Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Elisabeth Lempa
Luca Maio

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Besprechung 30.06.2025 bis 07.07.2025
Abgabe bis 14.07.2025, 10:00 Uhr

Lösungsvorschlag zur Klausurvorbereitungsaufgabe zur Übung 9 zur Vorlesung

Formale Sprachen und Komplexität

Klausurvorbereitung FSK-9-K

a) Das Problem, ob $L(M) \neq \emptyset$ für eine gegebene Turingmaschine M gilt, ist unentscheidbar. Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit, indem sie H_0 darauf reduzieren. **Hinweis:** In früheren Versionen dieses Blattes gab es leider Tippfehler in der Angabe, und es sollte die Unentscheidbarkeit für das Problem $L(M) = \emptyset$ durch Reduktion auf H_0 gezeigt werden. Wir bitten diese beiden Fehler zu entschuldigen.

LÖSUNGSVORSCHLAG:
Sei P die Menge der Turingmaschinen M (binär kodiert), für die $L(M) \neq \emptyset$ ist. Wir zeigen: $H_0 \leq P$ und somit ist P unentscheidbar.

Um $H_0 \leq P$ zu zeigen, definieren wir die Funktion f, die die (binär kodierte) Turingmaschine M auf eine (binär kodierte) Turingmaschine M' abbildet. Dabei verhält sich M' wie folgt: Ist die Eingabe nicht das leere Wort, so akzeptiert M' nicht. Ist die Eingabe das leere Wort, so simuliert M' zunächst M auf dem leeren Wort und akzeptiert dann (sofern M gehalten hat). M' akzeptiert also höchstens das leere Wort, und das genau dann wenn M das leere Wort akzeptiert. Die Funktion ist offensichtlich total und berechenbar.

Somit gilt:

$$\begin{array}{rl} & M \in H_0 \\ \Rightarrow & M \text{ hält auf } \varepsilon \\ \Rightarrow & M' \text{ hält auf } \varepsilon \\ \Rightarrow & \varepsilon \in L(M') \\ \Rightarrow & L(M') \neq \emptyset \\ \Rightarrow & f(M) \in P \end{array}$$

und

$$
\begin{array}{ll}
 & M \notin H_0 \\
\Rightarrow & M \text{ hält nicht auf } \varepsilon \\
\Rightarrow & M' \text{ hält auf keiner Eingabe} \\
\Rightarrow & L(M') = \emptyset \\
\Rightarrow & f(M) \notin P
\end{array}
$$

b) Zeigen Sie, dass die Logarithmusfunktion

$$log\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \quad log(x_1, x_2) = \log_{x_1} x_2$$

μ-rekursiv ist. Beachten Sie, dass der Logarithmus für natürliche Zahlen nicht überall definiert ist. Es gilt:

$$log(x_1, x_2) = n \iff x_1^n = x_2$$

LÖSUNGSVORSCHLAG:
Für *log* gilt:

$$log(x_1, x_2) = n \iff x_1^n = x_2 \iff |x_1^n - x_2| = 0$$

Wir definieren also die primitiv rekursiv Funktion log':

$$
\begin{aligned}
log'(n, x_1, x_2) &= absdiff(exp(x_1, n), x_2) \\
&= absdiff(exp(\pi_2^3(n, x_1, x_2), \pi_1^3(n, x_1, x_2)), \pi_3^3(n, x_1, x_2))
\end{aligned}
$$

Die Logarithmusfunktion ist dann

$$log = \mu log'$$