Zentralübung 5

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 4. April 2024
Basiert auf Folien von PD Dr. David Sabel

Plan für heute

1. Turingberechenbarkeit
2. LOOP- und WHILE-Programme (nur FSK)
3. Der Satz von Myhill und Nerode (nur FSK)

1. Turingberechenbarkeit

Turingberechenbarkeit

Definition

Eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ heißt turingberechenbar, falls es eine deterministische Turingmaschine $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, E)$ gibt, sodass für alle $u, v \in \Sigma^*$ gilt:

$$f(u) = v$$

$$\text{g.d.w.}$$

$$\text{es gibt } z \in E\text{, sodass } Start_M(u) \vdash^* \Box \cdots \Box z v \Box \cdots \Box$$

Turingberechenbarkeit

Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heißt turingberechenbar, falls es eine deterministische Turingmaschine $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, E)$ gibt, sodass für alle $n_1, \ldots, n_k, m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(n_1, \ldots, n_k) = m$$
$$\text{g.d.w.}$$
$$\text{es gibt } z \in E \text{, sodass } z_0 bin(n_1)\# \cdots \# bin(n_k) \vdash^* \Box \cdots \Box z\, bin(m) \Box \cdots \Box$$

wobei $bin(n)$ die Binärzahldarstellung von $n \in \mathbb{N}$ ist.

1. Quiz

Welche der folgenden Aussagen gelten für die von Turingmaschinen akzeptierten Sprachen L?

a) L ist eine Typ i-Sprache (mit $i \in \{0, 1, 2, 3\}$).

b) Das Wortproblem für L ist entscheidbar.

c) L ist entscheidbar, d.h. die Funktion χ_L ist stets berechenbar.

d) Es gibt eine Grammatik G, die L erzeugt.

e) L ist semi-entscheidbar, d.h. die Funktion χ'_L ist stets berechenbar.

1. Quiz

Welche der folgenden Aussagen gelten für die von Turingmaschinen akzeptierten Sprachen L?

a) L ist eine Typ i-Sprache (mit $i \in \{0, 1, 2, 3\}$).

b) Das Wortproblem für L ist entscheidbar.

c) L ist entscheidbar, d.h. die Funktion χ_L ist stets berechenbar.

d) Es gibt eine Grammatik G, die L erzeugt.

e) L ist semi-entscheidbar, d.h. die Funktion χ'_L ist stets berechenbar.

Antwort: a), d) und e).

2. Quiz

Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sind berechenbar?

a) $f(x) = 3x$.

b) $f(0) = 0$ und $f(x)$ ist undefiniert für $x > 0$.

c) $f(x) = 1$, wenn es unendlich viele Primpaarzwillinge gibt, und $f(x) = 0$ sonst. Primzahlzwillinge sind Paare $(p, p+2)$ sodass p und $p+2$ prim sind, z.B. $(3, 5)$ und $(11, 13)$. Es ist unbekannt, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

d) Alle Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sind berechenbar.

2. Quiz

Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sind berechenbar?

a) $f(x) = 3x$.

b) $f(0) = 0$ und $f(x)$ ist undefiniert für $x > 0$.

c) $f(x) = 1$, wenn es unendlich viele Primpaarzwillinge gibt, und $f(x) = 0$ sonst. Primzahlzwillinge sind Paare $(p, p+2)$ sodass p und $p+2$ prim sind, z.B. $(3, 5)$ und $(11, 13)$. Es ist unbekannt, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

d) Alle Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sind berechenbar.

Antwort: a), b) und c).

Nicht berechenbare Funktionen

Sei $B := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ ist berechenbar}\}$ und $F := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$.
Dann gilt

- B ist abzählbar: Da alle Mengen im 7-Tupel endliche Mengen sind, ist klar, dass man alle Turingmaschinen nacheinander aufzählen kann (mithilfe der Gödelisierung)
- F ist überabzählbar (beweisbar durch Diagonalargument).
- Also muss es $f \in F$ geben, mit $f \notin B$. Diese Funktion f ist nicht berechenbar.

2. LOOP- und WHILE-Programme (nur FSK)

Syntax von LOOP-Programmen

LOOP-Programme werden durch die kontextfreie Grammatik (V, Σ, P, Prg) erzeugt, wobei:

$$
\begin{aligned}
V &= \{Prg, Var, Id, Const\} \\
\Sigma &= \{\mathbf{LOOP}, \mathbf{DO}, \mathbf{END}, x, 0, \ldots, 9, ;, :=, +, -\} \\
P &= \{Prg \quad \rightarrow \quad \mathbf{LOOP}\ Var\ \mathbf{DO}\ Prg\ \mathbf{END} \\
&\qquad\qquad\quad \mid Prg; Prg \\
&\qquad\qquad\quad \mid Var := Var + Const \\
&\qquad\qquad\quad \mid Var := Var - Const, \\
&\quad\ Var \rightarrow x_{Id}, \\
&\quad\ Const \rightarrow Id, \\
&\quad\ Id \rightarrow 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9 \mid 1Id \mid 2Id \mid \ldots \mid 9Id\}
\end{aligned}
$$

LOOP-Berechenbarkeit

Definition (LOOP-berechenbare Funktion)

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heißt LOOP-berechenbar, wenn es ein LOOP-Programm P gibt, sodass für alle $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ gilt $(\rho, P) \xrightarrow[\text{LOOP}]{}^* (\rho', \varepsilon)$, wobei $\rho = \{x_1 \mapsto n_1, \dots, x_k \mapsto n_k\}$ und $\rho'(x_0) = f(n_1, \dots, n_k)$.

D.h. das LOOP-Programm

- empfängt die Eingaben über die Variablen $x_1, \dots, x_k$
- liefert sein Ergebnis in Variable x_0.

1. Quiz

Welche Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ berechnet das folgende LOOP-Programm?

$$
\begin{array}{l}
x_0 := x_1 + 2; \\
\textbf{LOOP } x_2 \textbf{ DO} \\
\quad x_0 := x_0 + 3 \\
\textbf{END}
\end{array}
$$

1. Quiz

Welche Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ berechnet das folgende LOOP-Programm?

$$
\begin{array}{l}
x_0 := x_1 + 2; \\
\textbf{LOOP } x_2 \textbf{ DO} \\
\quad x_0 := x_0 + 3 \\
\textbf{END}
\end{array}
$$

Antwort: $f(x, y) = 3y + x + 2.$

2. Quiz

Welche Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ berechnet das folgende LOOP-Programm?

$$
\begin{array}{l}
\textbf{LOOP } x_2 \textbf{ DO} \\
\quad x_2 := x_2 + 1 \\
\textbf{END}; \\
\textbf{LOOP } x_2 \textbf{ DO} \\
\quad x_0 := x_0 + 1 \\
\textbf{END}; \\
\textbf{LOOP } x_1 \textbf{ DO} \\
\quad x_0 := x_0 + 3 \\
\textbf{END}
\end{array}
$$

2. Quiz

Welche Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ berechnet das folgende LOOP-Programm?

$$
\begin{array}{l}
\textbf{LOOP } x_2 \textbf{ DO} \\
\quad x_2 := x_2 + 1 \\
\textbf{END}; \\
\textbf{LOOP } x_2 \textbf{ DO} \\
\quad x_0 := x_0 + 1 \\
\textbf{END}; \\
\textbf{LOOP } x_1 \textbf{ DO} \\
\quad x_0 := x_0 + 3 \\
\textbf{END}
\end{array}
$$

Antwort: $f(x, y) = 3x + 2y$.

Aufgabe: LOOP-Programm angeben

Geben Sie ein LOOP-Programm an, welches die Funktion $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ berechnet. Die erweiterte Syntax ist nicht erlaubt.

Aufgabe: LOOP-Programm angeben

Geben Sie ein LOOP-Programm an, welches die Funktion $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ berechnet. Die erweiterte Syntax ist nicht erlaubt.

Antwort:

LOOP x_1 **DO**
  $x_0 := x_0 + 1$
END;
LOOP x_2 **DO**
  $x_0 := x_0 + 2$
END;
LOOP x_3 **DO**
  $x_0 := x_0 + 3$
END

Syntax von WHILE-Programmen

WHILE-Programme werden durch die kontextfreie Grammatik (V, Σ, P, Prg) erzeugt, wobei:

$$
\begin{aligned}
V &= \{Prg, Var, Id, Const\} \\
\Sigma &= \{\textbf{WHILE}, \textbf{LOOP}, \textbf{DO}, \textbf{END}, x, 0, \ldots, 9, ;, :=, +, -\} \\
P &= \{Prg \quad \rightarrow \quad \textbf{WHILE } Var \neq 0 \textbf{ DO } Prg \textbf{ END} \\
&\qquad\qquad\quad \mid \textbf{LOOP } Var \textbf{ DO } Prg \textbf{ END} \\
&\qquad\qquad\quad \mid Prg; Prg \\
&\qquad\qquad\quad \mid Var := Var + Const \\
&\qquad\qquad\quad \mid Var := Var - Const, \\
&\qquad Var \rightarrow x_{Id}, \\
&\qquad Const \rightarrow Id, \\
&\qquad Id \rightarrow 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9 \mid 1Id \mid 2Id \mid \ldots\ 9Id\}
\end{aligned}
$$

WHILE-Berechenbarkeit

Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heißt WHILE-berechenbar, wenn es ein WHILE-Programm P gibt, das die folgenden Bedingungen erfüllt:

- Für alle $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, sodass $f(n_1, \ldots, n_k)$ definiert ist, gilt $(\rho, P) \xrightarrow[\text{WHILE}]{}^* (\rho', \varepsilon)$, wobei $\rho = \{x_1 \mapsto n_1, \ldots, x_k \mapsto n_k\}$ und $\rho'(x_0) = f(n_1, \ldots, n_k)$.
- Falls $f(n_1, \ldots, n_k)$ nicht definiert ist, stoppt das Programm P nicht, d.h. für alle $i \in \mathbb{N}$ gibt es ρ' und P', sodass $(\rho, P) \xrightarrow[\text{WHILE}]{}^i (\rho', P')$.

Quiz

Welche Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ berechnet das folgende WHILE-Programm?

$$
\begin{array}{l}
x_0 := x_1 + 2; \\
x_1 := x_2 + 0; \\
\textbf{WHILE } x_1 \neq 0 \textbf{ DO} \\
\quad x_1 := x_1 - 1; \\
\quad x_0 := x_0 + 5 \\
\textbf{END}
\end{array}
$$

Quiz

Welche Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ berechnet das folgende WHILE-Programm?

$$
\begin{array}{l}
x_0 := x_1 + 2; \\
x_1 := x_2 + 0; \\
\textbf{WHILE } x_1 \neq 0 \textbf{ DO} \\
\quad x_1 := x_1 - 1; \\
\quad x_0 := x_0 + 5 \\
\textbf{END}
\end{array}
$$

Antwort: $f(x, y) = x + 5y + 2.$

3. Der Satz von Myhill und Nerode (nur FSK)

Die Nerode-Relation

Definition

Sei L eine Sprache über Σ. Die Nerode-Relation $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ zu L ist definiert für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$, sodass $u \sim_L v$ wenn

$$\text{für jedes } w \in \Sigma^*\text{: } uw \in L \text{ g.d.w. } vw \in L$$

Informell: $u \sim_L v$, wenn sich ihr Enthaltensein in L gleich verhält bezüglich beliebiger Erweiterung um dasselbe Suffix.

1. Quiz

Sei $L = \{aaa\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a\}$ und $\sim_L$ die Nerode-Relation von L.
Welche Äquivalenzen gelten?

a) $a \sim_L aa$

b) $aaa \sim_L aaa$

c) $aaaaa \sim_L \varepsilon$

d) $aaaa \sim_L aaaaaa$.

1. Quiz

Sei $L = \{aaa\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a\}$ und $\sim_L$ die Nerode-Relation von L.
Welche Äquivalenzen gelten?

a) $a \sim_L aa$

b) $aaa \sim_L aaa$

c) $aaaaa \sim_L \varepsilon$

d) $aaaa \sim_L aaaaaa$.

Antwort: b) und d).

2. Quiz

Sei $L = \{a^i\$b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$ und $\sim_L$ die Nerode-Relation von L.
Welche Äquivalenzen gelten?

a) $a^5\$ \sim_L a^6\$$

b) $a^i\$b^i \sim_L a^j\$b^j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$

c) $a^i\$ \sim_L a^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$

d) $\varepsilon \sim_L a^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

2. Quiz

Sei $L = \{a^i\$b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$ und $\sim_L$ die Nerode-Relation von L.
Welche Äquivalenzen gelten?

a) $a^5\$ \sim_L a^6\$$

b) $a^i\$b^i \sim_L a^j\$b^j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$

c) $a^i\$ \sim_L a^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$

d) $\varepsilon \sim_L a^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Antwort: a), b) und d).

3. Quiz

Sei $L = \{a^i\$b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$ und $\sim_L$ die Nerode-Relation von L.
Für welche Wörter u gilt $\$\$ \sim_L u$?

a) ε
b) $\$$
c) $\$\$\$$
d) $b^i\$a^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

3. Quiz

Sei $L = \{a^i\$b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$ und $\sim_L$ die Nerode-Relation von L.
Für welche Wörter u gilt $\$\$ \sim_L u$?

a) ε

b) $\$$

c) $\$\$\$$

d) $b^i\$a^i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Antwort: c).

Der Satz von Myhill und Nerode

Satz

Die Nerode-Relation ist eine Äquivalenzrelation.

Zur Erinnerung:

- Die Äquivalenzklasse $[u]_{\sim_L}$ ist definiert als $\{w \mid u \sim_L w\}$.
- Der Index einer Äquivalenzrelation ist die Anzahl ihrer disjunkten Äquivalenzklassen: $\Sigma^* = [u_1]_{\sim_L} \cup [u_2]_{\sim_L} \cup \cdots$.
- Der Index kann unendlich sein.

Theorem (Satz von Myhill und Nerode)

Eine Sprache L ist genau dann regulär, wenn der Index von $\sim_L$ endlich ist.

Beispiel für den Index der Nerode-Relation

Sprache $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\{a, b\}$

$Index(\sim_L) = 3$

- $[\varepsilon]_{\sim_L} = \{\varepsilon\}$
- $[a]_{\sim_L} = \{a, ab, abb, abbb, \ldots\}$
- $[aa]_{\sim_L} = \{aau \mid u \in \{a, b\}^*\}$
  $\cup \{bu \mid u \in \{a, b\}^*\}$
  $\cup \{abuav \mid u, v \in \{a, b\}^*\}$

$\{a, b\}^* = [\varepsilon]_{\sim_L} \cup [a]_{\sim_L} \cup [aa]_{\sim_L}$

Wie zeigt man $Index(\sim_L) = \infty$?

Grundgedanke:

- Finde unendlich viele Äquivalenzklassen $[u_1]_{\sim_L}, [u_2]_{\sim_L}, \ldots,$ die paarweise verschieden sind ($[u_i]_{\sim_L} \neq [u_j]_{\sim_L}$ für $i \neq j$).

Rezept:

- Finde für $i = 1, 2, \ldots$ Wörter u_i und w_i, sodass $u_i w_i \in L$ aber $u_j w_i \notin L$ für alle $i \neq j$.

Dann sind $u_i \not\sim_L u_j$ für alle $i \neq j$.
Daher sind $[u_1]_{\sim_L}$,$[u_2]_{\sim_L}$,... paarweise disjunkt.

Beachte: Es ist hierfür nicht notwendig, alle Äquivalenzklassen der disjunkten Zerlegung von Σ^* zu finden.

Quiz

Sei $L = \{aaa\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a\}$.
Bestimme Index($\sim_L$).

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4
f) 5
g) 6
h) ∞

Quiz

Sei $L = \{aaa\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a\}$.
Bestimme Index($\sim_L$).

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4
f) 5
g) 6
h) ∞

Antwort: f). Es gibt 5 disjunkte Äquivalenzklassen:
$[\varepsilon]_{\sim_L}$, $[a]_{\sim_L}$, $[aa]_{\sim_L}$, $[aaa]_{\sim_L}$, $[aaaa]_{\sim_L}$.

1. Aufgabe: Regulär oder nicht regulär

Sei $L = \{a^i\$b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$.
Prüfe, ob L regulär ist, durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

1. Aufgabe: Regulär oder nicht regulär

Sei $L = \{a^i\$b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$.
Prüfe, ob L regulär ist, durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Antwort:

$[\varepsilon]_{\sim_L} = [a^i]_{\sim_L} =$ Wörter, die um $a^*\$b^*$ verlängert werden können, um in L zu bleiben

1. Aufgabe: Regulär oder nicht regulär

Sei $L = \{a^i\$b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$.
Prüfe, ob L regulär ist, durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Antwort:

$[\varepsilon]_{\sim_L} = [a^i]_{\sim_L}$ = Wörter, die um $a^*\$b^*$ verlängert werden können, um in L zu bleiben
$[\$]_{\sim_L} = [a^i\$]_{\sim_L}$ = Wörter, die um b^* verlängert werden können, um in L zu bleiben

1. Aufgabe: Regulär oder nicht regulär

Sei $L = \{a^i\$b^j \mid i,j \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$.
Prüfe, ob L regulär ist, durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Antwort:

$[\varepsilon]_{\sim_L} = [a^i]_{\sim_L}$ = Wörter, die um $a^*\$b^*$ verlängert werden können, um in L zu bleiben
$[\$]_{\sim_L} = [a^i\$]_{\sim_L}$ = Wörter, die um b^* verlängert werden können, um in L zu bleiben
$[ab]_{\sim_L} = [b^i]_{\sim_L}$ = Wörter, die für jede Verlängerung nicht in L liegen

1. Aufgabe: Regulär oder nicht regulär

Sei $L = \{a^i\$b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$.
Prüfe, ob L regulär ist, durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Antwort:

$[\varepsilon]_{\sim_L} = [a^i]_{\sim_L} =$ Wörter, die um $a^*\$b^*$ verlängert werden können, um in L zu bleiben
$[\$]_{\sim_L} = [a^i\$]_{\sim_L} =$ Wörter, die um b^* verlängert werden können, um in L zu bleiben
$[ab]_{\sim_L} = [b^i]_{\sim_L} =$ Wörter, die für jede Verlängerung nicht in L liegen
$\Sigma^* = [\varepsilon]_{\sim_L} \cup [\$]_{\sim_L} \cup [ab]_{\sim_L}$

1. Aufgabe: Regulär oder nicht regulär

Sei $L = \{a^i\$b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$.
Prüfe, ob L regulär ist, durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Antwort:

$[\varepsilon]_{\sim_L} = [a^i]_{\sim_L}$ = Wörter, die um $a^*\$b^*$ verlängert werden können, um in L zu bleiben
$[\$]_{\sim_L} = [a^i\$]_{\sim_L}$ = Wörter, die um b^* verlängert werden können, um in L zu bleiben
$[ab]_{\sim_L} = [b^i]_{\sim_L}$ = Wörter, die für jede Verlängerung nicht in L liegen
$\Sigma^* = [\varepsilon]_{\sim_L} \cup [\$]_{\sim_L} \cup [ab]_{\sim_L}$

Daher $\text{Index}(L) = 3$ und L ist regulär.

2. Aufgabe: Regulär oder nicht regulär

Sei $L = \{a^i\$b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$.
Prüfe, ob L regulär ist, durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

2. Aufgabe: Regulär oder nicht regulär

Sei $L = \{a^i\$b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$.
Prüfe, ob L regulär ist, durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Antwort:

$a^i \not\sim_L a^j$ für alle $i \neq j$, da $a^i\$b^i \in L$ aber $a^j\$b^i \notin L$.

2. Aufgabe: Regulär oder nicht regulär

Sei $L = \{a^i\$b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b, \$\}$.
Prüfe, ob L regulär ist, durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Antwort:

$a^i \not\sim_L a^j$ für alle $i \neq j$, da $a^i\$b^i \in L$ aber $a^j\$b^i \notin L$.

Daher $\text{Index}(L) = \infty$ und L ist nicht regulär.