

Zentralübung 3

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 4. April 2024
Basiert auf Folien von PD Dr. David Sabel



Plan für heute

1. Reguläre Ausdrücke
2. Abschlusseigenschaften von regulären Sprachen
3. Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen
4. Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen (nur FSK)

1. Reguläre Ausdrücke

Übersicht über reguläre Ausdrücke

Syntax	Semantik
\emptyset	$L(\emptyset) = \emptyset$
ε	$L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
a (mit $a \in \Sigma$)	$L(a) = \{a\}$
$\alpha_1\alpha_2$	$L(\alpha_1\alpha_2) = L(\alpha_1)L(\alpha_2)$
$(\alpha_1 \mid \alpha_2)$	$L(\alpha_1) \cup L(\alpha_2)$
$(\alpha)^*$	$L(\alpha)^*$

wobei $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ reguläre Ausdrücke sind.

Übersicht über reguläre Ausdrücke

Syntax	Semantik
\emptyset	$L(\emptyset) = \emptyset$
ε	$L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
a (mit $a \in \Sigma$)	$L(a) = \{a\}$
$\alpha_1\alpha_2$	$L(\alpha_1\alpha_2) = L(\alpha_1)L(\alpha_2)$
$(\alpha_1 \mid \alpha_2)$	$L(\alpha_1) \cup L(\alpha_2)$
$(\alpha)^*$	$L(\alpha)^*$

wobei $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ reguläre Ausdrücke sind.

Beachte:

- ▶ Es gibt verschiedene Notationen.
Manchmal wird $(\alpha_1 + \alpha_2)$ oder $(\alpha_1 \cup \alpha_2)$ geschrieben statt $(\alpha_1 \mid \alpha_2)$.
- ▶ Ein Konstrukt ist eigentlich überflüssig.

1. Quiz

Welches Konstrukt ist eigentlich überflüssig für die regulären Ausdrücke, da es mit den anderen Konstrukten dargestellt werden kann?

- a) \emptyset
- b) ε
- c) $(\alpha)^*$
- d) $\alpha_1\alpha_2$
- e) $(\alpha_1|\alpha_2)$

1. Quiz

Welches Konstrukt ist eigentlich überflüssig für die regulären Ausdrücke, da es mit den anderen Konstrukten dargestellt werden kann?

- a) \emptyset
- b) ε
- c) $(\alpha)^*$
- d) $\alpha_1\alpha_2$
- e) $(\alpha_1|\alpha_2)$

Antwort: b), da ε durch $(\emptyset)^*$ dargestellt werden kann:

$$L((\emptyset)^*) = \emptyset^* = \emptyset^0 \cup \emptyset^1 \cup \dots = \{\varepsilon\} \cup \emptyset \cup \dots = \{\varepsilon\}.$$

2. Quiz

Welcher reguläre Ausdruck erzeugt die Sprache $\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| = 4\}$?

- a) $(ab)^*(ab)^*(ab)^*(ab)^*$
- b) $(a|b)(a|b)(a|b)(a|b)$
- c) $(aaaa|bbbb)$
- d) $(ab|ab|ab|ab)$
- e) $(aa|ab|ba|bb)(aa|ab|ba|bb)$

2. Quiz

Welcher reguläre Ausdruck erzeugt die Sprache $\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| = 4\}$?

- a) $(ab)^*(ab)^*(ab)^*(ab)^*$
- b) $(a|b)(a|b)(a|b)(a|b)$
- c) $(aaaa|bbbb)$
- d) $(ab|ab|ab|ab)$
- e) $(aa|ab|ba|bb)(aa|ab|ba|bb)$

Antwort: b) und e) sind beide richtig.

Aufgabe: Regulären Ausdruck angeben

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der

$$\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| \leq 4\}$$

erzeugt.

Aufgabe: Regulären Ausdruck angeben

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der

$$\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| \leq 4\}$$

erzeugt.

Antwort: $(\epsilon|a|b)(\epsilon|a|b)(\epsilon|a|b)(\epsilon|a|b)$ oder
 $(\epsilon \mid (a|b) \mid (a|b)(a|b) \mid (a|b)(a|b)(a|b) \mid (a|b)(a|b)(a|b)(a|b))$.

Aufgabe: Regulären Ausdruck angeben

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der

$$\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| \geq 4\}$$

erzeugt.

Aufgabe: Regulären Ausdruck angeben

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der

$$\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| \geq 4\}$$

erzeugt.

Antwort: $(a|b)(a|b)(a|b)(a|b)(a|b)^*$.

Komplement von regulären Ausdrücken

Es gibt keinen „Komplementoperator“ für reguläre Ausdrücke.

Komplement von regulären Ausdrücken

Es gibt keinen „Komplementoperator“ für reguläre Ausdrücke.

► **Harte Methode:**

Regulärer Ausdruck

→ NFA

→ DFA

→ DFA für das Komplement

→ regulärer Ausdruck

Komplement von regulären Ausdrücken

Es gibt keinen „Komplementoperator“ für reguläre Ausdrücke.

▶ **Harte Methode:**

Regulärer Ausdruck

→ NFA

→ DFA

→ DFA für das Komplement

→ regulärer Ausdruck

▶ **Einfachere Methode:**

Regulärer Ausdruck

→ einfache Beschreibung der erzeugten Sprache

→ einfache Beschreibung des Komplements

→ regulärer Ausdruck

Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

Finde regulären Ausdruck für das Komplement, der von 0^*10^* erzeugten Sprache.

Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

Finde regulären Ausdruck für das Komplement, der von 0^*10^* erzeugten Sprache.

Antwort:

Schritte:

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von 0^*10^* erzeugten Sprache?
2. Was ist eine einfache Beschreibung des Komplements davon?
3. Was ist ein regulärer Ausdruck dazu?

Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von 0^*10^* erzeugten Sprache?

Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von 0^*10^* erzeugten Sprache?
 $L(0^*10^*) =$ Wörter über $\{0,1\}$, die genau eine 1 enthalten.

Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von 0^*10^* erzeugten Sprache?
 $L(0^*10^*) =$ Wörter über $\{0,1\}$, die genau eine 1 enthalten.
2. Was ist eine einfache Beschreibung des Komplements davon?

Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von 0^*10^* erzeugten Sprache?
 $L(0^*10^*) =$ Wörter über $\{0,1\}$, die genau eine 1 enthalten.
2. Was ist eine einfache Beschreibung des Komplements davon?
 $\overline{L(0^*10^*)} =$ Wörter über $\{0,1\}$, die keine oder mindestens 2 1en enthalten
 $=$ Wörter, die keine 1en enthalten
 \cup Wörter, die mindestens 2 1en enthalten

Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von 0^*10^* erzeugten Sprache?
 $L(0^*10^*) =$ Wörter über $\{0,1\}$, die genau eine 1 enthalten.
2. Was ist eine einfache Beschreibung des Komplements davon?
 $\overline{L(0^*10^*)} =$ Wörter über $\{0,1\}$, die keine oder mindestens 2 1en enthalten
 $=$ Wörter, die keine 1en enthalten
 \cup Wörter, die mindestens 2 1en enthalten
3. Was ist ein regulärer Ausdruck dazu?
 - ▶ Regulärer Ausdruck, der alle Wörter über $\{0,1\}$ erzeugt, die keine 1en enthalten:

Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von 0^*10^* erzeugten Sprache?

$L(0^*10^*) =$ Wörter über $\{0,1\}$, die genau eine 1 enthalten.

2. Was ist eine einfache Beschreibung des Komplements davon?

$\overline{L(0^*10^*)} =$ Wörter über $\{0,1\}$, die keine oder mindestens 2 1en enthalten
= Wörter, die keine 1en enthalten
 \cup Wörter, die mindestens 2 1en enthalten

3. Was ist ein regulärer Ausdruck dazu?

- ▶ Regulärer Ausdruck, der alle Wörter über $\{0,1\}$ erzeugt, die keine 1en enthalten:
 0^*
- ▶ Regulärer Ausdruck, der alle Wörter über $\{0,1\}$ erzeugt, die mindesten 2 1en enthalten:

Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von 0^*10^* erzeugten Sprache?
 $L(0^*10^*) =$ Wörter über $\{0,1\}$, die genau eine 1 enthalten.
2. Was ist eine einfache Beschreibung des Komplements davon?
 $\overline{L(0^*10^*)} =$ Wörter über $\{0,1\}$, die keine oder mindestens 2 1en enthalten
 $=$ Wörter, die keine 1en enthalten
 \cup Wörter, die mindestens 2 1en enthalten
3. Was ist ein regulärer Ausdruck dazu?
 - ▶ Regulärer Ausdruck, der alle Wörter über $\{0,1\}$ erzeugt, die keine 1en enthalten:
 0^*
 - ▶ Regulärer Ausdruck, der alle Wörter über $\{0,1\}$ erzeugt, die mindesten 2 1en enthalten:
 $(0|1)^*1(0|1)^*1(0|1)^*$
 - ▶ Zusammen:

Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von 0^*10^* erzeugten Sprache?

$L(0^*10^*) =$ Wörter über $\{0,1\}$, die genau eine 1 enthalten.

2. Was ist eine einfache Beschreibung des Komplements davon?

$\overline{L(0^*10^*)} =$ Wörter über $\{0,1\}$, die keine oder mindestens 2 1en enthalten
= Wörter, die keine 1en enthalten
 \cup Wörter, die mindestens 2 1en enthalten

3. Was ist ein regulärer Ausdruck dazu?

- ▶ Regulärer Ausdruck, der alle Wörter über $\{0,1\}$ erzeugt, die keine 1en enthalten:
 0^*
- ▶ Regulärer Ausdruck, der alle Wörter über $\{0,1\}$ erzeugt, die mindesten 2 1en enthalten:
 $(0|1)^*1(0|1)^*1(0|1)^*$
- ▶ Zusammen:
 $(0^*|(0|1)^*1(0|1)^*1(0|1)^*)$

Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit ε -Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit ε -Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:

Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit ε -Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:



Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit ε -Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:



Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit ε -Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:



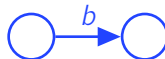
Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit ϵ -Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:



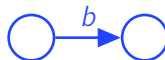
Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit ϵ -Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:



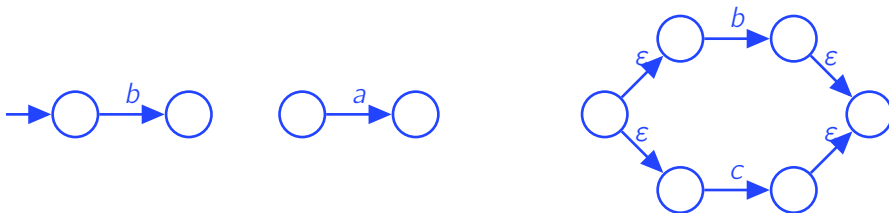
Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit ϵ -Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:



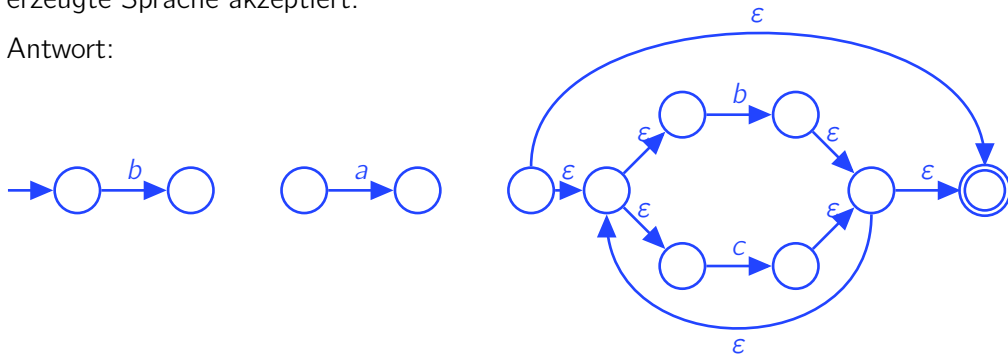
Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit ϵ -Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:



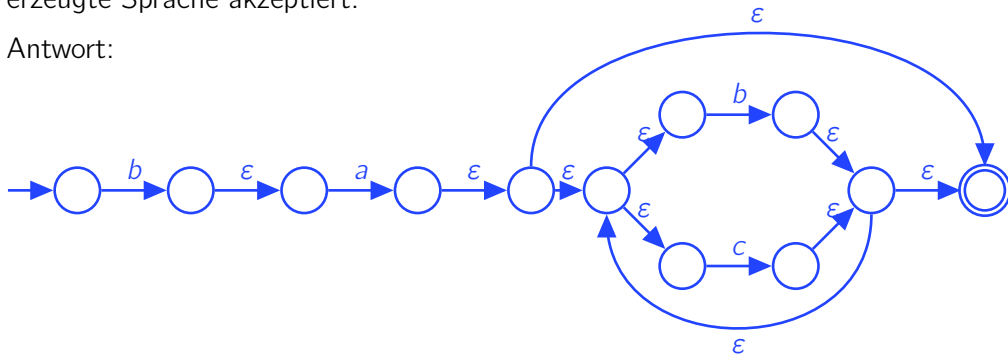
Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit ϵ -Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:



2. Abschlusseigenschaften von regulären Sprachen

Satz

Seien L_1, L_2 regulär. Dann sind $L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2, L_1^*, \overline{L_1}, L_1 L_2$ auch regulär.

Aus dem Aufgabenblatt 3 für FSK:

- ▶ Wenn L regulär ist, dann ist auch $\{\overline{w} \mid w \in L\}$ regulär.

Abschlusseigenschaft für Schnitt:

$$L_1 \text{ regulär und } L_2 \text{ regulär} \implies L_1 \cap L_2 \text{ regulär}$$

Welche Folgerungen sind korrekt?

- a) Wenn $L_1 \cap L_2$ nicht regulär ist, dann ist weder L_1 noch L_2 regulär.
- b) Wenn $L_1 \cap L_2$ regulär ist, dann sind L_1 und L_2 regulär.
- c) Wenn $L_1 \cap L_2$ nicht regulär ist und L_1 regulär ist, dann ist L_2 nicht regulär.
- d) Wenn L_1 und L_2 jeweils nicht regulär sind, dann ist $L_1 \cap L_2$ ebenfalls nicht regulär.

Abschlusseigenschaft für Schnitt:

$$L_1 \text{ regulär und } L_2 \text{ regulär} \implies L_1 \cap L_2 \text{ regulär}$$

Welche Folgerungen sind korrekt?

- a) Wenn $L_1 \cap L_2$ nicht regulär ist, dann ist weder L_1 noch L_2 regulär.
- b) Wenn $L_1 \cap L_2$ regulär ist, dann sind L_1 und L_2 regulär.
- c) Wenn $L_1 \cap L_2$ nicht regulär ist und L_1 regulär ist, dann ist L_2 nicht regulär.
- d) Wenn L_1 und L_2 jeweils nicht regulär sind, dann ist $L_1 \cap L_2$ ebenfalls nicht regulär.

Antwort: c).

Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

Anleitung zum Widerlegen der Regularität von L mit Abschlusseigenschaften:

1. Nehme an, dass L regulär ist.
2. Operiere auf L unter Erhaltung der Regularität:
vereinige, schneide, komplementiere, multipliziere L mit bekannt regulärer Sprache, bilde Kleeneschen Abschluss, drehe Sprache um.
3. Kommt dabei eine bekannt **nicht reguläre** Sprache heraus,
dann hat man einen **Widerspruch** und die Annahme war falsch.
Daher ist L dann nicht regulär.

Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

Satz

$S = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

Satz

$S = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweis Durch Widerspruch. Nehme an, S ist regulär.

Da $L_1 = L(a^*b^*)$ regulär ist, muss (aufgrund der Abschlusseigenschaft für reguläre Sprachen) auch $L_1 \cap S$ regulär sein.

Aber $L_1 \cap S = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär. Widerspruch. □

Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

Satz

$T = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$ ist nicht regulär.

Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

Satz

$T = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$ ist nicht regulär.

Beweis Durch Widerspruch. Nehme an, T ist regulär.

Dann ist aufgrund der Abschlusseigenschaft für das Komplement auch \overline{T} regulär.

Da $L(a^*b^*)$ regulär ist, gilt mit der Abschlusseigenschaft für den Schnitt auch, dass $\overline{T} \cap L(a^*b^*)$ regulär ist.

Aber $\overline{T} \cap L(a^*b^*) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär. Widerspruch. □

Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

Aufpassen das man sich nicht betrugt:
Die folgenden Beweise sind alle falsch:

Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

Aufpassen das man sich nicht betrugt:

Die folgenden Beweise sind alle falsch:

- ▶ $L_x = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär, reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Produktbildung, also $L_a L_b = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär.

Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

Aufpassen das man sich nicht betrugt:

Die folgenden Beweise sind alle falsch:

- ▶ $L_x = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär, reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Produktbildung, also $L_a L_b = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär.
- ▶ $L_< = \{a^n b^m \mid n < m\}$ ist nicht regulär, $L_{\geq} = \{a^n b^m \mid n \geq m\}$ ist nicht regulär, also ist $L_< \cup L_{\geq} = \{a^n b^m \mid n < m \text{ oder } n \geq m\}$ nicht regulär.

Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

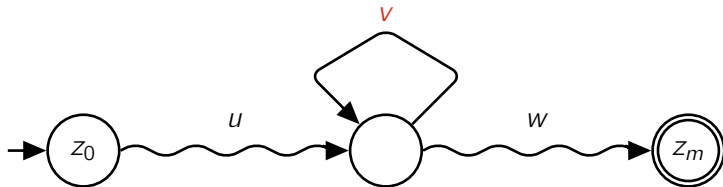
Aufpassen das man sich nicht betrugt:

Die folgenden Beweise sind alle falsch:

- ▶ $L_x = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär, reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Produktbildung, also $L_a L_b = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär.
- ▶ $L_< = \{a^n b^m \mid n < m\}$ ist nicht regulär, $L_{\geq} = \{a^n b^m \mid n \geq m\}$ ist nicht regulär, also ist $L_< \cup L_{\geq} = \{a^n b^m \mid n < m \text{ oder } n \geq m\}$ nicht regulär.
- ▶ $L_1 = \{\varepsilon, c\}$ ist regulär, $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär, also ist $L = \{c^i a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}, i \in \{0, 1\}\}$ nicht regulär.

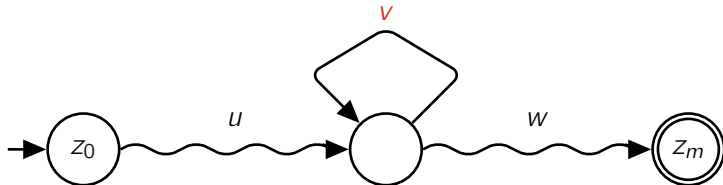
3. Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Intuition hinter dem Pumping-Lemma



- ▶ Wenn ein DFA n Zustände hat, dann müssen akzeptierte Wörter der Länge $\geq n$ eine Schleife durchlaufen.
- ▶ Diese Wörter kann man aufpumpen: $uvw, uvvw, uvvww, \dots$
Man kann auch die Schleife überspringen: uw .
Allgemein: $uv^i w$ für $i \in \mathbb{N}$ liegt in der erkannten Sprache.

Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen



Definition

Eine Sprache L hat die **Pumping-Eigenschaft** (für reguläre Sprachen), wenn gilt: Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$, welches Mindestlänge n hat (d.h. $|z| \geq n$), als $z = uvw$ geschrieben werden kann, sodass gilt:

1. $|uv| \leq n$
2. $|v| \geq 1$
3. für alle $i \in \mathbb{N}$: $uv^i w \in L$.

Lemma (Pumping-Lemma)

Jede reguläre Sprache hat die **Pumping-Eigenschaft**.

Welche der folgenden Aussagen sind korrekte Formulierungen des Pumping-Lemmas?

- a) Sei L eine reguläre Sprache. Dann gilt für jede natürliche Zahl $n \geq 1$: Es gibt ein Wort z aus L , welches Mindestlänge n hat, sodass für jede Zerlegung $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ gibt es ein $i \geq 0$ mit $uv^i w$ liegt nicht in L .
- b) Sei L eine Sprache. Dann ist L regulär, genau dann, wenn es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt, sodass jedes Wort z aus L , welches Mindestlänge n hat, als $z = uvw$ geschrieben werden kann, mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, und $uv^i w$ liegt in L für alle $i \geq 0$.
- c) Sei L eine Sprache. Dann ist L keinesfalls regulär, falls für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: Es gibt ein Wort z aus L , welches Mindestlänge n hat, sodass für jede Zerlegung $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ gibt es ein $i \geq 0$ mit $uv^i w$ liegt nicht in L .
- d) Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n \geq 1$, sodass jedes Wort z aus L , welches Mindestlänge n hat, als $z = uvw$ geschrieben werden kann, mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, und $uv^i w$ liegt in L für alle $i \geq 0$.
- e) Sei L eine Sprache und es gibt eine natürliche Zahl $n \geq 1$, sodass jedes Wort z aus L , welches Mindestlänge n hat, als $z = uvw$ geschrieben werden kann, mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, und $uv^i w$ liegt in L für alle $i \geq 0$. Dann ist L regulär.

Quiz

Welche der folgenden Aussagen sind korrekte Formulierungen des Pumping-Lemmas?

- a) Sei L eine reguläre Sprache. Dann gilt für jede natürliche Zahl $n \geq 1$: Es gibt ein Wort z aus L , welches Mindestlänge n hat, sodass für jede Zerlegung $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ gibt es ein $i \geq 0$ mit $uv^i w$ liegt nicht in L .
- b) Sei L eine Sprache. Dann ist L regulär, genau dann, wenn es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt, sodass jedes Wort z aus L , welches Mindestlänge n hat, als $z = uvw$ geschrieben werden kann, mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, und $uv^i w$ liegt in L für alle $i \geq 0$.
- c) Sei L eine Sprache. Dann ist L keinesfalls regulär, falls für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: Es gibt ein Wort z aus L , welches Mindestlänge n hat, sodass für jede Zerlegung $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ gibt es ein $i \geq 0$ mit $uv^i w$ liegt nicht in L .
- d) Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n \geq 1$, sodass jedes Wort z aus L , welches Mindestlänge n hat, als $z = uvw$ geschrieben werden kann, mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, und $uv^i w$ liegt in L für alle $i \geq 0$.
- e) Sei L eine Sprache und es gibt eine natürliche Zahl $n \geq 1$, sodass jedes Wort z aus L , welches Mindestlänge n hat, als $z = uvw$ geschrieben werden kann, mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, und $uv^i w$ liegt in L für alle $i \geq 0$. Dann ist L regulär.

Antwort: c) und d).

Anwendung des Pumping-Lemmas

Sei eine Sprache L , die wir als nicht regulär beweisen wollen.

Anwendung des Pumping-Lemmas

Sei eine Sprache L , die wir als nicht regulär beweisen wollen.

Pumping-Lemma:

L ist regulär $\implies L$ hat die Pumping-Eigenschaft

Anwendung des Pumping-Lemmas

Sei eine Sprache L , die wir als nicht regulär beweisen wollen.

Pumping-Lemma:

L ist regulär $\implies L$ hat die Pumping-Eigenschaft

Kontraposition:

L hat **nicht** die Pumping-Eigenschaft $\implies L$ ist **nicht** regulär

Anwendung des Pumping-Lemmas

Sei eine Sprache L , die wir als nicht regulär beweisen wollen.

Pumping-Lemma:

L ist regulär $\implies L$ hat die Pumping-Eigenschaft

Kontraposition:

L hat **nicht** die Pumping-Eigenschaft $\implies L$ ist **nicht** regulär

Beweisstrategie für die Aussage „ L **nicht** regulär“:

1. Durch die Kontraposition reicht es zu zeigen, dass L die Pumping-Eigenschaft **nicht** hat.
2. Zeige dies durch Widerspruch: Nehme an, dass L die Pumping-Eigenschaft hat.
3. Leite einen Widerspruch her.
4. D.h. L ist **nicht** regulär.

Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
Sei $n = 100$ vom Gegner gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
Sei $n = 100$ vom Gegner gewählt.
Nein: Wir müssen für alle Wahlmöglichkeiten des Gegners argumentieren.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
Wir wählen $z = a^2 b^2 \in L$.
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
Wir wählen $z = a^2 b^2 \in L$.
Nein: $|z| \geq n$ gilt nicht.
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
Wir wählen $z = a^n$.
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
Wir wählen $z = a^n$.
Nein: $z \in L$ gilt nicht.
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
Wir wählen $z = a^n b^n \in L$.
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
Wir wählen $z = a^n b^n \in L$.
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
Der Gegner zerlegt z in $z = uvw$ mit $u = a^{n-1}$, $v = a$ und $w = b^n$ (damit ist $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ erfüllt).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.

2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).

Wir wählen $z = a^n b^n \in L$.

3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).

Der Gegner zerlegt z in $z = uvw$ mit $u = a^{n-1}$, $v = a$ und $w = b^n$ (damit ist $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ erfüllt).

Nein: Wir müssen für alle Wahlmöglichkeiten des Gegners argumentieren.

4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
Wir wählen $z = a^n b^n \in L$.
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
Wir wählen $z = a^n b^n \in L$.
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
Sei z zerlegt in $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.

2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).

Wir wählen $z = a^n b^n \in L$.

3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).

Sei z zerlegt in $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

*Dann ist $u = a^d$, $v = a^e$ und $w = a^{n-d-e} b^n$ mit $k > 0$ und damit für $i = 0$:
 $uv^i w = a^{n-e} b^n \notin L$. Widerspruch.*

Finde den Fehler

Sei $L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Behauptung

L ist nicht regulär.

Beweis Mit dem Pumping-Lemma:

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wir wählen $z = a^n a^n \in L$.
3. Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $v \geq 1$ und $uv^i w$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von z .
4. Dann ist $u = a^d$, $v = a^e$, und $w = a^{n+n-d-e}$ und $e \geq 1$, $d + e \leq n$.
Dann ist $uv^0 w = a^{n-e} a^n \notin L$. Widerspruch. □

Finde den Fehler

Sei $L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Behauptung

L ist nicht regulär.

Beweis Mit dem Pumping-Lemma:

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wir wählen $z = a^n a^n \in L$.
3. Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $v \geq 1$ und $uv^i w$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von z .
4. Dann ist $u = a^d$, $v = a^e$, und $w = a^{n+n-d-e}$ und $e \geq 1$, $d + e \leq n$.
Dann ist $uv^0 w = a^{n-e} a^n \notin L$. Widerspruch. □

Finde den Fehler

Sei $L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Behauptung

L ist nicht regulär.

Beweis Mit dem Pumping-Lemma:

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wir wählen $z = a^n a^n \in L$.
3. Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $v \geq 1$ und $uv^i w$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von z .
4. Dann ist $u = a^d$, $v = a^e$, und $w = a^{n+n-d-e}$ und $e \geq 1$, $d + e \leq n$.
Dann ist $uv^0 w = a^{n-e} a^n \notin L$. Widerspruch. □

Finde den Fehler

Sei $L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Behauptung

L ist nicht regulär.

Beweis Mit dem Pumping-Lemma:

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wir wählen $z = a^n a^n \in L$.
3. Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $v \geq 1$ und $uv^i w$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von z .
4. Dann ist $u = a^d$, $v = a^e$, und $w = a^{n+n-d-e}$ und $e \geq 1$, $d + e \leq n$.
Dann ist ~~$uv^0 w = a^{n-e} a^n \notin L$. Widerspruch.~~ □

Beachte: L ist regulär, z.B. wird L durch den regulären Ausdruck $(aa)^*$ erzeugt.

L erfüllt die Pumping-Eigenschaft

Satz

$L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ erfüllt die Pumping-Eigenschaft.

L erfüllt die Pumping-Eigenschaft

Satz

$L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ erfüllt die Pumping-Eigenschaft.

Beweis

1. Sei $n = 2$.
2. Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$.
3. Wir zerlegen $z = uvw$ mit $u = \varepsilon$, $v = z[1]z[2]$ und w das Suffix von z ohne die ersten beiden Buchstaben.
4. Da $z \in L$, ist $z = a^j a^j$ und dann gilt: $v = aa$, $w = a^{j-1} a^{j-1}$.
Daher gilt auch: $uv^i w = a^j a^j a^{j-1} a^{j-1} = a^{i+j-1} a^{i+j-1} \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$. \square

Aufgabe: Regularität widerlegen

Zeigen Sie mit dem Pumping-Lemma, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind:

- ▶ $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$
- ▶ $L_2 = \{a^n b b c^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$
- ▶ $L_3 = \{a^n \$ a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe: Regularität widerlegen

Satz

$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L_1$ mit $|z| \geq n$.
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L_1$.

Aufgabe: Regularität widerlegen

Satz

$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_1$ mit $|z| \geq n$.
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L_1$.

Aufgabe: Regularität widerlegen

Satz

$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_1$ mit $|z| \geq n$.
Sei $z = a^n b^n$. (Dann gilt $z \in L_1$ und $|z| \geq n$.)
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L_1$.

Aufgabe: Regularität widerlegen

Satz

$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

2. Wähle ein Wort $z \in L_1$ mit $|z| \geq n$.

Sei $z = a^n b^n$. (Dann gilt $z \in L_1$ und $|z| \geq n$.)

3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von z .

4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L_1$.

Aufgabe: Regularität widerlegen

Satz

$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

2. Wähle ein Wort $z \in L_1$ mit $|z| \geq n$.

Sei $z = a^n b^n$. (Dann gilt $z \in L_1$ und $|z| \geq n$.)

3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von z .

4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L_1$.

Da $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$ gilt $v = a^k$ mit $k > 0$ und daher $uv^0 w = a^{n-k} b^n \notin L_1$ (d.h. für $i = 0$ gilt $uv^i w \notin L_1$). Widerspruch.

Aufgabe: Regularität widerlegen

Satz

$L_2 = \{a^n b b c^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$.
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_2$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L_2$.

Aufgabe: Regularität widerlegen

Satz

$L_2 = \{a^n b b c^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$.
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_2$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L_2$.

Aufgabe: Regularität widerlegen

Satz

$L_2 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$.
Sei $z = a^n bbc^{n+1}$. (Dann gilt $z \in L_2$ und $|z| \geq n$.)
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_2$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L_2$.

Aufgabe: Regularität widerlegen

Satz

$L_2 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$.
Sei $z = a^n bbc^{n+1}$. (Dann gilt $z \in L_2$ und $|z| \geq n$.)
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_2$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_2$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von z .
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L_2$.

Aufgabe: Regularität widerlegen

Satz

$L_2 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

2. Wähle ein Wort $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$.

Sei $z = a^n bbc^{n+1}$. (Dann gilt $z \in L_2$ und $|z| \geq n$.)

3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_2$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_2$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von z .

4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L_2$.

Da $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$ gilt $v = a^k$ mit $k > 0$ und daher $uv^3 w = a^{n+2k} bbc^{n+1} \notin L_2$ (d.h. für $i = 3$ gilt $uv^i w \notin L_2$). Widerspruch.

Aufgabe: Regularität widerlegen

Satz

$L_3 = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L_3$ mit $|z| \geq n$.
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_3$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L_3$.

Aufgabe: Regularität widerlegen

Satz

$L_3 = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_3$ mit $|z| \geq n$.
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_3$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L_3$.

Aufgabe: Regularität widerlegen

Satz

$L_3 = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_3$ mit $|z| \geq n$.
Sei $z = a^n a^n$. (Dann gilt $z \in L_3$ und $|z| \geq n$.)
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_3$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L_3$.

Aufgabe: Regularität widerlegen

Satz

$L_3 = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wähle ein Wort $z \in L_3$ mit $|z| \geq n$.
Sei $z = a^n a^n$. (Dann gilt $z \in L_3$ und $|z| \geq n$.)
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_3$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_3$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von z .
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L_3$.

Aufgabe: Regularität widerlegen

Satz

$L_3 = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

2. Wähle ein Wort $z \in L_3$ mit $|z| \geq n$.

Sei $z = a^n a^n$. (Dann gilt $z \in L_3$ und $|z| \geq n$.)

3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_3$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_3$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von z .

4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L_3$.

*Da $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$ gilt $v = a^k$ mit $k > 0$ und daher $uv^0 w = a^{n-k} a^n \notin L_3$.
Widerspruch.*

4. Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen (nur FSK)

Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Definition

Eine Sprache L hat die **Pumping-Eigenschaft** (für kontextfreie Sprachen), wenn gilt:
Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$, welches Mindestlänge n hat (d.h. $|z| \geq n$), als $z = uvwxy$ geschrieben werden kann, sodass gilt:

1. $|vx| \geq 1$
2. $|vwx| \leq n$
3. für alle $i \in \mathbb{N}$: $uv^iwx^iy \in L$.

Lemma (Pumping-Lemma)

Jede kontextfreie Sprache hat die **Pumping-Eigenschaft**.

Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

Aufgabe

Zeige, dass $L_4 = \{a^m ba^m ba^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

Aufgabe

Zeige, dass $L_4 = \{a^m ba^m ba^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

Beweis Mit dem Pumping-Lemma:

Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

Aufgabe

Zeige, dass $L_4 = \{a^m b a^m b a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

Beweis Mit dem Pumping-Lemma:

- ▶ Sei n beliebig.

Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

Aufgabe

Zeige, dass $L_4 = \{a^m ba^m ba^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

Beweis Mit dem Pumping-Lemma:

- ▶ Sei n beliebig.
- ▶ Wir wählen $z = a^n ba^n ba^n$. (Dann gilt $z \in L_4$ und $|z| \geq n$.)

Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

Aufgabe

Zeige, dass $L_4 = \{a^m ba^m ba^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

Beweis Mit dem Pumping-Lemma:

- ▶ Sei n beliebig.
- ▶ Wir wählen $z = a^n ba^n ba^n$. (Dann gilt $z \in L_4$ und $|z| \geq n$.)
- ▶ Sei $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n$, $|vx| \geq 1$ und $uv^i wx^i y \in L_4$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

Aufgabe

Zeige, dass $L_4 = \{a^m ba^m ba^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

Beweis Mit dem Pumping-Lemma:

- ▶ Sei n beliebig.
- ▶ Wir wählen $z = a^n ba^n ba^n$. (Dann gilt $z \in L_4$ und $|z| \geq n$.)
- ▶ Sei $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n$, $|vx| \geq 1$ und $uv^i wx^i y \in L_4$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
- ▶ Dann kann vwx nicht zwei b 's enthalten.

Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

Aufgabe

Zeige, dass $L_4 = \{a^m ba^m ba^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

Beweis Mit dem Pumping-Lemma:

- ▶ Sei n beliebig.
- ▶ Wir wählen $z = a^n ba^n ba^n$. (Dann gilt $z \in L_4$ und $|z| \geq n$.)
- ▶ Sei $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n$, $|vx| \geq 1$ und $uv^i wx^i y \in L_4$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
- ▶ Dann kann vwx nicht zwei b 's enthalten.
- ▶ Fall vx enthält ein b : Dann $uv^0 wx^0 y \notin L_4$ liegen, da das b entfernt wurde. Widerspruch.

Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

Aufgabe

Zeige, dass $L_4 = \{a^m b a^m b a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

Beweis Mit dem Pumping-Lemma:

- ▶ Sei n beliebig.
- ▶ Wir wählen $z = a^n b a^n b a^n$. (Dann gilt $z \in L_4$ und $|z| \geq n$.)
- ▶ Sei $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n$, $|vx| \geq 1$ und $uv^i wx^i y \in L_4$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
- ▶ Dann kann vwx nicht zwei b 's enthalten.
- ▶ Fall vx enthält ein b : Dann $uv^0 wx^0 y \notin L_4$ liegen, da das b entfernt wurde. Widerspruch.
- ▶ Fall vx enthält kein b : Dann $uv^2 wx^2 y \notin L_4$, da maximal zwei a -Folgen aufgepumpt wurden, die dritte a -Folge aber noch aus n vielen a 's besteht (und die Trennung durch b noch vorhanden ist). Widerspruch. □