Lösungsvorschlag zur Klausurvorbereitungsaufgabe zur Übung 5 zur
Vorlesung
Formale Sprachen und Komplexität

Klausurvorbereitung FSK-5-K

- a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumpinglemmas für reguläre Sprachen, dass die Sprache $L_1 := \{w \mid \#_a(w) < \#_b(w) + \#_c(w)\}$ (die Sprache der Wörter, die in Summe mehr b's und c's als a's enthalten,) nicht regulär ist.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Wir nehmen an, L_1 ist regulär. D.h. die Pumping-Eigenschaft gilt für L_1 .

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ die "Pumpingzahl" von L_1 .

Wir wählen das Wort $z = a^n b^n c^n \in L_1$ mit $|z| \geq n$.

Betrachte nun Zerlegungen $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| > 0$ und $uv^i w \in L_1$ für jedes $i \in \mathbb{N}$.

Wir zeigen, dass es stets ein $i \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $uv^i w \notin L_1$ ist. Aus den ersten zwei Eigenschaften der Zerlegungen folgt, dass jede Zerlegung die Form $u = a^j, v = a^k, w = a^l b^n c^n$ hat mit $j + k + l = n$, $j + k \leq n$ und $k > 0$. Dies bedeutet, v enthält immer mindestens ein a . Wählen wir nun $i = 2n = \#_b(z) + \#_c(z)$. Dann gilt $\#_a(uv^i w) = j + 2nk + l \geq 2n = \#_b(z) + \#_c(z)$, da $k > 0$ und somit $uv^i w \notin L_1$. Dies verletzt aber die Annahme, dass $uv^i w \in L_1$ für jedes i . Widerspruch.

- b) Bestimmen Sie den Nerode-Index der Sprache $L_2 = \{w\bar{w}w \mid w \in \Sigma_2^*\}$ mit $\Sigma_2 = \{a, b\}$.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

Der Nerode-Index ist unendlich. Betrachte für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Wörter $u_i = a^i b$ und $w_i = ba^{2i} b$. Es ist $u_i w_i = a^i b b a^{2i} b \in L_2$, aber $u_j w_i = a^j b b a^{2i} b \notin L_2$ für jedes $j \neq i$. Somit ist $[u_i] \neq [u_j]$ für alle $i \neq j$ und es gibt unendlich viele verschiedene Äquivalenzklassen, d.h. $\text{Index}(\sim_{L_2}) = \infty$. Somit ist L_2 nicht regulär.