

## Übung 5 zur Vorlesung Formale Sprachen und Komplexität

### Hinweis:

Die letzte Aufgabe auf diesem Blatt ist eine Aufgabe zur Klausurvorbereitung. Diese Aufgabe orientiert sich in Form und inhaltlichen Schwerpunkten an den Klausuraufgaben. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die anderen Aufgaben nicht klausurrelevant sind.

Die Lösungen der Klausurvorbereitungs-Aufgaben werden am Ende der Bearbeitungszeit gesondert veröffentlicht, aber **nicht** im Tutorium besprochen. Die Lösungen der anderen Aufgaben werden bereits zu Beginn der Bearbeitungszeit veröffentlicht und können Ihnen bei der Bearbeitung helfen.

Wenn Sie Ihre Lösung innerhalb der Bearbeitungszeit über Moodle abgeben, erhalten Sie eine individuelle Korrektur. Die Abgabe ist freiwillig (aber nachdrücklich empfohlen).

### FSK5-1 Myhill und Nerode

(2 Punkte)

- a) Sei  $L = L(ab^*c)$  eine Sprache über dem Alphabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$ . Geben Sie für jedes der folgenden Wörter  $u_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , eine kompakte Beschreibung der Äquivalenzklasse  $[u_i]$  der Nerode-Relation von  $L$  an.
- i)  $u_1 = abb$
  - ii)  $u_2 = \varepsilon$
  - iii)  $u_3 = c$
- b) Bestimmen Sie den Nerode-Index folgender Sprachen  $L_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , über Alphabet  $\Sigma_i$  und entscheiden Sie mit dem Satz von Myhill und Nerode, welche der Sprachen regulär sind. Geben Sie für jede Sprache mit endlichem Nerode-Index alle paarweise verschiedenen Äquivalenzklassen an (1 Repräsentant pro Klasse).
- i)  $L_1 = \{aaab, aabb, abab, abbb, baab, babb, bbab, bbbb\}$  mit  $\Sigma_1 = \{a, b\}$
  - ii)  $L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} \text{ und wenn } i = 2, \text{ dann } j < k\}$  mit  $\Sigma_3 = \{a, b, c\}$

**FSK5-2 Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen**

(2 Punkte)

Zeigen Sie mit dem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, dass die Sprache  $L = \{w\bar{w}w \mid w \in \Sigma^*\}$  über dem Alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$  nicht kontextfrei ist.

**FSK5-3 Reguläre und nicht-reguläre Sprachen**

(0 Punkte)

- a) Zeigen Sie, dass die Sprache  $\{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} \text{ und wenn } i = 2, \text{ dann } j < k\}$  über dem Alphabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$  die Pumping-Eigenschaft erfüllt.
- b) Sind die folgenden Sprachen  $L_i, i \in \{1, 2, 3\}$ , über den Alphabeten  $\Sigma_i$  regulär? Wenn ja, geben Sie einen regulären Ausdruck an, der  $L_i$  erkennt. (Sie müssen nicht beweisen, dass der reguläre Ausdruck  $L_i$  erkennt.) Wenn nein, zeigen Sie die Nichtregularität mit dem Pumping-Lemma für reguläre Sprachen.
- i)  $L_1 = \{a^i b a^j b \mid i, j \in \mathbb{N}\}$  mit  $\Sigma_1 = \{a, b, c\}$
- ii)  $L_2 = \{a^p b^p \mid p \in \mathbb{N} \text{ ist prim}\}$  mit  $\Sigma_2 = \{a, b\}$
- iii)  $L_3 = \{a^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$  mit  $\Sigma_3 = \{a\}$ .

**FSK5-4 Konservative Erweiterungen regulärer Ausdrücke**

(0 Punkte)

In der Praxis werden reguläre Ausdrücke häufig mit weiteren Operatoren erweitert. Eine solche Erweiterung ist *konservativ*, wenn die erweiterten regulären Ausdrücke nur reguläre Sprachen beschreiben. Geben Sie in jeder Teilaufgabe an, ob die beschriebene Erweiterung konservativ ist, und beweisen Sie Ihre Antwort. Dabei sei  $\alpha$  ein regulärer Ausdruck über einem beliebigen Alphabet.

- a)  $\alpha?$ : Teilwörter, die von  $\alpha$  erkannt werden, dürfen vorkommen, müssen aber nicht. Die Semantik von  $\alpha?$  ist also  $L(\alpha?) = \{\varepsilon\} \cup L(\alpha)$ .
- b)  $\alpha^+$ : wie  $\alpha^*$ , aber  $\alpha$  muss mindestens einmal vorkommen.

$$L(\alpha^+) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_{>0}} L(\alpha)^i = L(\alpha) \cup L(\alpha)^2 \cup L(\alpha)^3 \cup \dots$$

- c)  $\alpha^{\{i,j\}}$  mit  $i, j \in \mathbb{N}$  und  $i \leq j$ : wie  $\alpha^*$ , aber  $\alpha$  muss mindestens  $i$ -mal und darf höchstens  $j$ -mal wiederholt werden.

$$L(\alpha^{\{i,j\}}) = \bigcup_{k=i}^j L(\alpha)^k = L(\alpha)^i \cup L(\alpha)^{i+1} \cup L(\alpha)^{i+2} \cup \dots \cup L(\alpha)^j$$

- d)  $\backslash n$  mit  $n \in \mathbb{N}$ . In einem regulären Ausdruck  $\alpha$  bezeichnen wir den  $n$ -ten Teilausdruck der Form  $(\alpha_0)$  (wobei  $\alpha_0$  ein regulärer Ausdruck ist) als die  $n$ -te Capturing Group. Ein Teilausdruck  $\backslash n$  in  $\alpha$  wird dann als Backreference bezeichnet und erkennt genau die Zeichenkette, die von  $\alpha_0$  erkannt wurde. Beispielsweise erkennt  $(a|b)\backslash 1$  die Wörter  $aa$  und  $bb$ , aber nicht  $ab$  oder  $ba$ .

### Klausurvorbereitung FSK-5-K

- a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumpinglemmas für reguläre Sprachen, dass die Sprache  $L_1 := \{w \mid \#_a(w) < \#_b(w) + \#_c(w)\}$  (die Sprache der Wörter, die in Summe mehr b's und c's als a's enthalten,) nicht regulär ist.
- b) Bestimmen Sie den Nerode-Index der Sprache  $L_2 = \{w\bar{w}w \mid w \in \Sigma_2^*\}$  mit  $\Sigma_2 = \{a, b\}$ .