Übung 1 zur Vorlesung Formale Sprachen und Komplexität

Hinweis:

Die letzte Aufgabe auf diesem Blatt ist eine Aufgabe zur Klausurvorbereitung. Diese Aufgabe orientiert sich in Form und inhaltlichen Schwerpunkten an den Klausuraufgaben. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die anderen Aufgaben nicht klausurrelevant sind.

Die Lösungen der Klausurvorbereitungs-Aufgaben werden am Ende der Bearbeitungszeit gesondert veröffentlicht, aber **nicht** im Tutorium besprochen. Die Lösungen der anderen Aufgaben werden bereits zu Beginn der Bearbeitungszeit veröffentlicht und können Ihnen bei der Bearbeitung helfen.

Wenn Sie Ihre Lösung innerhalb der Bearbeitungszeit über Moodle abgeben, erhalten Sie eine individuelle Korrektur. Die Abgabe ist freiwillig (aber nachdrücklich empfohlen).

FSK1-1 Operationen auf formalen Sprachen

Beweisen oder widerlegen Sie jede der folgenden Aussagen:

- Seien L_1 und L_2 formale Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, sodass alle Wörter in L_1 eine gerade Anzahl von a 's haben und alle Wörter in L_2 eine gerade Anzahl von b 's haben. Dann haben alle Wörter in $L_1 \cap L_2$ eine gerade Anzahl von a 's und eine gerade Anzahl von b 's.
- Sei Σ ein Alphabet und $k \in \mathbb{N}$. Sei L die Sprache $\{w \in \Sigma^* \mid |w| \leq k\}$. Dann ist L eine endliche Sprache.
- Über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ definieren wir die Sprache $L = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) + \#_b(w) = \#_c(w)\}$, also die Sprache der Wörter, die so viele a 's und b 's wie c 's enthalten. Es gilt: $L^* \subseteq L$.

FSK1-2 Grammatiken angeben

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie für jede der folgenden Teilaufgaben eine Grammatik G_i als 4-Tupel an, sodass $L(G_i)$ die Sprache L_i über Σ erzeugt. Verwenden Sie keine ε -Produktionen. Erläutern Sie, warum $L(G_i) = L_i$ gilt, indem Sie die „Aufgabe“ der einzelnen Variablen und Produktionen erläutern. Geben Sie außerdem jeweils den Typ Ihrer Grammatik an (mit Begründung).

- a) $L_1 = \{a, b\}^+$
- b) $L_2 = \{w \in \Sigma^+ \mid |w| \leq 2\}$
- c) $L_3 = \{a^i b^j a^i b^i \mid i, j > 0\}$.

FSK1-3 Klammersprache

Die Grammatik G sei definiert durch $G = (\{S, A, B\}, \{(\cdot), [\cdot]\}, P, S)$, wobei

$$P = \{S \rightarrow (S), S \rightarrow [S], S \rightarrow A, S \rightarrow B, A \rightarrow (), A \rightarrow [], B \rightarrow S, B \rightarrow BB\}$$

- a) Von welchem Typ ist die Grammatik G ?
- b) Stellen Sie für folgende Zeichenketten fest, ob sie Wörter in $L(G)$ sind. Begründen Sie Ihre Antwort. Bei Wörtern, die in $L(G)$ sind, geben Sie eine Linksableitung, eine Rechtsableitung und einen Syntaxbaum an.
 - i) $()[[()]]$
 - ii) $[[BA]]$
 - iii) $([[]])$
 - iv) $(([[[]]]))$
- c) Geben Sie vier verschiedene Wörter aus $L(G)$ an, die nicht in Teilaufgabe b) vorkommen.
- d) Geben Sie 4 verschiedene Wörter aus $\{[\cdot], (\cdot)\}^*$ an, die nicht in $L(G)$ liegen und die nicht in Teilaufgabe b) vorkommen.
- e) Beschreiben Sie die Sprache $L(G)$ in natürlicher Sprache möglichst kurz und genau.

FSK1-4 Spracheigenschaft per Induktion beweisen

Die Grammatik G sei definiert durch $G = (\{A\}, \{a, b\}, \{A \rightarrow AA, A \rightarrow aAb, A \rightarrow bab\}, A)$. Beweisen Sie, dass gilt:

$$w \in L(G) \implies \#_b(w) = 2 \cdot \#_a(w)$$

Hinweis: Beweisen Sie zunächst die allgemeinere Aussage, dass für jede Satzform u gilt: Wenn u von G in n Schritten erzeugt wird (d.h. $A \Rightarrow^n u$), dann ist $\#_b(u) = 2 \cdot \#_a(u)$. Verwenden Sie vollständige Induktion über n .

Klausurvorbereitung FSK-1-K

a) Beweisen Sie:

$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \leq \#_b(w)\}$, also die Sprache der Wörter die mindestens so viele bs wie as enthalten. Dann gilt $L \cup \{b\}^* = L$.

b) Geben Sie eine Grammatik an, die die Sprache $L = \{a\}^+$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ erzeugt. Verwenden Sie keine ε -Produktionen. Erläutern Sie, warum $L(G_i) = L_i$ gilt, indem Sie die „Aufgabe“ der einzelnen Variablen und Produktionen erläutern. Geben Sie außerdem jeweils den Typ Ihrer Grammatik an (mit Begründung).