# Zentralübung 3

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 5. Juni 2024
Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel

# Plan für heute

1. Reguläre Ausdrücke
2. Abschlusseigenschaften von regulären Sprachen
3. Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen
4. Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen (nur FSK)

# 1. Reguläre Ausdrücke

# Übersicht über reguläre Ausdrücke

| Syntax | Semantik |
|---|---|
| $\emptyset$ | $L(\emptyset) = \emptyset$ |
| $\varepsilon$ | $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$ |
| $a$ (mit $a \in \Sigma$) | $L(a) = \{a\}$ |
| $\alpha_1\alpha_2$ | $L(\alpha_1\alpha_2) = L(\alpha_1)L(\alpha_2)$ |
| $(\alpha_1 \mid \alpha_2)$ | $L(\alpha_1) \cup L(\alpha_2)$ |
| $(\alpha)^*$ | $L(\alpha)^*$ |

wobei $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ reguläre Ausdrücke sind.

# Übersicht über reguläre Ausdrücke

| Syntax | Semantik |
| --- | --- |
| $\emptyset$ | $L(\emptyset) = \emptyset$ |
| $\varepsilon$ | $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$ |
| $a$ (mit $a \in \Sigma$) | $L(a) = \{a\}$ |
| $\alpha_1\alpha_2$ | $L(\alpha_1\alpha_2) = L(\alpha_1)L(\alpha_2)$ |
| $(\alpha_1 \mid \alpha_2)$ | $L(\alpha_1) \cup L(\alpha_2)$ |
| $(\alpha)^*$ | $L(\alpha)^*$ |

wobei $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ reguläre Ausdrücke sind.

Beachte:

- Es gibt verschiedene Notationen.
  Manchmal wird $(\alpha_1 + \alpha_2)$ oder $(\alpha_1 \cup \alpha_2)$ geschrieben statt $(\alpha_1 \mid \alpha_2)$.
- Ein Konstrukt ist eigentlich überflüssig.

# 1. Quiz

Welches Konstrukt ist eigentlich überflüssig für die regulären Ausdrücke, da es mit den anderen Konstrukten dargestellt werden kann?

a) $\emptyset$

b) $\varepsilon$

c) $(\alpha)^*$

d) $\alpha_1\alpha_2$

e) $(\alpha_1|\alpha_2)$

# 1. Quiz

Welches Konstrukt ist eigentlich überflüssig für die regulären Ausdrücke, da es mit den anderen Konstrukten dargestellt werden kann?

a) $\emptyset$
b) $\varepsilon$
c) $(\alpha)^*$
d) $\alpha_1\alpha_2$
e) $(\alpha_1|\alpha_2)$

Antwort: b), da $\varepsilon$ durch $(\emptyset)^*$ dargestellt werden kann:
$L((\emptyset)^*) = \emptyset^* = \emptyset^0 \cup \emptyset^1 \cup \cdots = \{\varepsilon\} \cup \emptyset \cup \cdots = \{\varepsilon\}$.

# 2. Quiz

Welcher reguläre Ausdruck erzeugt die Sprache $\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| = 4\}$?

a) $(ab)^*(ab)^*(ab)^*(ab)^*$

b) $(a|b)(a|b)(a|b)(a|b)$

c) $(aaaa|bbbb)$

d) $(ab|ab|ab|ab)$

e) $(aa|ab|ba|bb)(aa|ab|ba|bb)$

# 2. Quiz

Welcher reguläre Ausdruck erzeugt die Sprache $\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| = 4\}$?

a) $(ab)^*(ab)^*(ab)^*(ab)^*$

b) $(a|b)(a|b)(a|b)(a|b)$

c) $(aaaa|bbbb)$

d) $(ab|ab|ab|ab)$

e) $(aa|ab|ba|bb)(aa|ab|ba|bb)$

Antwort: b) und e) sind beide richtig.

# Aufgabe: Regulären Ausdruck angeben

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der

$$\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| \leq 4\}$$

erzeugt.

# Aufgabe: Regulären Ausdruck angeben

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der

$$\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| \leq 4\}$$

erzeugt.

Antwort: $(\varepsilon|a|b)(\varepsilon|a|b)(\varepsilon|a|b)(\varepsilon|a|b)$ oder
$(\varepsilon \mid (a|b) \mid (a|b)(a|b) \mid (a|b)(a|b)(a|b) \mid (a|b)(a|b)(a|b)(a|b))$.

# Aufgabe: Regulären Ausdruck angeben

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der

$$\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| \geq 4\}$$

erzeugt.

# Aufgabe: Regulären Ausdruck angeben

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der

$$\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| \geq 4\}$$

erzeugt.

Antwort: $(a|b)(a|b)(a|b)(a|b)(a|b)^*$.

# Komplement von regulären Ausdrücken

Es gibt keinen „Komplementoperator“ für reguläre Ausdrücke.

# Komplement von regulären Ausdrücken

Es gibt keinen „Komplementoperator“ für reguläre Ausdrücke.

- Schwere Methode:
  Regulärer Ausdruck
  $\rightarrow$ NFA
  $\rightarrow$ DFA
  $\rightarrow$ DFA für das Komplement
  $\rightarrow$ regulärer Ausdruck

# Komplement von regulären Ausdrücken

Es gibt keinen „Komplementoperator“ für reguläre Ausdrücke.

- Schwere Methode:
  Regulärer Ausdruck
  → NFA
  → DFA
  → DFA für das Komplement
  → regulärer Ausdruck
- Einfachere Methode:
  Regulärer Ausdruck
  → einfache Beschreibung der erzeugten Sprache
  → einfache Beschreibung des Komplements
  → regulärer Ausdruck

# Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

Finde regulären Ausdruck für das Komplement, der von $0^*10^*$ erzeugten Sprache.

# Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

Finde regulären Ausdruck für das Komplement, der von $0^*10^*$ erzeugten Sprache.

Antwort:

Schritte:

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von $0^*10^*$ erzeugten Sprache?
2. Was ist eine einfache Beschreibung des Komplements davon?
3. Was ist ein regulärer Ausdruck dazu?

# Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von $0^*10^*$ erzeugten Sprache?

# Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von $0^*10^*$ erzeugten Sprache?
   $L(0^*10^*) =$ Wörter über $\{0,1\}$, die genau eine 1 enthalten.

# Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von $0^*10^*$ erzeugten Sprache?
   $L(0^*10^*) =$ Wörter über $\{0,1\}$, die genau eine 1 enthalten.
2. Was ist eine einfache Beschreibung des Komplements davon?

# Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von $0^*10^*$ erzeugten Sprache?

   $L(0^*10^*) =$ Wörter über $\{0,1\}$, die genau eine 1 enthalten.

2. Was ist eine einfache Beschreibung des Komplements davon?

   $$\begin{aligned}\overline{L(0^*10^*)} &= \text{Wörter über } \{0,1\}\text{, die keine oder mindestens 2 1en enthalten} \\ &= \text{Wörter, die keine 1en enthalten} \\ &\quad \cup \text{ Wörter, die mindestens 2 1en enthalten}\end{aligned}$$

# Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von $0^*10^*$ erzeugten Sprache?

   $L(0^*10^*) =$ Wörter über $\{0,1\}$, die genau eine 1 enthalten.

2. Was ist eine einfache Beschreibung des Komplements davon?

   $$\begin{aligned}\overline{L(0^*10^*)} &= \text{Wörter über } \{0,1\}, \text{ die keine oder mindestens 2 1en enthalten}\\ &= \text{Wörter, die keine 1en enthalten}\\ &\quad \cup \text{ Wörter, die mindestens 2 1en enthalten}\end{aligned}$$

3. Was ist ein regulärer Ausdruck dazu?
   - Regulärer Ausdruck, der alle Wörter über $\{0,1\}$ erzeugt, die keine 1en enthalten:

# Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von $0^*10^*$ erzeugten Sprache?

   $L(0^*10^*)$ = Wörter über $\{0,1\}$, die genau eine 1 enthalten.

2. Was ist eine einfache Beschreibung des Komplements davon?

   $$\begin{aligned}\overline{L(0^*10^*)} &= \text{Wörter über } \{0,1\}\text{, die keine oder mindestens 2 1en enthalten}\\ &= \text{Wörter, die keine 1en enthalten}\\ &\quad \cup \text{ Wörter, die mindestens 2 1en enthalten}\end{aligned}$$

3. Was ist ein regulärer Ausdruck dazu?
   - Regulärer Ausdruck, der alle Wörter über $\{0,1\}$ erzeugt, die keine 1en enthalten: $0^*$
   - Regulärer Ausdruck, der alle Wörter über $\{0,1\}$ erzeugt, die mindesten 2 1en enthalten:

# Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von $0^*10^*$ erzeugten Sprache?

   $L(0^*10^*) =$ Wörter über $\{0,1\}$, die genau eine 1 enthalten.

2. Was ist eine einfache Beschreibung des Komplements davon?

   $$\begin{aligned}\overline{L(0^*10^*)} &= \text{Wörter über } \{0,1\}\text{, die keine oder mindestens 2 1en enthalten}\\ &= \text{Wörter, die keine 1en enthalten}\\ &\quad \cup \text{ Wörter, die mindestens 2 1en enthalten}\end{aligned}$$

3. Was ist ein regulärer Ausdruck dazu?
   - Regulärer Ausdruck, der alle Wörter über $\{0,1\}$ erzeugt, die keine 1en enthalten:
     $0^*$
   - Regulärer Ausdruck, der alle Wörter über $\{0,1\}$ erzeugt, die mindesten 2 1en enthalten:
     $(0|1)^*1(0|1)^*1(0|1)^*$
   - Zusammen:

# Aufgabe: Komplement von regulären Ausdrücken angeben

1. Was ist eine einfache Beschreibung der von $0^*10^*$ erzeugten Sprache?

   $L(0^*10^*) =$ Wörter über $\{0,1\}$, die genau eine 1 enthalten.

2. Was ist eine einfache Beschreibung des Komplements davon?

   $$\begin{aligned}\overline{L(0^*10^*)} &= \text{Wörter über } \{0,1\}\text{, die keine oder mindestens 2 1en enthalten}\\ &= \text{Wörter, die keine 1en enthalten}\\ &\quad \cup \text{ Wörter, die mindestens 2 1en enthalten}\end{aligned}$$

3. Was ist ein regulärer Ausdruck dazu?
   - Regulärer Ausdruck, der alle Wörter über $\{0,1\}$ erzeugt, die keine 1en enthalten:
     $0^*$
   - Regulärer Ausdruck, der alle Wörter über $\{0,1\}$ erzeugt, die mindesten 2 1en enthalten:
     $(0|1)^*1(0|1)^*1(0|1)^*$
   - Zusammen:
     $(0^*|(0|1)^*1(0|1)^*1(0|1)^*)$

# Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit $\varepsilon$-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

# Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit $\varepsilon$-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:

# Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit $\varepsilon$-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:

→

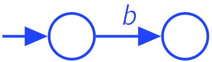
# Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit $\varepsilon$-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:



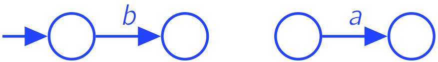
# Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit $\varepsilon$-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:



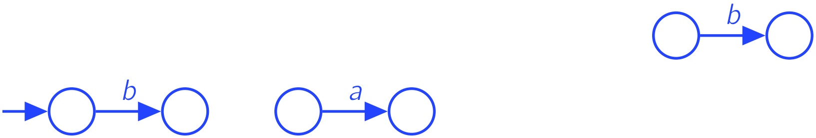
# Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit $\varepsilon$-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:



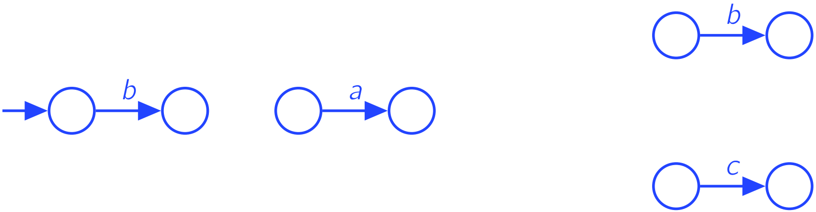
# Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit $\varepsilon$-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:



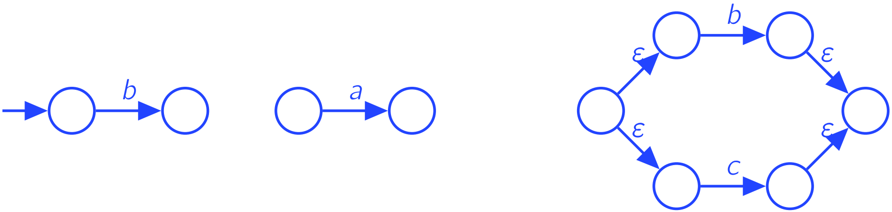
# Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit $\varepsilon$-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:



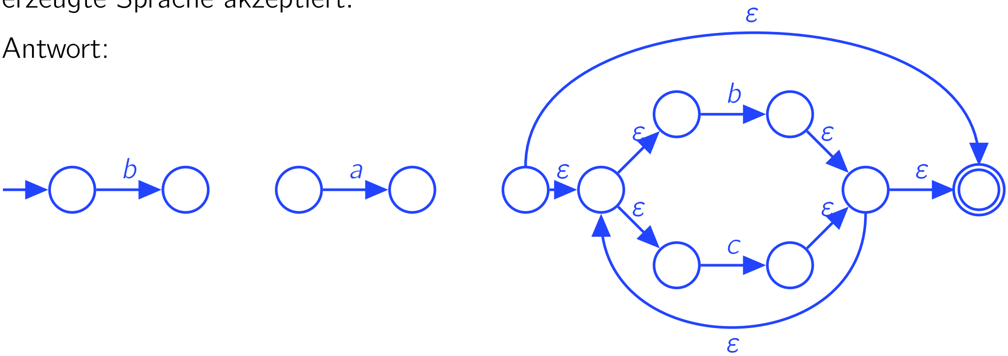
# Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit $\varepsilon$-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:



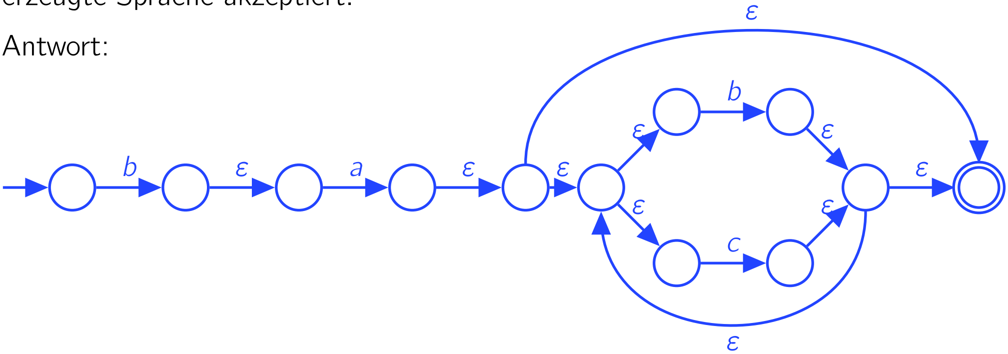
# Aufgabe: NFA konstruieren

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA mit $\varepsilon$-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, der als Sprache genau die durch den regulären Ausdruck

$$ba(b|c)^*$$

erzeugte Sprache akzeptiert.

Antwort:



# 2. Abschlusseigenschaften von regulären Sprachen

# Abschlusseigenschaften von regulären Sprachen

**Satz**

Seien $L_1, L_2$ regulär. Dann sind $L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2, L_1^*, \overline{L_1}, L_1 L_2$ auch regulär.

Aus dem Aufgabenblatt 3 für FSK:

- Wenn $L$ regulär ist, dann ist auch $\{\overline{w} \mid w \in L\}$ regulär.

# Quiz

Abschlusseigenschaft für Schnitt:

$$L_1 \text{ regulär und } L_2 \text{ regulär} \Longrightarrow L_1 \cap L_2 \text{ regulär}$$

Welche Folgerungen sind korrekt?

a) Wenn $L_1 \cap L_2$ nicht regulär ist, dann ist weder $L_1$ noch $L_2$ regulär.
b) Wenn $L_1 \cap L_2$ regulär ist, dann sind $L_1$ und $L_2$ regulär.
c) Wenn $L_1 \cap L_2$ nicht regulär ist und $L_1$ regulär ist, dann ist $L_2$ nicht regulär.
d) Wenn $L_1$ und $L_2$ jeweils nicht regulär sind, dann ist $L_1 \cap L_2$ ebenfalls nicht regulär.

# Quiz

Abschlusseigenschaft für Schnitt:

$$L_1 \text{ regulär und } L_2 \text{ regulär} \Longrightarrow L_1 \cap L_2 \text{ regulär}$$

Welche Folgerungen sind korrekt?

a) Wenn $L_1 \cap L_2$ nicht regulär ist, dann ist weder $L_1$ noch $L_2$ regulär.
b) Wenn $L_1 \cap L_2$ regulär ist, dann sind $L_1$ und $L_2$ regulär.
c) Wenn $L_1 \cap L_2$ nicht regulär ist und $L_1$ regulär ist, dann ist $L_2$ nicht regulär.
d) Wenn $L_1$ und $L_2$ jeweils nicht regulär sind, dann ist $L_1 \cap L_2$ ebenfalls nicht regulär.

Antwort: c).

# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

Anleitung zum Widerlegen der Regularität von $L$ mit Abschlusseigenschaften:

1. Nehme an, dass $L$ regulär ist.
2. Operiere auf $L$ unter Erhaltung der Regularität:
   vereinige, schneide, komplementiere, multipliziere $L$ mit bekannt regulärer Sprache, bilde Kleeneschen Abschluss, drehe Sprache um.
3. Kommt dabei eine bekannt nicht reguläre Sprache heraus,
   dann hat man einen Widerspruch und die Annahme war falsch.
   Daher ist $L$ dann nicht regulär.

# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

**Satz**

$S = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

**Satz**

$S = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

**Beweis** Durch Widerspruch. Nehme an, $S$ ist regulär.

Da $L_1 = L(a^* b^*)$ regulär ist, muss (aufgrund der Abschlusseigenschaft für reguläre Sprachen) auch $L_1 \cap S$ regulär sein.

Aber $L_1 \cap S = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär. Widerspruch. $\square$

# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

**Satz**

$T = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$ ist nicht regulär.

# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

**Satz**

$T = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$ ist nicht regulär.

**Beweis** Durch Widerspruch. Nehme an, $T$ ist regulär.

Dann ist aufgrund der Abschlusseigenschaft für das Komplement auch $\overline{T}$ regulär.

Da $L(a^* b^*)$ regulär ist, gilt mit der Abschlusseigenschaft für den Schnitt auch, dass $\overline{T} \cap L(a^* b^*)$ regulär ist.

Aber $\overline{T} \cap L(a^* b^*) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär. Widerspruch. $\square$

# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

Aufpassen, dass man die Eigenschaften nicht falsch anwendet:
Die folgenden Beweise sind alle falsch:

# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

Aufpassen, dass man die Eigenschaften nicht falsch anwendet:
Die folgenden Beweise sind alle falsch:

- $L_x = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär, reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Produktbildung, also ist $L_a L_b = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ regulär.

# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

Aufpassen, dass man die Eigenschaften nicht falsch anwendet:
Die folgenden Beweise sind alle falsch:

- $L_x = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär, reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Produktbildung, also ist $L_a L_b = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ regulär.
- $L_< = \{a^n b^m \mid n < m\}$ ist nicht regulär, $L_\geq = \{a^n b^m \mid n \geq m\}$ ist nicht regulär, also ist $L_< \cup L_\geq = \{a^n b^m \mid n < m \text{ oder } n \geq m\}$ nicht regulär.

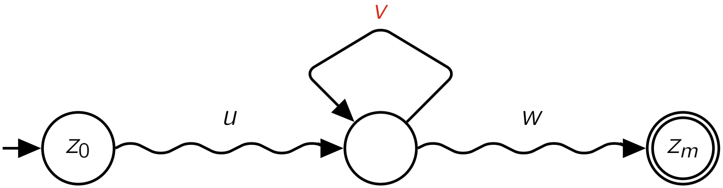
# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

Aufpassen, dass man die Eigenschaften nicht falsch anwendet:
Die folgenden Beweise sind alle falsch:

- $L_x = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär, reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Produktbildung, also ist $L_a L_b = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ regulär.
- $L_< = \{a^n b^m \mid n < m\}$ ist nicht regulär, $L_\geq = \{a^n b^m \mid n \geq m\}$ ist nicht regulär, also ist $L_< \cup L_\geq = \{a^n b^m \mid n < m \text{ oder } n \geq m\}$ nicht regulär.
- $L_1 = \{\varepsilon, c\}$ ist regulär, $L_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär, also ist $L = \{c^i a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}, i \in \{0, 1\}\}$ nicht regulär.

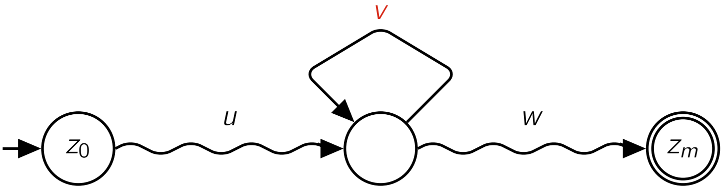
# 3. Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

# Intuition hinter dem Pumping-Lemma




- Wenn ein DFA $n$ Zustände hat, dann müssen akzeptierte Wörter der Länge $\geq n$ eine Schleife durchlaufen.
- Diese Wörter kann man aufpumpen: $uvw$, $uvvw$, $uvvvw$, ....
  Man kann auch die Schleife überspringen: $uw$.
  Allgemein: $uv^iw$ für $i \in \mathbb{N}$ liegt in der erkannten Sprache.

# Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen




**Definition**

Eine Sprache $L$ hat die Pumping-Eigenschaft (für reguläre Sprachen), wenn gilt:
Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$, welches Mindestlänge $n$ hat (d.h. $|z| \geq n$), als $z = uvw$ geschrieben werden kann, sodass gilt:

1. $|uv| \leq n$
2. $|v| \geq 1$
3. für alle $i \in \mathbb{N}$: $uv^iw \in L$.

**Lemma (Pumping-Lemma)**

Jede reguläre Sprache hat die Pumping-Eigenschaft.

# Quiz

Welche der folgenden Aussagen sind korrekte Formulierungen des Pumping-Lemmas?

a) Sei $L$ eine reguläre Sprache. Dann gilt für jede natürliche Zahl $n \geq 1$: Es gibt ein Wort $z$ aus $L$, welches Mindestlänge $n$ hat, sodass es für jede Zerlegung $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ ein $i \geq 0$ gibt mit $uv^iw$ liegt nicht in $L$.

b) Sei $L$ eine Sprache. Dann ist $L$ regulär g.d.w. es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt, sodass jedes Wort $z$ aus $L$, welches Mindestlänge $n$ hat, als $z = uvw$ geschrieben werden kann, mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, und $uv^iw$ in $L$ liegt für alle $i \geq 0$.

c) Sei $L$ eine Sprache. Dann ist $L$ keinesfalls regulär, falls für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: Es gibt ein Wort $z$ aus $L$, welches Mindestlänge $n$ hat, sodass es für jede Zerlegung $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ ein $i \geq 0$ gibt mit $uv^iw$ liegt nicht in $L$.

d) Sei $L$ eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n \geq 1$, sodass jedes Wort $z$ aus $L$, welches Mindestlänge $n$ hat, als $z = uvw$ geschrieben werden kann, mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, und $uv^iw$ liegt in L für alle $i \geq 0$.

e) Sei $L$ eine Sprache und es gibt eine natürliche Zahl $n \geq 1$, sodass jedes Wort $z$ aus $L$, welches Mindestlänge $n$ hat, als $z = uvw$ geschrieben werden kann, mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, und $uv^iw$ liegt in $L$ für alle $i \geq 0$. Dann ist $L$ regulär.

# Quiz

Welche der folgenden Aussagen sind korrekte Formulierungen des Pumping-Lemmas?

a) Sei $L$ eine reguläre Sprache. Dann gilt für jede natürliche Zahl $n \geq 1$: Es gibt ein Wort $z$ aus $L$, welches Mindestlänge $n$ hat, sodass es für jede Zerlegung $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ ein $i \geq 0$ gibt mit $uv^iw$ liegt nicht in $L$.

b) Sei $L$ eine Sprache. Dann ist $L$ regulär g.d.w. es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt, sodass jedes Wort $z$ aus $L$, welches Mindestlänge $n$ hat, als $z = uvw$ geschrieben werden kann, mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, und $uv^iw$ in $L$ liegt für alle $i \geq 0$.

c) Sei $L$ eine Sprache. Dann ist $L$ keinesfalls regulär, falls für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt: Es gibt ein Wort $z$ aus $L$, welches Mindestlänge $n$ hat, sodass es für jede Zerlegung $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ ein $i \geq 0$ gibt mit $uv^iw$ liegt nicht in $L$.

d) Sei $L$ eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n \geq 1$, sodass jedes Wort $z$ aus $L$, welches Mindestlänge $n$ hat, als $z = uvw$ geschrieben werden kann, mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, und $uv^iw$ liegt in L für alle $i \geq 0$.

e) Sei $L$ eine Sprache und es gibt eine natürliche Zahl $n \geq 1$, sodass jedes Wort $z$ aus $L$, welches Mindestlänge $n$ hat, als $z = uvw$ geschrieben werden kann, mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$, und $uv^iw$ liegt in $L$ für alle $i \geq 0$. Dann ist $L$ regulär.

Antwort: c) und d).

# Anwendung des Pumping-Lemmas

Sei $L$ eine Sprache, die wir als nicht regulär beweisen wollen.

# Anwendung des Pumping-Lemmas

Sei $L$ eine Sprache, die wir als nicht regulär beweisen wollen.

Pumping-Lemma:

$$L \text{ ist regulär} \Longrightarrow L \text{ hat die Pumping-Eigenschaft}$$

# Anwendung des Pumping-Lemmas

Sei $L$ eine Sprache, die wir als nicht regulär beweisen wollen.

Pumping-Lemma:

$$L \text{ ist regulär} \implies L \text{ hat die Pumping-Eigenschaft}$$

Kontraposition:

$$L \text{ hat nicht die Pumping-Eigenschaft} \implies L \text{ ist nicht regulär}$$

# Anwendung des Pumping-Lemmas

Sei $L$ eine Sprache, die wir als nicht regulär beweisen wollen.

Pumping-Lemma:

$$L \text{ ist regulär} \implies L \text{ hat die Pumping-Eigenschaft}$$

Kontraposition:

$$L \text{ hat nicht die Pumping-Eigenschaft} \implies L \text{ ist nicht regulär}$$

Beweisstrategie für die Aussage „$L$ ist nicht regulär“:

1. Durch die Kontraposition reicht es zu zeigen, dass $L$ die Pumping-Eigenschaft nicht hat.
2. Zeige dies durch Widerspruch: Nehme an, dass $L$ die Pumping-Eigenschaft hat.
3. Leite einen Widerspruch her.
4. D.h. $L$ ist nicht regulär.

# Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L$ (wir suchen aus).

# Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   *Sei $n = 100$ vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

# Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   *Sei $n = 100$ vom Gegner gewählt.*
   Nein: Wir müssen für alle Wahlmöglichkeiten des Gegners argumentieren.
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

# Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner").
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner").
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

# Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner").
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   *Wir wählen $z = a^2 b^2 \in L$.*
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner").
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

# Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   *Wir wählen $z = a^2 b^2 \in L$.*
   Nein: $|z| \geq n$ gilt nicht.
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

# Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L$ (wir suchen aus).

# Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner").
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   *Wir wählen $z = a^n$.*
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner").

4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L$ (wir suchen aus).

# Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner").
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   *Wir wählen $z = a^n$.*
   Nein: $z \in L$ gilt nicht.
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner").
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L$ (wir suchen aus).

# Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

# Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   *Wir wählen $z = a^n b^n \in L$.*
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

# Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   *Wir wählen $z = a^n b^n \in L$.*
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
   *Der Gegner zerlegt $z$ in $z = uvw$ mit $u = a^{n-1}$, $v = a$ und $w = b^n$ (damit ist $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ erfüllt).*
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

# Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   *Wir wählen $z = a^n b^n \in L$.*
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
   *Der Gegner zerlegt $z$ in $z = uvw$ mit $u = a^{n-1}$, $v = a$ und $w = b^n$ (damit ist $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ erfüllt).*
   Nein: Wir müssen für alle Wahlmöglichkeiten des Gegners argumentieren.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

# Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   *Wir wählen $z = a^n b^n \in L$.*
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

# Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   *Wir wählen $z = a^n b^n \in L$.*
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
   *Sei $z$ zerlegt in $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$.*
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).

# Beispiel mit vielen Fehlern

Zeigen Sie: $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt („vom Gegner“).
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.*
2. Wähle ein Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ (wir suchen aus).
   *Wir wählen $z = a^n b^n \in L$.*
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ („vom Gegner“).
   *Sei $z$ zerlegt in $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$.*
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L$ (wir suchen aus).
   *Dann ist $u = a^d$, $v = a^e$ und $w = a^{n-d-e} b^n$ mit $k > 0$ und damit für $i = 0$:*
   *$uv^i w = a^{n-e} b^n \notin L$. Widerspruch.*

# Finde den Fehler

Sei $L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

**Behauptung**

$L$ ist nicht regulär.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma:

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wir wählen $z = a^n a^n \in L$.
3. Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $v \geq 1$ und $uv^i w$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von $z$.
4. Dann ist $u = a^d$, $v = a^e$, und $w = a^{n+n-d-e}$ und $e \geq 1$, $d + e \leq n$.
   Dann ist $uv^0 w = a^{n-e} a^n \notin L$. Widerspruch. $\square$

# Finde den Fehler

Sei $L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

**Behauptung**

$L$ ist nicht regulär.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma:

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wir wählen $z = a^n a^n \in L$.
3. Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $v \geq 1$ und $uv^i w$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von $z$.
4. Dann ist $u = a^d$, $v = a^e$, und $w = a^{n+n-d-e}$ und $e \geq 1$, $d + e \leq n$.
   Dann ist $uv^0 w = a^{n-e} a^n \notin L$. Widerspruch. $\square$

# Finde den Fehler

Sei $L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

**Behauptung**

$L$ ist nicht regulär.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma:

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wir wählen $z = a^n a^n \in L$.
3. Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $v \geq 1$ und $uv^i w$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von $z$.
4. Dann ist $u = a^d$, $v = a^e$, und $w = a^{n+n-d-e}$ und $e \geq 1$, $d + e \leq n$.
   Dann ist $\cancel{uv^0 w = a^{n-e} a^n \notin L}$. ~~Widerspruch.~~ $\square$

# Finde den Fehler

Sei $L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

**Behauptung**

$L$ ist nicht regulär.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma:

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.
2. Wir wählen $z = a^n a^n \in L$.
3. Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $v \geq 1$ und $uv^i w$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von $z$.
4. Dann ist $u = a^d$, $v = a^e$, und $w = a^{n+n-d-e}$ und $e \geq 1$, $d + e \leq n$.
   Dann ist $\cancel{uv^0 w = a^{n-e} a^n \notin L}$. ~~Widerspruch.~~ □

Beachte: $L$ ist regulär, z.B. wird $L$ durch den regulären Ausdruck $(aa)^*$ erzeugt.

# $L$ erfüllt die Pumping-Eigenschaft

**Satz**

$L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ erfüllt die Pumping-Eigenschaft.

# $L$ erfüllt die Pumping-Eigenschaft

**Satz**

$L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ erfüllt die Pumping-Eigenschaft.

**Beweis**

1. Sei $n = 2$.
2. Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$.
3. Wir zerlegen $z = uvw$ mit $u = \varepsilon$, $v = z[1]z[2]$ und $w$ das Suffix von $z$ ohne die ersten beiden Buchstaben.
4. Da $z \in L$, ist $z = a^j a^j$ und dann gilt: $v = aa$, $w = a^{j-1}a^{j-1}$.
   Daher gilt auch: $uv^i w = a^i a^i a^{j-1} a^{j-1} = a^{i+j-1} a^{i+j-1} \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$. $\square$

# Aufgabe: Regularität widerlegen

Zeigen Sie mit dem Pumping-Lemma, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind:

- $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$
- $L_2 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$
- $L_3 = \{a^n\$a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

# Aufgabe: Regularität widerlegen

**Satz**

$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L_1$ mit $|z| \geq n$.
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_1$.

# Aufgabe: Regularität widerlegen

**Satz**

$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.*
2. Wähle ein Wort $z \in L_1$ mit $|z| \geq n$.
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_1$.

# Aufgabe: Regularität widerlegen

**Satz**

$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.*
2. Wähle ein Wort $z \in L_1$ mit $|z| \geq n$.
   *Sei $z = a^n b^n$. (Dann gilt $z \in L_1$ und $|z| \geq n$.)*
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_1$.

# Aufgabe: Regularität widerlegen

**Satz**

$L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.*
2. Wähle ein Wort $z \in L_1$ mit $|z| \geq n$.
   *Sei $z = a^n b^n$. (Dann gilt $z \in L_1$ und $|z| \geq n$.)*
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
   *Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von $z$.*
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L_1$.

# Aufgabe: Regularität widerlegen

**Satz**

$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.*
2. Wähle ein Wort $z \in L_1$ mit $|z| \geq n$.
   *Sei $z = a^n b^n$. (Dann gilt $z \in L_1$ und $|z| \geq n$.)*
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
   *Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von $z$.*
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L_1$.
   *Da $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$ gilt $v = a^k$ mit $k > 0$ und daher $uv^0 w = a^{n-k} b^n \notin L_1$ (d.h. für $i = 0$ gilt $uv^i w \notin L_1$). Widerspruch.*

# Aufgabe: Regularität widerlegen

**Satz**

$L_2 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.

2. Wähle ein Wort $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$.

3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_2$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L_2$.

# Aufgabe: Regularität widerlegen

**Satz**

$L_2 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.*
2. Wähle ein Wort $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$.
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L_2$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_2$.

# Aufgabe: Regularität widerlegen

**Satz**

$L_2 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.*
2. Wähle ein Wort $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$.
   *Sei $z = a^n bbc^{n+1}$. (Dann gilt $z \in L_2$ und $|z| \geq n$.)*
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L_2$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_2$.

# Aufgabe: Regularität widerlegen

**Satz**

$L_2 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.*
2. Wähle ein Wort $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$.
   *Sei $z = a^n bbc^{n+1}$. (Dann gilt $z \in L_2$ und $|z| \geq n$.)*
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_2$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
   *Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_2$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von $z$.*
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L_2$.

# Aufgabe: Regularität widerlegen

**Satz**

$L_2 = \{a^n bbc^m \mid n, m \in \mathbb{N}, m > n\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.*
2. Wähle ein Wort $z \in L_2$ mit $|z| \geq n$.
   *Sei $z = a^n bbc^{n+1}$. (Dann gilt $z \in L_2$ und $|z| \geq n$.)*
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_2$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
   *Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L_2$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von $z$.*
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^i w \notin L_2$.
   *Da $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$ gilt $v = a^k$ mit $k > 0$ und daher $uv^3 w = a^{n+2k} bbc^{n+1} \notin L_2$ (d.h. für $i = 3$ gilt $uv^i w \notin L_2$). Widerspruch.*

# Aufgabe: Regularität widerlegen

**Satz**

$L_3 = \{a^n\$a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
2. Wähle ein Wort $z \in L_3$ mit $|z| \geq n$.
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L_3$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_3$.

# Aufgabe: Regularität widerlegen

**Satz**

$L_3 = \{a^n\$a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.*
2. Wähle ein Wort $z \in L_3$ mit $|z| \geq n$.
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L_3$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_3$.

# Aufgabe: Regularität widerlegen

**Satz**

$L_3 = \{a^n\$a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.*
2. Wähle ein Wort $z \in L_3$ mit $|z| \geq n$.
   *Sei $z = a^n\$a^n$. (Dann gilt $z \in L_3$ und $|z| \geq n$.)*
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L_3$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_3$.

# Aufgabe: Regularität widerlegen

**Satz**

$L_3 = \{a^n\$a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.*
2. Wähle ein Wort $z \in L_3$ mit $|z| \geq n$.
   *Sei $z = a^n\$a^n$. (Dann gilt $z \in L_3$ und $|z| \geq n$.)*
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L_3$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
   *Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L_3$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von $z$.*
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_3$.

# Aufgabe: Regularität widerlegen

**Satz**

$L_3 = \{a^n\$a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweisschritte:

1. Die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei beliebig gewählt.
   *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.*
2. Wähle ein Wort $z \in L_3$ mit $|z| \geq n$.
   *Sei $z = a^n\$a^n$. (Dann gilt $z \in L_3$ und $|z| \geq n$.)*
3. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L_3$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
   *Sei $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L_3$ für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung von $z$.*
4. Für jede solche Zerlegung gib ein $i \in \mathbb{N}$ an mit $uv^iw \notin L_3$.
   *Da $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$ gilt $v = a^k$ mit $k > 0$ und daher $uv^0w = a^{n-k}\$a^n \notin L_3$. Widerspruch.*

# 4. Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen (nur FSK)

# Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

**Definition**

Eine Sprache $L$ hat die Pumping-Eigenschaft (für kontextfreie Sprachen), wenn gilt: Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$, welches Mindestlänge $n$ hat (d.h. $|z| \geq n$), als $z = uvwxy$ geschrieben werden kann, sodass gilt:

1. $|vx| \geq 1$
2. $|vwx| \leq n$
3. für alle $i \in \mathbb{N}$: $uv^iwx^iy \in L$.

**Lemma (Pumping-Lemma)**

Jede kontextfreie Sprache hat die Pumping-Eigenschaft.

# Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

**Aufgabe**

Zeige, dass $L_4 = \{a^m b a^m b a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

# Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

**Aufgabe**

Zeige, dass $L_4 = \{a^m b a^m b a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma:

# Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

**Aufgabe**

Zeige, dass $L_4 = \{a^m b a^m b a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma:

- Sei $n$ beliebig.

# Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

**Aufgabe**

Zeige, dass $L_4 = \{a^m b a^m b a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma:

- Sei $n$ beliebig.
- Wir wählen $z = a^n b a^n b a^n$. (Dann gilt $z \in L_4$ und $|z| \geq n$.)

# Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

**Aufgabe**

Zeige, dass $L_4 = \{a^m b a^m b a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma:

- Sei $n$ beliebig.
- Wir wählen $z = a^n b a^n b a^n$. (Dann gilt $z \in L_4$ und $|z| \geq n$.)
- Sei $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n$, $|vx| \geq 1$ und $uv^iwx^iy \in L_4$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

# Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

**Aufgabe**

Zeige, dass $L_4 = \{a^m b a^m b a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma:

- Sei $n$ beliebig.
- Wir wählen $z = a^n b a^n b a^n$. (Dann gilt $z \in L_4$ und $|z| \geq n$.)
- Sei $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n$, $|vx| \geq 1$ und $uv^i wx^i y \in L_4$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
- Dann kann $vwx$ nicht zwei $b's$ enthalten.

# Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

**Aufgabe**

Zeige, dass $L_4 = \{a^m b a^m b a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma:

- Sei $n$ beliebig.
- Wir wählen $z = a^n b a^n b a^n$. (Dann gilt $z \in L_4$ und $|z| \geq n$.)
- Sei $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n$, $|vx| \geq 1$ und $uv^i wx^i y \in L_4$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
- Dann kann $vwx$ nicht zwei $b's$ enthalten.
- Fall $vx$ enthält ein $b$: Dann $uv^0 wx^0 y \notin L_4$, da das $b$ entfernt wurde. Widerspruch.

# Aufgabe: Kontextfreiheit widerlegen

**Aufgabe**

Zeige, dass $L_4 = \{a^m b a^m b a^m \mid m \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma:

- Sei $n$ beliebig.
- Wir wählen $z = a^n b a^n b a^n$. (Dann gilt $z \in L_4$ und $|z| \geq n$.)
- Sei $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n$, $|vx| \geq 1$ und $uv^i wx^i y \in L_4$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
- Dann kann $vwx$ nicht zwei $b's$ enthalten.
- Fall $vx$ enthält ein $b$: Dann $uv^0 wx^0 y \notin L_4$, da das $b$ entfernt wurde. Widerspruch.
- Fall $vx$ enthält kein $b$: Dann $uv^2 wx^2 y \notin L_4$, da maximal zwei $a$-Folgen aufgepumpt wurden, die dritte $a$-Folge aber noch aus $n$ vielen $a$'s besteht (und die Trennung durch $b$ noch vorhanden ist). Widerspruch. □