

# Zentralübung 3

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für  
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 14. Mai 2024  
Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel



# Plan für heute

---

1. Reguläre Ausdrücke
2. Abschlusseigenschaften von regulären Sprachen
3. Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen
4. Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen (nur FSK)

---

# 1. Reguläre Ausdrücke

# Übersicht über reguläre Ausdrücke

Syntax	Semantik
$\emptyset$	$L(\emptyset) = \emptyset$
$\varepsilon$	$L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
$a$ (mit $a \in \Sigma$ )	$L(a) = \{a\}$
$\alpha_1\alpha_2$	$L(\alpha_1\alpha_2) = L(\alpha_1)L(\alpha_2)$
$(\alpha_1 \mid \alpha_2)$	$L(\alpha_1) \cup L(\alpha_2)$
$(\alpha)^*$	$L(\alpha)^*$

wobei  $\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  reguläre Ausdrücke sind.

# Übersicht über reguläre Ausdrücke

Syntax	Semantik
$\emptyset$	$L(\emptyset) = \emptyset$
$\varepsilon$	$L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
$a$ (mit $a \in \Sigma$ )	$L(a) = \{a\}$
$\alpha_1\alpha_2$	$L(\alpha_1\alpha_2) = L(\alpha_1)L(\alpha_2)$
$(\alpha_1 \mid \alpha_2)$	$L(\alpha_1) \cup L(\alpha_2)$
$(\alpha)^*$	$L(\alpha)^*$

wobei  $\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  reguläre Ausdrücke sind.

Beachte:

- ▶ Es gibt verschiedene Notationen.  
Manchmal wird  $(\alpha_1 + \alpha_2)$  oder  $(\alpha_1 \cup \alpha_2)$  geschrieben statt  $(\alpha_1 \mid \alpha_2)$ .
- ▶ Ein Konstrukt ist eigentlich überflüssig.

# 1. Quiz

---

Welches Konstrukt ist eigentlich überflüssig für die regulären Ausdrücke, da es mit den anderen Konstrukten dargestellt werden kann?

- a)  $\emptyset$
- b)  $\varepsilon$
- c)  $(\alpha)^*$
- d)  $\alpha_1\alpha_2$
- e)  $(\alpha_1|\alpha_2)$

# 1. Quiz

---

Welches Konstrukt ist eigentlich überflüssig für die regulären Ausdrücke, da es mit den anderen Konstrukten dargestellt werden kann?

- a)  $\emptyset$
- b)  $\varepsilon$
- c)  $(\alpha)^*$
- d)  $\alpha_1\alpha_2$
- e)  $(\alpha_1|\alpha_2)$

Antwort: b), da  $\varepsilon$  durch  $(\emptyset)^*$  dargestellt werden kann:

$$L((\emptyset)^*) = \emptyset^* = \emptyset^0 \cup \emptyset^1 \cup \dots = \{\varepsilon\} \cup \emptyset \cup \dots = \{\varepsilon\}.$$

## 2. Quiz

---

Welcher reguläre Ausdruck erzeugt die Sprache  $\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| = 4\}$ ?

- a)  $(ab)^*(ab)^*(ab)^*(ab)^*$
- b)  $(a|b)(a|b)(a|b)(a|b)$
- c)  $(aaaa|bbbb)$
- d)  $(ab|ab|ab|ab)$
- e)  $(aa|ab|ba|bb)(aa|ab|ba|bb)$



## 2. Quiz

---

Welcher reguläre Ausdruck erzeugt die Sprache  $\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| = 4\}$ ?

- a)  $(ab)^*(ab)^*(ab)^*(ab)^*$
- b)  $(a|b)(a|b)(a|b)(a|b)$
- c)  $(aaaa|bbbb)$
- d)  $(ab|ab|ab|ab)$
- e)  $(aa|ab|ba|bb)(aa|ab|ba|bb)$

Antwort: b) und e) sind beide richtig.

## Aufgabe: Regulären Ausdruck angeben

---

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der

$$\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| \leq 4\}$$

erzeugt.

## Aufgabe: Regulären Ausdruck angeben

---

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der

$$\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| \leq 4\}$$

erzeugt.

Antwort:  $(\varepsilon|a|b)(\varepsilon|a|b)(\varepsilon|a|b)(\varepsilon|a|b)$  oder  
 $(\varepsilon \mid (a|b) \mid (a|b)(a|b) \mid (a|b)(a|b)(a|b) \mid (a|b)(a|b)(a|b)(a|b))$ .

## Aufgabe: Regulären Ausdruck angeben

---

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der

$$\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| \geq 4\}$$

erzeugt.

## Aufgabe: Regulären Ausdruck angeben

---

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der

$$\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| \geq 4\}$$

erzeugt.

Antwort:  $(a|b)(a|b)(a|b)(a|b)(a|b)^*$ .

# Komplement von regulären Ausdrücken

---

Es gibt keinen „Komplementoperator“ für reguläre Ausdrücke.

# Komplement von regulären Ausdrücken

---

Es gibt keinen „Komplementoperator“ für reguläre Ausdrücke.

► Schwere Methode:

Regulärer Ausdruck

→ NFA

→ DFA

→ DFA für das Komplement

→ regulärer Ausdruck

# Komplement von regulären Ausdrücken

---

Es gibt keinen „Komplementoperator“ für reguläre Ausdrücke.

► **Schwere Methode:**

Regulärer Ausdruck

→ NFA

→ DFA

→ DFA für das Komplement

→ regulärer Ausdruck

► **Einfachere Methode:**

Regulärer Ausdruck

→ einfache Beschreibung der erzeugten Sprache

→ einfache Beschreibung des Komplements

→ regulärer Ausdruck



## Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

---

Finde regulären Ausdruck für das Komplement, der von  $0^*10^*$  erzeugten Sprache.

## Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

---

Finde regulären Ausdruck für das Komplement, der von  $0^*10^*$  erzeugten Sprache.

Antwort:

Schritte:

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von  $0^*10^*$  erzeugten Sprache?
2. Was ist eine einfache Beschreibung des Komplements davon?
3. Was ist ein regulärer Ausdruck dazu?

## Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

---

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von  $0^*10^*$  erzeugten Sprache?

## Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

---

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von  $0^*10^*$  erzeugten Sprache?  
 $L(0^*10^*) =$  Wörter über  $\{0,1\}$ , die genau eine 1 enthalten.

## Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

---

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von  $0^*10^*$  erzeugten Sprache?  
 $L(0^*10^*) =$  Wörter über  $\{0,1\}$ , die genau eine 1 enthalten.
2. Was ist eine einfache Beschreibung des Komplements davon?

## Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

---

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von  $0^*10^*$  erzeugten Sprache?  
 $L(0^*10^*) =$  Wörter über  $\{0,1\}$ , die genau eine 1 enthalten.
2. Was ist eine einfache Beschreibung des Komplements davon?  
 $\overline{L(0^*10^*)} =$  Wörter über  $\{0,1\}$ , die keine oder mindestens 2 1en enthalten  
 $=$  Wörter, die keine 1en enthalten  
 $\cup$  Wörter, die mindestens 2 1en enthalten

## Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

---

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von  $0^*10^*$  erzeugten Sprache?

$L(0^*10^*) =$  Wörter über  $\{0,1\}$ , die genau eine 1 enthalten.

2. Was ist eine einfache Beschreibung des Komplements davon?

$\overline{L(0^*10^*)} =$  Wörter über  $\{0,1\}$ , die keine oder mindestens 2 1en enthalten  
= Wörter, die keine 1en enthalten  
     $\cup$  Wörter, die mindestens 2 1en enthalten

3. Was ist ein regulärer Ausdruck dazu?

► Regulärer Ausdruck, der alle Wörter über  $\{0,1\}$  erzeugt, die keine 1en enthalten:

## Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von  $0^*10^*$  erzeugten Sprache?  
 $L(0^*10^*) =$  Wörter über  $\{0,1\}$ , die genau eine 1 enthalten.
2. Was ist eine einfache Beschreibung des Komplements davon?  
 $\overline{L(0^*10^*)} =$  Wörter über  $\{0,1\}$ , die keine oder mindestens 2 1en enthalten  
 $=$  Wörter, die keine 1en enthalten  
 $\cup$  Wörter, die mindestens 2 1en enthalten
3. Was ist ein regulärer Ausdruck dazu?
  - ▶ Regulärer Ausdruck, der alle Wörter über  $\{0,1\}$  erzeugt, die keine 1en enthalten:  
 $0^*$
  - ▶ Regulärer Ausdruck, der alle Wörter über  $\{0,1\}$  erzeugt, die mindesten 2 1en enthalten:



## Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von  $0^*10^*$  erzeugten Sprache?

$L(0^*10^*) =$  Wörter über  $\{0,1\}$ , die genau eine 1 enthalten.

2. Was ist eine einfache Beschreibung des Komplements davon?

$\overline{L(0^*10^*)} =$  Wörter über  $\{0,1\}$ , die keine oder mindestens 2 1en enthalten  
= Wörter, die keine 1en enthalten  
 $\cup$  Wörter, die mindestens 2 1en enthalten

3. Was ist ein regulärer Ausdruck dazu?

- ▶ Regulärer Ausdruck, der alle Wörter über  $\{0,1\}$  erzeugt, die keine 1en enthalten:  
 $0^*$
- ▶ Regulärer Ausdruck, der alle Wörter über  $\{0,1\}$  erzeugt, die mindesten 2 1en enthalten:  
 $(0|1)^*1(0|1)^*1(0|1)^*$
- ▶ Zusammen:

## Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von  $0^*10^*$  erzeugten Sprache?  
 $L(0^*10^*) =$  Wörter über  $\{0,1\}$ , die genau eine 1 enthalten.
2. Was ist eine einfache Beschreibung des Komplements davon?  
 $\overline{L(0^*10^*)} =$  Wörter über  $\{0,1\}$ , die keine oder mindestens 2 1en enthalten  
 $=$  Wörter, die keine 1en enthalten  
 $\cup$  Wörter, die mindestens 2 1en enthalten
3. Was ist ein regulärer Ausdruck dazu?
  - ▶ Regulärer Ausdruck, der alle Wörter über  $\{0,1\}$  erzeugt, die keine 1en enthalten:  
 $0^*$
  - ▶ Regulärer Ausdruck, der alle Wörter über  $\{0,1\}$  erzeugt, die mindesten 2 1en enthalten:  
 $(0|1)^*1(0|1)^*1(0|1)^*$
  - ▶ Zusammen:  
 $(0^*|(0|1)^*1(0|1)^*1(0|1)^*)$

## Aufgabe: NFA konstruieren

---

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit  $\varepsilon$ -Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

## Aufgabe: NFA konstruieren

---

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit  $\varepsilon$ -Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:

## Aufgabe: NFA konstruieren

---

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit  $\varepsilon$ -Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:



## Aufgabe: NFA konstruieren

---

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit  $\varepsilon$ -Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:



## Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit  $\varepsilon$ -Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:



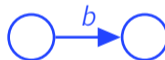
## Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit  $\epsilon$ -Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:





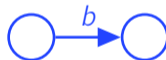
## Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit  $\epsilon$ -Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:



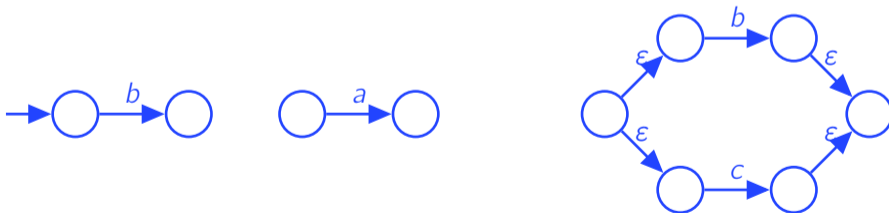
## Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit  $\epsilon$ -Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:



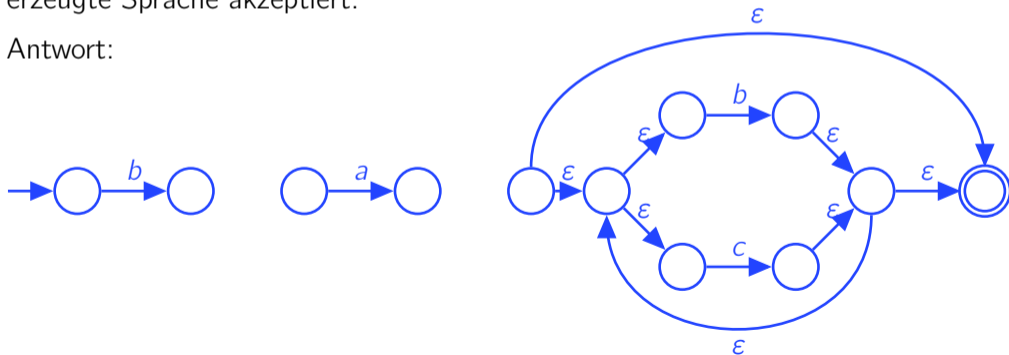
## Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit  $\epsilon$ -Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:



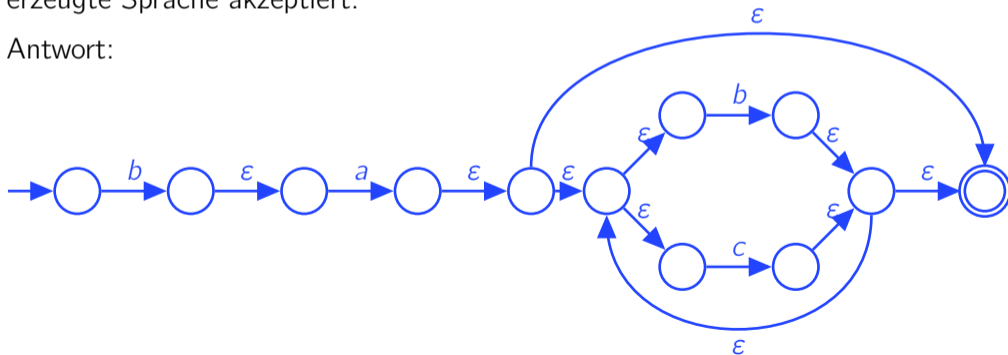
## Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit  $\epsilon$ -Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:



---

## 2. Abschlusseigenschaften von regulären Sprachen

## Satz

Seien  $L_1, L_2$  regulär. Dann sind  $L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2, L_1^*, \overline{L_1}, L_1 L_2$  auch regulär.

Aus dem Aufgabenblatt 3 für FSK:

- ▶ Wenn  $L$  regulär ist, dann ist auch  $\{\overline{w} \mid w \in L\}$  regulär.

Abschlusseigenschaft für Schnitt:

$$L_1 \text{ regulär und } L_2 \text{ regulär} \implies L_1 \cap L_2 \text{ regulär}$$

Welche Folgerungen sind korrekt?

- a) Wenn  $L_1 \cap L_2$  nicht regulär ist, dann ist weder  $L_1$  noch  $L_2$  regulär.
- b) Wenn  $L_1 \cap L_2$  regulär ist, dann sind  $L_1$  und  $L_2$  regulär.
- c) Wenn  $L_1 \cap L_2$  nicht regulär ist und  $L_1$  regulär ist, dann ist  $L_2$  nicht regulär.
- d) Wenn  $L_1$  und  $L_2$  jeweils nicht regulär sind, dann ist  $L_1 \cap L_2$  ebenfalls nicht regulär.

Abschlusseigenschaft für Schnitt:

$$L_1 \text{ regulär und } L_2 \text{ regulär} \implies L_1 \cap L_2 \text{ regulär}$$

Welche Folgerungen sind korrekt?

- a) Wenn  $L_1 \cap L_2$  nicht regulär ist, dann ist weder  $L_1$  noch  $L_2$  regulär.
- b) Wenn  $L_1 \cap L_2$  regulär ist, dann sind  $L_1$  und  $L_2$  regulär.
- c) Wenn  $L_1 \cap L_2$  nicht regulär ist und  $L_1$  regulär ist, dann ist  $L_2$  nicht regulär.
- d) Wenn  $L_1$  und  $L_2$  jeweils nicht regulär sind, dann ist  $L_1 \cap L_2$  ebenfalls nicht regulär.

Antwort: c).



# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

---

Anleitung zum Widerlegen der Regularität von  $L$  mit Abschlusseigenschaften:

1. Nehme an, dass  $L$  regulär ist.
2. Operiere auf  $L$  unter Erhaltung der Regularität:  
vereinige, schneide, komplementiere, multipliziere  $L$  mit bekannt regulärer Sprache, bilde Kleeneschen Abschluss, drehe Sprache um.
3. Kommt dabei eine bekannt **nicht reguläre** Sprache heraus,  
dann hat man einen **Widerspruch** und die Annahme war falsch.  
Daher ist  $L$  dann nicht regulär.

# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

---

## Satz

$S = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$  ist nicht regulär.

# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

## Satz

$S = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$  ist nicht regulär.

**Beweis** Durch Widerspruch. Nehme an,  $S$  ist regulär.

Da  $L_1 = L(a^*b^*)$  regulär ist, muss (aufgrund der Abschlusseigenschaft für reguläre Sprachen) auch  $L_1 \cap S$  regulär sein.

Aber  $L_1 \cap S = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär. Widerspruch. □

# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

---

## Satz

$T = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$  ist nicht regulär.

# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

## Satz

$T = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$  ist nicht regulär.

**Beweis** Durch Widerspruch. Nehme an,  $T$  ist regulär.

Dann ist aufgrund der Abschlusseigenschaft für das Komplement auch  $\overline{T}$  regulär.

Da  $L(a^*b^*)$  regulär ist, gilt mit der Abschlusseigenschaft für den Schnitt auch, dass  $\overline{T} \cap L(a^*b^*)$  regulär ist.

Aber  $\overline{T} \cap L(a^*b^*) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär. Widerspruch. □

# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

---

Aufpassen, dass man die Eigenschaften nicht falsch anwendet:  
Die folgenden Beweise sind alle falsch:

# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

---

Aufpassen, dass man die Eigenschaften nicht falsch anwendet:

Die folgenden Beweise sind alle **falsch**:

- ▶  $L_x = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist regulär, reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Produktbildung, also ist  $L_a L_b = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  regulär.

# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

Aufpassen, dass man die Eigenschaften nicht falsch anwendet:

Die folgenden Beweise sind alle falsch:

- ▶  $L_x = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist regulär, reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Produktbildung, also ist  $L_a L_b = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  regulär.
- ▶  $L_{<} = \{a^n b^m \mid n < m\}$  ist nicht regulär,  $L_{\geq} = \{a^n b^m \mid n \geq m\}$  ist nicht regulär, also ist  $L_{<} \cup L_{\geq} = \{a^n b^m \mid n < m \text{ oder } n \geq m\}$  nicht regulär.



# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

Aufpassen, dass man die Eigenschaften nicht falsch anwendet:

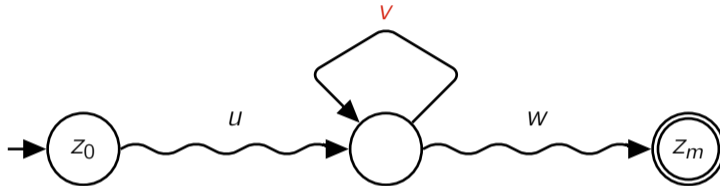
Die folgenden Beweise sind alle **falsch**:

- ▶  $L_x = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist regulär, reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Produktbildung, also ist  $L_a L_b = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  regulär.
- ▶  $L_{<} = \{a^n b^m \mid n < m\}$  ist nicht regulär,  $L_{\geq} = \{a^n b^m \mid n \geq m\}$  ist nicht regulär, also ist  $L_{<} \cup L_{\geq} = \{a^n b^m \mid n < m \text{ oder } n \geq m\}$  nicht regulär.
- ▶  $L_1 = \{\varepsilon, c\}$  ist regulär,  $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär, also ist  $L = \{c^i a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}, i \in \{0, 1\}\}$  nicht regulär.

---

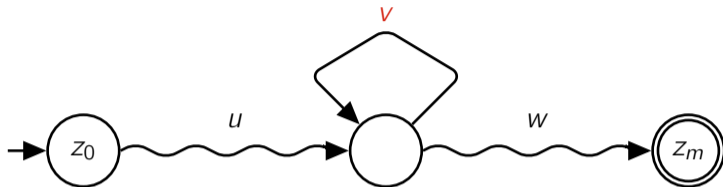
### 3. Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

# Intuition hinter dem Pumping-Lemma



- ▶ Wenn ein DFA  $n$  Zustände hat, dann müssen akzeptierte Wörter der Länge  $\geq n$  eine Schleife durchlaufen.
- ▶ Diese Wörter kann man aufpumpen:  $uvw, uvvw, uvvww, \dots$   
Man kann auch die Schleife überspringen:  $uw$ .  
Allgemein:  $uv^i w$  für  $i \in \mathbb{N}$  liegt in der erkannten Sprache.

# Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen



## Definition

Eine Sprache  $L$  hat die **Pumping-Eigenschaft** (für reguläre Sprachen), wenn gilt: Es gibt eine Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ , sodass jedes Wort  $z \in L$ , welches Mindestlänge  $n$  hat (d.h.  $|z| \geq n$ ), als  $z = uvw$  geschrieben werden kann, sodass gilt:

1.  $|uv| \leq n$
2.  $|v| \geq 1$
3. für alle  $i \in \mathbb{N}$ :  $uv^i w \in L$ .

## Lemma (Pumping-Lemma)

Jede reguläre Sprache hat die **Pumping-Eigenschaft**.

Welche der folgenden Aussagen sind korrekte Formulierungen des Pumping-Lemmas?

- a) Sei  $L$  eine reguläre Sprache. Dann gilt für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$ : Es gibt ein Wort  $z$  aus  $L$ , welches Mindestlänge  $n$  hat, sodass es für jede Zerlegung  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$  und  $|v| \geq 1$  ein  $i \geq 0$  gibt mit  $uv^i w$  liegt nicht in  $L$ .
- b) Sei  $L$  eine Sprache. Dann ist  $L$  regulär, genau dann, wenn es eine natürliche Zahl  $n \geq 1$  gibt, sodass jedes Wort  $z$  aus  $L$ , welches Mindestlänge  $n$  hat, als  $z = uvw$  geschrieben werden kann, mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$ , und  $uv^i w$  in  $L$  liegt für alle  $i \geq 0$ .
- c) Sei  $L$  eine Sprache. Dann ist  $L$  keinesfalls regulär, falls für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$  gilt: Es gibt ein Wort  $z$  aus  $L$ , welches Mindestlänge  $n$  hat, sodass es für jede Zerlegung  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$  und  $|v| \geq 1$  ein  $i \geq 0$  gibt mit  $uv^i w$  liegt nicht in  $L$ .
- d) Sei  $L$  eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine natürliche Zahl  $n \geq 1$ , sodass jedes Wort  $z$  aus  $L$ , welches Mindestlänge  $n$  hat, als  $z = uvw$  geschrieben werden kann, mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$ , und  $uv^i w$  liegt in  $L$  für alle  $i \geq 0$ .
- e) Sei  $L$  eine Sprache und es gibt eine natürliche Zahl  $n \geq 1$ , sodass jedes Wort  $z$  aus  $L$ , welches Mindestlänge  $n$  hat, als  $z = uvw$  geschrieben werden kann, mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$ , und  $uv^i w$  liegt in  $L$  für alle  $i \geq 0$ . Dann ist  $L$  regulär.

Welche der folgenden Aussagen sind korrekte Formulierungen des Pumping-Lemmas?

- a) Sei  $L$  eine reguläre Sprache. Dann gilt für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$ : Es gibt ein Wort  $z$  aus  $L$ , welches Mindestlänge  $n$  hat, sodass es für jede Zerlegung  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$  und  $|v| \geq 1$  ein  $i \geq 0$  gibt mit  $uv^i w$  liegt nicht in  $L$ .
- b) Sei  $L$  eine Sprache. Dann ist  $L$  regulär, genau dann, wenn es eine natürliche Zahl  $n \geq 1$  gibt, sodass jedes Wort  $z$  aus  $L$ , welches Mindestlänge  $n$  hat, als  $z = uvw$  geschrieben werden kann, mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$ , und  $uv^i w$  in  $L$  liegt für alle  $i \geq 0$ .
- c) Sei  $L$  eine Sprache. Dann ist  $L$  keinesfalls regulär, falls für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$  gilt: Es gibt ein Wort  $z$  aus  $L$ , welches Mindestlänge  $n$  hat, sodass es für jede Zerlegung  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$  und  $|v| \geq 1$  ein  $i \geq 0$  gibt mit  $uv^i w$  liegt nicht in  $L$ .
- d) Sei  $L$  eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine natürliche Zahl  $n \geq 1$ , sodass jedes Wort  $z$  aus  $L$ , welches Mindestlänge  $n$  hat, als  $z = uvw$  geschrieben werden kann, mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$ , und  $uv^i w$  liegt in  $L$  für alle  $i \geq 0$ .
- e) Sei  $L$  eine Sprache und es gibt eine natürliche Zahl  $n \geq 1$ , sodass jedes Wort  $z$  aus  $L$ , welches Mindestlänge  $n$  hat, als  $z = uvw$  geschrieben werden kann, mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$ , und  $uv^i w$  liegt in  $L$  für alle  $i \geq 0$ . Dann ist  $L$  regulär.

Antwort: c) und d).

# Anwendung des Pumping-Lemmas

---

Sei  $L$  eine Sprache, die wir als nicht regulär beweisen wollen.

# Anwendung des Pumping-Lemmas

---

Sei  $L$  eine Sprache, die wir als nicht regulär beweisen wollen.

Pumping-Lemma:

$L$  ist regulär  $\implies L$  hat die Pumping-Eigenschaft



# Anwendung des Pumping-Lemmas

---

Sei  $L$  eine Sprache, die wir als nicht regulär beweisen wollen.

Pumping-Lemma:

$L$  ist regulär  $\implies L$  hat die Pumping-Eigenschaft

Kontraposition:

$L$  hat **nicht** die Pumping-Eigenschaft  $\implies L$  ist **nicht** regulär

# Anwendung des Pumping-Lemmas

Sei  $L$  eine Sprache, die wir als nicht regulär beweisen wollen.

Pumping-Lemma:

$L$  ist regulär  $\implies L$  hat die Pumping-Eigenschaft

Kontraposition:

$L$  hat **nicht** die Pumping-Eigenschaft  $\implies L$  ist **nicht** regulär

Beweisstrategie für die Aussage „ $L$  **nicht** regulär“:

1. Durch die Kontraposition reicht es zu zeigen, dass  $L$  die Pumping-Eigenschaft **nicht** hat.
2. Zeige dies durch Widerspruch: Nehme an, dass  $L$  die Pumping-Eigenschaft hat.
3. Leite einen Widerspruch her.
4. D.h.  $L$  ist **nicht** regulär.

## Beispiel mit vielen Fehlern

---

Zeigen Sie:  $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
2. Wähle ein Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  (wir suchen aus).
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L$  (wir suchen aus).

## Beispiel mit vielen Fehlern

---

Zeigen Sie:  $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt („vom Gegner“).  
*Sei  $n = 100$  vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  (wir suchen aus).
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L$  (wir suchen aus).

## Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie:  $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt („vom Gegner“).  
*Sei  $n = 100$  vom Gegner gewählt.*  
**Nein: Wir müssen für alle Wahlmöglichkeiten des Gegners argumentieren.**
2. Wähle ein Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  (wir suchen aus).
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L$  (wir suchen aus).

## Beispiel mit vielen Fehlern

---

Zeigen Sie:  $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt („vom Gegner“).  
*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  (wir suchen aus).
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L$  (wir suchen aus).

## Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie:  $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt („vom Gegner“).  
*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  (wir suchen aus).  
*Wir wählen  $z = a^2 b^2 \in L$ .*
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L$  (wir suchen aus).

## Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie:  $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt („vom Gegner“).  
*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  (wir suchen aus).  
*Wir wählen  $z = a^2 b^2 \in L$ .*  
*Nein:  $|z| \geq n$  gilt nicht.*
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L$  (wir suchen aus).



## Beispiel mit vielen Fehlern

---

Zeigen Sie:  $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt („vom Gegner“).  
*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  (wir suchen aus).
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L$  (wir suchen aus).

## Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie:  $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt („vom Gegner“).  
*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  (wir suchen aus).  
*Wir wählen  $z = a^n$ .*
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L$  (wir suchen aus).

## Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie:  $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt („vom Gegner“).  
*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  (wir suchen aus).  
*Wir wählen  $z = a^n$ .*  
*Nein:  $z \in L$  gilt nicht.*
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L$  (wir suchen aus).

## Beispiel mit vielen Fehlern

---

Zeigen Sie:  $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt („vom Gegner“).  
*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  (wir suchen aus).
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L$  (wir suchen aus).

## Beispiel mit vielen Fehlern

---

Zeigen Sie:  $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt („vom Gegner“).  
*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  (wir suchen aus).  
*Wir wählen  $z = a^n b^n \in L$ .*
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L$  (wir suchen aus).

## Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie:  $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt („vom Gegner“).  
*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  (wir suchen aus).  
*Wir wählen  $z = a^n b^n \in L$ .*
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  („vom Gegner“).  
*Der Gegner zerlegt  $z$  in  $z = uvw$  mit  $u = a^{n-1}$ ,  $v = a$  und  $w = b^n$  (damit ist  $|uv| \leq n$  und  $|v| \geq 1$  erfüllt).*
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L$  (wir suchen aus).

## Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie:  $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt („vom Gegner“).

*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  vom Gegner gewählt.*

2. Wähle ein Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  (wir suchen aus).

*Wir wählen  $z = a^n b^n \in L$ .*

3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  („vom Gegner“).

*Der Gegner zerlegt  $z$  in  $z = uvw$  mit  $u = a^{n-1}$ ,  $v = a$  und  $w = b^n$  (damit ist  $|uv| \leq n$  und  $|v| \geq 1$  erfüllt).*

**Nein:** Wir müssen für alle Wahlmöglichkeiten des Gegners argumentieren.

4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L$  (wir suchen aus).

## Beispiel mit vielen Fehlern

---

Zeigen Sie:  $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt („vom Gegner“).  
*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  (wir suchen aus).  
*Wir wählen  $z = a^n b^n \in L$ .*
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L$  (wir suchen aus).



## Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie:  $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt („vom Gegner“).  
*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  (wir suchen aus).  
*Wir wählen  $z = a^n b^n \in L$ .*
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  („vom Gegner“).  
*Sei  $z$  zerlegt in  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .*
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L$  (wir suchen aus).

## Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie:  $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt („vom Gegner“).

*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  vom Gegner gewählt.*

2. Wähle ein Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  (wir suchen aus).

*Wir wählen  $z = a^n b^n \in L$ .*

3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  („vom Gegner“).

*Sei  $z$  zerlegt in  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .*

4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L$  (wir suchen aus).

*Dann ist  $u = a^d$ ,  $v = a^e$  und  $w = a^{n-d-e} b^n$  mit  $k > 0$  und damit für  $i = 0$ :  
 $uv^i w = a^{n-e} b^n \notin L$ . Widerspruch.*

# Finde den Fehler

Sei  $L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

## Behauptung

$L$  ist nicht regulär.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma:

1. Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.
2. Wir wählen  $z = a^n a^n \in L$ .
3. Sei  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$ ,  $v \geq 1$  und  $uv^i w$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  eine Zerlegung von  $z$ .
4. Dann ist  $u = a^d$ ,  $v = a^e$ , und  $w = a^{n+n-d-e}$  und  $e \geq 1$ ,  $d + e \leq n$ .  
Dann ist  $uv^0 w = a^{n-e} a^n \notin L$ . Widerspruch. □

# Finde den Fehler

Sei  $L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

## Behauptung

$L$  ist nicht regulär.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma:

1. Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.
2. Wir wählen  $z = a^n a^n \in L$ .
3. Sei  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$ ,  $v \geq 1$  und  $uv^i w$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  eine Zerlegung von  $z$ .
4. Dann ist  $u = a^d$ ,  $v = a^e$ , und  $w = a^{n+n-d-e}$  und  $e \geq 1$ ,  $d + e \leq n$ .  
Dann ist  $uv^0 w = a^{n-e} a^n \notin L$ . Widerspruch. □

# Finde den Fehler

Sei  $L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

## Behauptung

$L$  ist nicht regulär.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma:

1. Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.
2. Wir wählen  $z = a^n a^n \in L$ .
3. Sei  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$ ,  $v \geq 1$  und  $uv^i w$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  eine Zerlegung von  $z$ .
4. Dann ist  $u = a^d$ ,  $v = a^e$ , und  $w = a^{n+n-d-e}$  und  $e \geq 1$ ,  $d + e \leq n$ .  
Dann ist  $uv^0 w = a^{n-e} a^n \notin L$ . Widerspruch. □

# Finde den Fehler

Sei  $L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

## Behauptung

$L$  ist nicht regulär.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma:

1. Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.
2. Wir wählen  $z = a^n a^n \in L$ .
3. Sei  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$ ,  $v \geq 1$  und  $uv^i w$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  eine Zerlegung von  $z$ .
4. Dann ist  $u = a^d$ ,  $v = a^e$ , und  $w = a^{n+n-d-e}$  und  $e \geq 1$ ,  $d + e \leq n$ .  
Dann ist  ~~$uv^0 w = a^{n-e} a^n \notin L$ . Widerspruch.~~ □

Beachte:  $L$  ist regulär, z.B. wird  $L$  durch den regulären Ausdruck  $(aa)^*$  erzeugt.

## $L$ erfüllt die Pumping-Eigenschaft

---

### Satz

$L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  erfüllt die Pumping-Eigenschaft.

# L erfüllt die Pumping-Eigenschaft

## Satz

$L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  erfüllt die Pumping-Eigenschaft.

## Beweis

1. Sei  $n = 2$ .
2. Sei  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$ .
3. Wir zerlegen  $z = uvw$  mit  $u = \varepsilon$ ,  $v = z[1]z[2]$  und  $w$  das Suffix von  $z$  ohne die ersten beiden Buchstaben.
4. Da  $z \in L$ , ist  $z = a^j a^j$  und dann gilt:  $v = aa$ ,  $w = a^{j-1} a^{j-1}$ .  
Daher gilt auch:  $uv^i w = a^j a^j a^{j-1} a^{j-1} = a^{i+j-1} a^{i+j-1} \in L$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . □



## Aufgabe: Regularität widerlegen

---

Zeigen Sie mit dem Pumping-Lemma, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind:

- ▶  $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$
- ▶  $L_2 = \{a^n b b c^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$
- ▶  $L_3 = \{a^n \$ a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

## Aufgabe: Regularität widerlegen

### Satz

$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt.
2. Wähle ein Wort  $z \in L_1$  mit  $|z| \geq n$ .
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L_1$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L_1$ .

## Aufgabe: Regularität widerlegen

### Satz

$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt.  
*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.*
2. Wähle ein Wort  $z \in L_1$  mit  $|z| \geq n$ .
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L_1$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L_1$ .

## Aufgabe: Regularität widerlegen

### Satz

$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt.  
*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.*
2. Wähle ein Wort  $z \in L_1$  mit  $|z| \geq n$ .  
*Sei  $z = a^n b^n$ . (Dann gilt  $z \in L_1$  und  $|z| \geq n$ .)*
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L_1$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L_1$ .

## Aufgabe: Regularität widerlegen

### Satz

$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt.  
*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.*
2. Wähle ein Wort  $z \in L_1$  mit  $|z| \geq n$ .  
*Sei  $z = a^n b^n$ . (Dann gilt  $z \in L_1$  und  $|z| \geq n$ .)*
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L_1$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .  
*Sei  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L_1$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  eine Zerlegung von  $z$ .*
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L_1$ .

## Aufgabe: Regularität widerlegen

### Satz

$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt.

*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.*

2. Wähle ein Wort  $z \in L_1$  mit  $|z| \geq n$ .

*Sei  $z = a^n b^n$ . (Dann gilt  $z \in L_1$  und  $|z| \geq n$ .)*

3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L_1$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .

*Sei  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L_1$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  eine Zerlegung von  $z$ .*

4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L_1$ .

*Da  $|uv| \leq n$  und  $|v| > 0$  gilt  $v = a^k$  mit  $k > 0$  und daher  $uv^0 w = a^{n-k} b^n \notin L_1$  (d.h. für  $i = 0$  gilt  $uv^i w \notin L_1$ ). Widerspruch.*

## Aufgabe: Regularität widerlegen

### Satz

$L_2 = \{a^n b b c^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt.
2. Wähle ein Wort  $z \in L_2$  mit  $|z| \geq n$ .
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L_2$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L_2$ .

## Aufgabe: Regularität widerlegen

### Satz

$L_2 = \{a^n b b c^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt.  
*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.*
2. Wähle ein Wort  $z \in L_2$  mit  $|z| \geq n$ .
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L_2$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L_2$ .



## Aufgabe: Regularität widerlegen

### Satz

$L_2 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt.  
*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.*
2. Wähle ein Wort  $z \in L_2$  mit  $|z| \geq n$ .  
*Sei  $z = a^n bbc^{n+1}$ . (Dann gilt  $z \in L_2$  und  $|z| \geq n$ .)*
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L_2$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L_2$ .

## Aufgabe: Regularität widerlegen

### Satz

$L_2 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt.  
*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.*
2. Wähle ein Wort  $z \in L_2$  mit  $|z| \geq n$ .  
*Sei  $z = a^n bbc^{n+1}$ . (Dann gilt  $z \in L_2$  und  $|z| \geq n$ .)*
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L_2$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .  
*Sei  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L_2$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  eine Zerlegung von  $z$ .*
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L_2$ .

## Aufgabe: Regularität widerlegen

### Satz

$L_2 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt.

*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.*

2. Wähle ein Wort  $z \in L_2$  mit  $|z| \geq n$ .

*Sei  $z = a^n bbc^{n+1}$ . (Dann gilt  $z \in L_2$  und  $|z| \geq n$ .)*

3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L_2$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .

*Sei  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L_2$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  eine Zerlegung von  $z$ .*

4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L_2$ .

*Da  $|uv| \leq n$  und  $|v| > 0$  gilt  $v = a^k$  mit  $k > 0$  und daher  $uv^3 w = a^{n+2k} bbc^{n+1} \notin L_2$  (d.h. für  $i = 3$  gilt  $uv^i w \notin L_2$ ). Widerspruch.*

## Aufgabe: Regularität widerlegen

### Satz

$L_3 = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt.
2. Wähle ein Wort  $z \in L_3$  mit  $|z| \geq n$ .
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L_3$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L_3$ .

## Aufgabe: Regularität widerlegen

### Satz

$L_3 = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt.  
*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.*
2. Wähle ein Wort  $z \in L_3$  mit  $|z| \geq n$ .
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L_3$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L_3$ .

## Aufgabe: Regularität widerlegen

### Satz

$L_3 = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt.  
*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.*
2. Wähle ein Wort  $z \in L_3$  mit  $|z| \geq n$ .  
*Sei  $z = a^n a^n$ . (Dann gilt  $z \in L_3$  und  $|z| \geq n$ .)*
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L_3$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L_3$ .

## Aufgabe: Regularität widerlegen

### Satz

$L_3 = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt.  
*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.*
2. Wähle ein Wort  $z \in L_3$  mit  $|z| \geq n$ .  
*Sei  $z = a^n a^n$ . (Dann gilt  $z \in L_3$  und  $|z| \geq n$ .)*
3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L_3$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .  
*Sei  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L_3$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  eine Zerlegung von  $z$ .*
4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L_3$ .

# Aufgabe: Regularität widerlegen

## Satz

$L_3 = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  sei beliebig gewählt.

*Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.*

2. Wähle ein Wort  $z \in L_3$  mit  $|z| \geq n$ .

*Sei  $z = a^n a^n$ . (Dann gilt  $z \in L_3$  und  $|z| \geq n$ .)*

3. Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L_3$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .

*Sei  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  und  $uv^i w \in L_3$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  eine Zerlegung von  $z$ .*

4. Für jede solche Zerlegung gib ein  $i \in \mathbb{N}$  an mit  $uv^i w \notin L_3$ .

*Da  $|uv| \leq n$  und  $|v| > 0$  gilt  $v = a^k$  mit  $k > 0$  und daher  $uv^0 w = a^{n-k} a^n \notin L_3$ .  
Widerspruch.*



---

## 4. Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen (nur FSK)

# Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

## Definition

Eine Sprache  $L$  hat die **Pumping-Eigenschaft** (für kontextfreie Sprachen), wenn gilt:  
Es gibt eine Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ , sodass jedes Wort  $z \in L$ , welches Mindestlänge  $n$  hat (d.h.  $|z| \geq n$ ), als  $z = uvwxy$  geschrieben werden kann, sodass gilt:

1.  $|vx| \geq 1$
2.  $|vwx| \leq n$
3. für alle  $i \in \mathbb{N}$ :  $uv^iwx^iy \in L$ .

## Lemma (Pumping-Lemma)

Jede kontextfreie Sprache hat die **Pumping-Eigenschaft**.

# Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

---

## Aufgabe

Zeige, dass  $L_4 = \{a^m ba^m ba^m \mid m \in \mathbb{N}\}$  nicht kontextfrei ist.

# Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

---

## Aufgabe

Zeige, dass  $L_4 = \{a^m ba^m ba^m \mid m \in \mathbb{N}\}$  nicht kontextfrei ist.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma:

# Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

---

## Aufgabe

Zeige, dass  $L_4 = \{a^m ba^m ba^m \mid m \in \mathbb{N}\}$  nicht kontextfrei ist.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma:

- ▶ Sei  $n$  beliebig.

# Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

## Aufgabe

Zeige, dass  $L_4 = \{a^m ba^m ba^m \mid m \in \mathbb{N}\}$  nicht kontextfrei ist.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma:

- ▶ Sei  $n$  beliebig.
- ▶ Wir wählen  $z = a^n ba^n ba^n$ . (Dann gilt  $z \in L_4$  und  $|z| \geq n$ .)

# Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

## Aufgabe

Zeige, dass  $L_4 = \{a^m ba^m ba^m \mid m \in \mathbb{N}\}$  nicht kontextfrei ist.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma:

- ▶ Sei  $n$  beliebig.
- ▶ Wir wählen  $z = a^n ba^n ba^n$ . (Dann gilt  $z \in L_4$  und  $|z| \geq n$ .)
- ▶ Sei  $z = uvwxy$  mit  $|vwx| \leq n$ ,  $|vx| \geq 1$  und  $uv^i wx^i y \in L_4$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .

# Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

## Aufgabe

Zeige, dass  $L_4 = \{a^m ba^m ba^m \mid m \in \mathbb{N}\}$  nicht kontextfrei ist.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma:

- ▶ Sei  $n$  beliebig.
- ▶ Wir wählen  $z = a^n ba^n ba^n$ . (Dann gilt  $z \in L_4$  und  $|z| \geq n$ .)
- ▶ Sei  $z = uvwxy$  mit  $|vwx| \leq n$ ,  $|vx| \geq 1$  und  $uv^i wx^i y \in L_4$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .
- ▶ Dann kann  $vwx$  nicht zwei  $b$ 's enthalten.



# Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

## Aufgabe

Zeige, dass  $L_4 = \{a^m ba^m ba^m \mid m \in \mathbb{N}\}$  nicht kontextfrei ist.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma:

- ▶ Sei  $n$  beliebig.
- ▶ Wir wählen  $z = a^n ba^n ba^n$ . (Dann gilt  $z \in L_4$  und  $|z| \geq n$ .)
- ▶ Sei  $z = uvwxy$  mit  $|vwx| \leq n$ ,  $|vx| \geq 1$  und  $uv^i wx^i y \in L_4$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .
- ▶ Dann kann  $vwx$  nicht zwei  $b$ 's enthalten.
- ▶ Fall  $vx$  enthält ein  $b$ : Dann  $uv^0 wx^0 y \notin L_4$ , da das  $b$  entfernt wurde. Widerspruch.

# Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

## Aufgabe

Zeige, dass  $L_4 = \{a^m ba^m ba^m \mid m \in \mathbb{N}\}$  nicht kontextfrei ist.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma:

- ▶ Sei  $n$  beliebig.
- ▶ Wir wählen  $z = a^n ba^n ba^n$ . (Dann gilt  $z \in L_4$  und  $|z| \geq n$ .)
- ▶ Sei  $z = uvwxy$  mit  $|vwx| \leq n$ ,  $|vx| \geq 1$  und  $uv^i wx^i y \in L_4$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .
- ▶ Dann kann  $vwx$  nicht zwei  $b$ 's enthalten.
- ▶ Fall  $vx$  enthält ein  $b$ : Dann  $uv^0 wx^0 y \notin L_4$ , da das  $b$  entfernt wurde. Widerspruch.
- ▶ Fall  $vx$  enthält kein  $b$ : Dann  $uv^2 wx^2 y \notin L_4$ , da maximal zwei  $a$ -Folgen aufgepumpt wurden, die dritte  $a$ -Folge aber noch aus  $n$  vielen  $a$ 's besteht (und die Trennung durch  $b$  noch vorhanden ist). Widerspruch. □