Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Elisabeth Lempa
Luca Maio

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Besprechung 10.07.2025 bis 14.07.2025
Abgabe bis 21.07.2025, 10:00 Uhr

Lösungsvorschlag zur Klausurvorbereitungsaufgabe zur Übung 10 zur Vorlesung
Theoretische Informatik für Studierende der Medieninformatik

Klausurvorbereitung TIMI-10-K

a) Wir betrachten das EVENPCP-Problem, eine Variante von LPCP, bei der die Wörter auf den Spielsteinen gerade Länge haben müssen. Eine Instanz von EVENPCP ist also eine endliche Folge von Paaren $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ mit $x_i, y_i \in \{w \mid w \in \Sigma^* \text{ und } |w| \text{ gerade}\}$ für $i = 1, \dots, n$. Beispielsweise ist $(ab, aaba)$ ein erlaubter Spielstein; (ab, aab) aber nicht.

Zeigen Sie durch Reduktion von PCP auf EVENPCP, dass EVENPCP unentscheidbar ist.

LÖSUNGSVORSCHLAG:
Wir zeigen PCP $\leq$ EVENPCP. Da PCP unentscheidbar ist, folgt daraus, dass auch EVENPCP unentscheidbar ist.

Sei $K = ((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$ eine Instanz von PCP mit Alphabet Σ. Wir definieren für jedes Wort $w = z_1 \cdots z_p$ mit $z_i \in \Sigma$ das Wort $f(w) = z_1 z_1 \cdots z_p z_p$. Damit ist $|f(w)|$ gerade. Definiere nun die EVENPCP-Instanz $f(K) = ((f(x_1), f(y_1)), \dots, (f(x_n), f(y_n)))$. Offensichtlich ist f total und berechenbar. Außerdem ist f kompatibel mit Konkatenation: $f(u \circ v) = f(u) \circ f(v)$ für alle $u, v \in \Sigma^*$. Es gilt somit:

- Wenn $K \in$ PCP ist, dann hat K eine Lösung $i_1, \dots, i_m$ mit $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{i_1} \cdots y_{i_m}$. Dann ist auch

  $$f(x_{i_1}) \cdots f(x_{i_m}) = f(x_{i_1} \cdots x_{i_m}) = f(y_{i_1} \cdots y_{i_m}) = f(y_{i_1}) \cdots f(y_{i_m})$$

  und es ist also $i_1, \dots, i_m$ eine Lösung für $f(K)$, somit $f(K) \in$ EVENPCP.

- Wenn $f(K) \in$ EVENPCP ist, dann hat $f(K)$ eine Lösung $i_1, \dots, i_m$ mit $f(x_{i_1}) \cdots f(x_{i_m}) = f(y_{i_1}) \cdots f(y_{i_m})$. Wir definieren die Funktion g, die aus einem Wort mit gerader Länge p jeden zweiten Buchstaben entfernt: $g(z_1 z_2 z_3 \cdots z_{p-1} z_p) = z_1 z_3 \cdots z_{p-1}$. Damit ist g linksinvers zu f, d.h. $g(f(w)) = w$ für alle $w \in \Sigma^*$. Es gilt also:

$$x_{i_1} \cdots x_{i_m} = g(f(x_{i_1} \cdots x_{i_m})) = g(f(x_{i_1}) \cdots f(x_{i_m})) =$$
$$g(f(y_{i_1}) \cdots f(y_{i_m})) = g(f(y_{i_1} \cdots y_{i_m})) = y_{i_1} \cdots y_{i_m}$$

Somit ist $i_1, \ldots, i_m$ auch eine Lösung für K und $K \in$ PCP.

b) Sei $A = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w$ hält bei Eingabe 36 mit Ausgabe 42 an$\}$. Der folgende Beweis zur Unentscheidbarkeit von A ist falsch. Lokalisieren Sie den Fehler und begründen Sie, wieso der Beweis falsch ist.

Beweis:
Wir zeigen $H_0 \leq A$. Da H_0 unentscheidbar ist, folgt daraus, dass auch A unentscheidbar ist.

Wir definieren die Reduktionsfunktion $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ wie folgt. Für $w \in \{0,1\}^*$ berechnet f zunächst die Turingmaschine M_w, erstellt daraus eine Turingmaschine T und berechnet anschließend deren Binärcodierung w_T. Dabei verhält sich T wie folgt:

- Prüfe, ob auf dem Band die Zahl 36 (in Binärdarstellung) steht. Falls nein, gehe in eine Endlosschleife über.
- Führe M_w aus.
- Falls M_w anhält, schreibe die Zahl 42 (in Binärdarstellung) auf das Band und akzeptiere.

Die Funktion f ist offensichtlich total. Sie ist auch berechenbar, da T konstruierbar ist. Weiterhin gilt:

	$w \in H_0$
g.d.w.	M_w hält auf leerem Band
g.d.w.	$M_{f(w)}$ hält für Eingabe 36 mit Ausgabe 42
g.d.w.	$f(w) \in A$

Somit ist f eine valide Reduktionsfunktion und $H_0 \leq A$.

LÖSUNGSVORSCHLAG:
Die von f für w konstruierte Turingmaschine löscht nicht das Band, bevor sie M_w ausführt. Somit testet sie nicht, ob M_w auf dem leeren Band hält. Die Aussage „M_w hält auf dem leeren Band g.d.w. $M_{f(w)}$ für Eingabe 36 mit Ausgabe 42 hält“ ist also falsch.