,$
 $B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, D \rightarrow 1AC\}$

1. Finde Menge W der Variablen, die ϵ herleiten:

$W = \{A, C\}$ da $A \rightarrow \epsilon$ und $C \rightarrow AAA$

Weiteres Beispiel für das Entfernen von ε -Produktionen

$G = (\{A, B, C, D, S\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow 1A, A \rightarrow AB, A \rightarrow DA, A \rightarrow \varepsilon, B \rightarrow 0,$
 $B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, D \rightarrow 1AC\}$

1. Finde Menge W der Variablen, die ε herleiten:

$W = \{A, C\}$ da $A \rightarrow \varepsilon$ und $C \rightarrow AAA$

2. Starte mit

$P' = \{S \rightarrow 1A, A \rightarrow AB, A \rightarrow DA, B \rightarrow 0,$
 $B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, D \rightarrow 1AC\}$

Weiteres Beispiel für das Entfernen von ϵ -Produktionen

$G = (\{A, B, C, D, S\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit
 $P = \{S \rightarrow 1A, A \rightarrow AB, A \rightarrow DA, A \rightarrow \epsilon, B \rightarrow 0,$
 $B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, D \rightarrow 1AC\}$

1. Finde Menge W der Variablen, die ϵ herleiten:

$W = \{A, C\}$ da $A \rightarrow \epsilon$ und $C \rightarrow AAA$

2. Starte mit

$P' = \{S \rightarrow 1A, A \rightarrow AB, A \rightarrow DA, B \rightarrow 0,$
 $B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, D \rightarrow 1AC\}$

3. Füge Produktionen für Vorkommen von A und C hinzu:

$P' = \{S \rightarrow 1A, S \rightarrow 1, A \rightarrow AB, A \rightarrow B, A \rightarrow DA, A \rightarrow D,$
 $B \rightarrow 0, B \rightarrow 1, C \rightarrow AAA, C \rightarrow AA, C \rightarrow A,$
 $D \rightarrow 1AC, D \rightarrow 1A, D \rightarrow 1C, D \rightarrow 1\}$