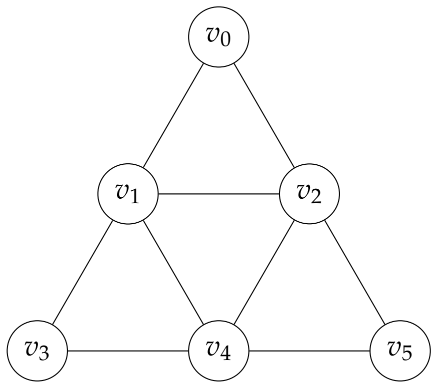
Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Elisabeth Lempa
Luca Maio

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Besprechung 17.07.2025 bis 21.07.2025
Abgabe bis 28.07.2025, 10:00 Uhr

Lösungsvorschlag zur Übung 11 zur Vorlesung
Theoretische Informatik für Studierende der Medieninformatik

TIMI11-1 ***$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von Graphenproblemen***

Der Graph G sei:



a) Das Independent-Clique-Problem (ICP) beantwortet für einen Graphen G und eine natürliche Zahl n die Frage, ob es in G eine Clique C der Größe n und eine unabhängige Knotenmenge I der Größe n gibt, sodass $|C \cap I| = 1$ gilt.

Beantworten Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Frage, ob $(G, n) \in$ ICP gilt. Begründen Sie Ihre Antworten.

LÖSUNGSVORSCHLAG:
Als Bemerkung: Eine Clique und eine unabhängige Knotenmenge können sowieso nur maximal einen Knoten gemeinsam haben.

- Für $n = 1$: Jeder der 6 Knoten allein ist eine Clique und eine unabhängige Knotenmenge. Daher gilt $(G, 1) \in$ ICP.
- Für $n = 2$: Wähle zwei verbundene Knoten für die Clique, einen der beiden Knoten und einen nicht mit ihm verbundenen Knoten für die unabhängige Knotenmenge. Diese gibt es, z.B. $C = \{v_0, v_1\}$, $I = \{v_0, v_3\}$, also ist $(G, 2) \in$ ICP.
- Für $n = 3$: Wähle $C = \{v_0, v_1, v_2\}$ und $I = \{v_0, v_3, v_5\}$, somit $(G, 3) \in$ ICP.

- Für $n \geq 4$: Der Graph hat keine Clique der Größe 4 oder größer. Daher ist $(G, n) \notin$ ICP für alle $n \geq 4$.

b) Das Well-Liked-Clique-Problem (WLCP) beantwortet für einen Graphen G und eine natürliche Zahl n die Frage, ob es in G eine Clique C der Größe n gibt, sodass es für alle Knoten v in $G \setminus C$ einen Knoten u in C gibt, sodass $(u, v) \in E$. (Oder in Worten: Wenn es eine Clique der Größe n gibt, sodass alle Knoten außerhalb der Clique mit mindestens einem Knoten innerhalb der Clique verbunden sind.)

Beantworten Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Frage, ob $(G, n) \in$ WLCP gilt. Begründen Sie Ihre Antworten.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

- Für $n = 1$: Jeder der 6 Knoten allein ist eine Clique. Es gibt aber keinen Knoten, der mit allen anderen Knoten des Graphen verbunden ist. Daher gilt $(G, 1) \notin$ WLCP.
- Für $n = 2$: Wähle zwei Knoten aus $\{v_1, v_2, v_4\}$ als Clique. $(G, 2) \in$ WLCP.
- Für $n = 3$: Wähle $C = \{v_0, v_1, v_2\}$, somit $(G, 3) \in$ WLCP.
- Für $n \geq 4$: Der Graph hat keine Clique der Größe 4 oder größer. Daher ist $(G, n) \notin$ ICP für alle $n \geq 4$.

c) Zeigen Sie, dass ICP $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

- ICP $\in \mathcal{NP}$: Rate nichtdeterministisch eine Knotenmenge C und eine Knotenmenge I von jeweils n Knoten. Verifiziere anschließend, ob C eine Clique, I eine unabhängige Knotenmenge und C und I genau einen gemeinsamen Knoten haben. Wenn ja, akzeptiere, wenn nein, verwirf. Das Verifizieren ist in deterministischer Polynomialzeit möglich.
- ICP ist $\mathcal{NP}$-schwer: Wir reduzieren CLIQUE auf ICP mit einer Polynomialzeitreduktion. Da CLIQUE $\mathcal{NP}$-vollständig ist, ist ICP damit $\mathcal{NP}$-schwer.

  Sei $f((V, E, k)) = (V', E, k)$, wobei $V' = V \cup \{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$, sodass $\forall i \in \{1, \ldots, k-1\} : v_i \notin V$ (d.h. $v_1, \ldots, v_{k-1}$ sind neue Knoten).

  Damit ist f total und in Polynomialzeit berechenbar. Wir zeigen die

Korrektheit von f:

– Wenn (V, E, k) eine k-Clique hat, dann hat (V', E, k) ebenfalls eine k-Clique. Sei u ein beliebiger Knoten dieser Clique. Dann ist $\{u, v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ eine unabhängige Knotenmenge der Größe k, somit $(V', E, k) \in$ ICP.
– Wenn (V, E, k) keine k-Clique hat, dann hat (V', E, k) ebenfalls keine k-Clique, somit $(V', E, k) \notin$ ICP.

TIMI11-2 ***SAT-Varianten in $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NP}$*** (0 Punkte)

a) Sei UNSAT = $\{F \mid F \text{ ist eine widersprüchliche Formel}\}$. Nehmen Sie an, dass UNSAT in $\mathcal{NP}$ ist.

Wir betrachten folgende Reduktionsfunktion von SAT auf UNSAT: Teste alle möglichen Variablenbelegungen der Formel. Wenn eine erfüllende Variablenbelegung gefunden wurde, gib $x \land \neg x$ zurück, ansonsten x.

Ist diese Reduktionsfunktion geeignet, um zu zeigen, dass UNSAT $\mathcal{NP}$-vollständig ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

LÖSUNGSVORSCHLAG:
Nein, denn diese Reduktionsfunktion hat keine polynomielle, sondern exponentielle Laufzeit, da sie exponentiell viele Schritte braucht um alle möglichen Variablenbelegungen zu testen.

b) Sei 3mal-3SAT = $\left\{ F \;\middle|\; \begin{array}{l} F \text{ ist eine 3-CNF und hat mindestens} \\ \text{3 verschiedene erfüllende Belegungen} \end{array} \right\}$.

Zeigen Sie, dass 3mal-3SAT $\mathcal{NP}$-vollständig ist, wobei Sie für den Nachweis der $\mathcal{NP}$-Schwere eine Reduktion von 3-CNF-SAT auf 3mal-3SAT durchführen.

Hinweis: Was könnten Sie in der benötigten Reduktionsfunktion f hinzufügen, um aus einer erfüllenden Belegung drei erfüllende Belegungen zu erzeugen?

LÖSUNGSVORSCHLAG:
Für die $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von 3mal-3SAT ist zu zeigen:

- 3mal-3SAT ist in $\mathcal{NP}$: Betrachte die folgende NTM M:
  – M berechnet aus F die Menge der in F vorkommenden aussagenlogischen Variablen.
  – M rät nichtdeterministisch ein Tupel von Belegungen (I_1, I_2, I_3) der Variablen von F. Das geht in nichtdeterministischer Polyno-

mialzeit, indem man I_1 für jede Variable x in die Möglichkeiten $x = 0$ und $x = 1$ nichtdeterministisch verzweigt, für I_2 nochmal dasselbe durchführt, und für I_3 auch nochmal dasselbe.

– Falls $I_1 = I_2$, $I_1 = I_3$ oder $I_2 = I_3$ verwirf diese nichtdeterministische Berechnung (der Test kann in Polynomialzeit durchgeführt werden).

– Sonst prüfe, ob $I_1(F) = 1$, $I_2(F) = 1$ und $I_3(F) = 1$. Wenn ja, dann akzeptiere, anderenfalls verwirf diese nichtdeterministische Berechnung (die Tests können dabei in Polynomialzeit durchgeführt werden).

M entscheidet 3mal-3SAT (denn es werden 3 verschiedene Lösungen gesucht) und M benötigt nur polynomiell viele Schritte (denn es handelt sich um eine Hintereinanderausführung von endlich vielen jeweils polynomiell langen Abfolgen von Schritten). Somit ist 3mal-3SAT in $\mathcal{NP}$.

- 3mal-3SAT ist $\mathcal{NP}$-schwer. Wir reduzieren 3-CNF-SAT $\leq_p$ 3mal-3SAT. Dazu definieren wir zunächst die Reduktionsfunktion f:

$$f(F) = F \wedge (x \vee y \vee z)$$

Dabei sind x, y und z neue Variablen. Die Funktion f ist total und in Polynomialzeit berechenbar.

Wir zeigen: F ist erfüllbar g.d.w. $f(F)$ dreimal erfüllbar ist:

– „$\Rightarrow$“: Wenn $I(F) = 1$, dann machen $I_1 = I \cup \{x \mapsto 1, y \mapsto 0, z \mapsto 0\}$, $I_2 = I \cup \{x \mapsto 0, y \mapsto 1, z \mapsto 0\}$ und $I_3 = I \cup \{x \mapsto 0, y \mapsto 0, z \mapsto 1\}$ alle F wahr.

– „$\Leftarrow$“: Wenn $I_i(F \wedge (x \vee y \vee z)) = 1$ für $i = 1, 2, 3$, dann sei $I(v) = I_1(v)$ für alle Variablen v aus F. Dann gilt $I(F) = 1$.

Damit folgt 3-CNF-SAT $\leq_p$ 3mal-3SAT.

c) Sei Pos-3-SAT = $\left\{ F \;\middle|\; \begin{array}{l} F \text{ ist eine erfüllbare 3-CNF, in der ausschließlich} \\ \text{positive Literale vorkommen} \end{array} \right\}$.

i) Liegt Pos-3-SAT in $\mathcal{P}$?

LÖSUNGSVORSCHLAG:
Eine Pos-3-SAT-Formel ist bereits erfüllbar, wenn jede Klausel mindestens eine Variable enthält: Wenn man alle Variablen auf 1 setzt, sind alle Klauseln erfüllt. Das ist in Polynomialzeit überprüfbar.

Ferner muss noch überprüft werden, ob das Wort eine gültige Kodierung einer Formel ist; auch das ist in Polynomialzeit überprüfbar.

Also liegt Pos-3-SAT in $\mathcal{P}$.

ii) Liegt Pos-3-SAT in $\mathcal{NP}$?

LÖSUNGSVORSCHLAG: $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$, somit liegt Pos-3-SAT auch in $\mathcal{NP}$.

Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.