

Lösungsvorschlag zur Klausurvorbereitungsaufgabe zur Übung 9 zur
Vorlesung

Theoretische Informatik für Studierende der Medieninformatik

Klausurvorbereitung TIMI-9-K

- a) Das Problem, ob $L(M) \neq \emptyset$ für eine gegebene Turingmaschine M gilt, ist unentscheidbar. Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit, indem sie H_0 darauf reduzieren. **Hinweis:** In früheren Versionen dieses Blattes gab es leider Tippfehler in der Angabe, und es sollte die Unentscheidbarkeit für das Problem $L(M) = \emptyset$ durch Reduktion auf H_0 gezeigt werden. Wir bitten diese beiden Fehler zu entschuldigen.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Sei P die Menge der Turingmaschinen M (binär kodiert), für die $L(M) \neq \emptyset$ ist. Wir zeigen: $H_0 \leq P$ und somit ist P unentscheidbar.

Um $H_0 \leq P$ zu zeigen, definieren wir die Funktion f , die die (binär kodierte) Turingmaschine M auf eine (binär kodierte) Turingmaschine M' abbildet. Dabei verhält sich M' wie folgt: Ist die Eingabe nicht das leere Wort, so akzeptiert M' nicht. Ist die Eingabe das leere Wort, so simuliert M' zunächst M auf dem leeren Wort und akzeptiert dann (sofern M gehalten hat). M' akzeptiert also höchstens das leere Wort, und das genau dann wenn M das leere Wort akzeptiert. Die Funktion ist offensichtlich total und berechenbar.

Somit gilt:

$$\begin{aligned} & M \in H_0 \\ \Rightarrow & M \text{ hält auf } \varepsilon \\ \Rightarrow & M' \text{ hält auf } \varepsilon \\ \Rightarrow & \varepsilon \in L(M') \\ \Rightarrow & L(M') \neq \emptyset \\ \Rightarrow & f(M) \in P \end{aligned}$$

und

$M \notin H_0$
 $\Rightarrow M$ hält nicht auf ε
 $\Rightarrow M'$ hält auf keiner Eingabe
 $\Rightarrow L(M') = \emptyset$
 $\Rightarrow f(M) \notin P$