LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Formale Sprachen und Komplexität
Theoretische Informatik für Studierende der Medieninformatik
Sommersemester 2024

13c
Wiederholung und Fragestunde

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 16. Juli 2024
Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel

Inhaltsübersicht Teil I: Formale Sprachen und Automatentheorie

- Chomsky-Grammatiken und die Chomsky-Hierarchie
- Reguläre Sprachen: DFAs, Minimierung von DFAs, NFAs (ohne und mit ϵ-Übergängen), reguläre Ausdrücke, Abschlusseigenschaften, Entscheidbarkeitsresultate, Pumping-Lemma, Satz von Myhill und Nerode
- Kontextfreie Sprachen: Chomsky-Normalform, Pumping-Lemma, Greibach-Normalform, Abschlusseigenschaften, CYK-Algorithmus, Kellerautomaten (PDAs und DPDAs), Entscheidbarkeitsresultate
- Kontextsensitive und Typ 0-Sprachen: Turingmaschinen (DTMs und NTMs), LBAs, Entscheiden des Wortproblems für Typ 1-Sprachen

Blau: Nur FSK

Inhaltsübersicht Teil II: Berechenbarkeitstheorie

- Berechenbarkeit
- Turingmaschinen und Turingberechenbarkeit
- LOOP-, WHILE-, GOTO-Programme und -Berechenbarkeit
- Primitiv rekursive und μ-rekursive Funktionen
- Unentscheidbarkeit: Halteproblem
- Reduktionen, PCP, Satz von Rice

Blau: Nur FSK

Inhaltsübersicht Teil III: Komplexitätstheorie

- $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NP}$
- $\mathcal{NP}$-Schwere und $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit
- Polynomialzeitreduktionen
- Satz von Cook
- $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme

Klassiker: „X angeben“

- Automaten angeben
- Grammatik angeben
- Regulären Ausdruck angeben

Klassiker: „Rechenaufgaben“

- NFA in DFA mit Potenzmengenkonstruktion transformieren
- DFA minimieren
- Chomsky-Normalform berechnen
- CYK-Algorithmus ausführen
- Wortproblem für Typ 1-Grammatiken entscheiden

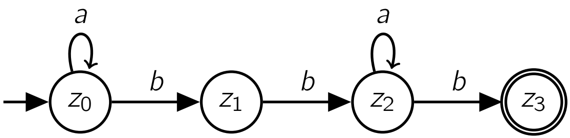
Blau: Nur FSK

Beispielaufgabe zu „Automaten angeben“

Geben Sie einen NFA über $\Sigma = \{a, b\}$ an, der $L = \{a^i bba^j b \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ erkennt.

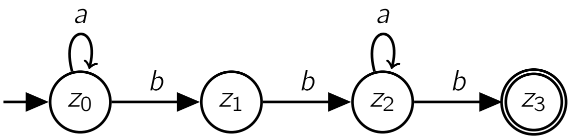
Beispielaufgabe zu „Automaten angeben“

Geben Sie einen NFA über $\Sigma = \{a, b\}$ an, der $L = \{a^i bba^j b \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ erkennt.



Beispielaufgabe zu „Automaten angeben“

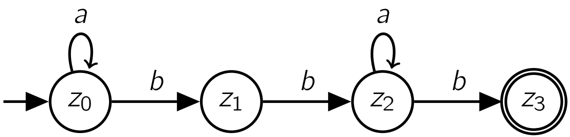
Geben Sie einen NFA über $\Sigma = \{a, b\}$ an, der $L = \{a^i bba^j b \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ erkennt.



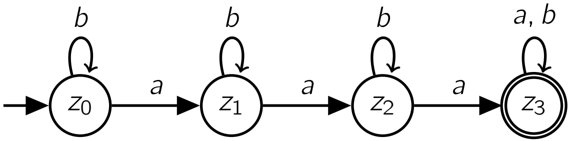
Geben Sie einen DFA über $\Sigma = \{a, b\}$ an, der $L = \{w \mid \#_a(w) > 2\}$ erkennt.

Beispielaufgabe zu „Automaten angeben“

Geben Sie einen NFA über $\Sigma = \{a, b\}$ an, der $L = \{a^i bba^j b \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ erkennt.

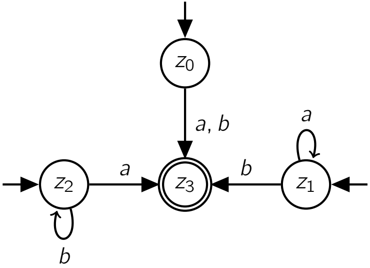


Geben Sie einen DFA über $\Sigma = \{a, b\}$ an, der $L = \{w \mid \#_a(w) > 2\}$ erkennt.



Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

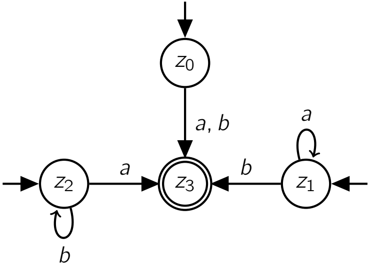
Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



a) Welche Sprache erkennt der gezeigte NFA?
b) Geben Sie die Sprache durch einen regulären Ausdruck an.
c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).
d) Minimieren Sie den DFA (Partitionstabelle erforderlich).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

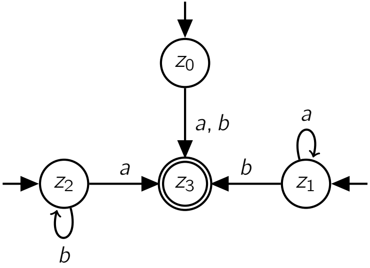
Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



a) Welche Sprache erkennt der gezeigte NFA?

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

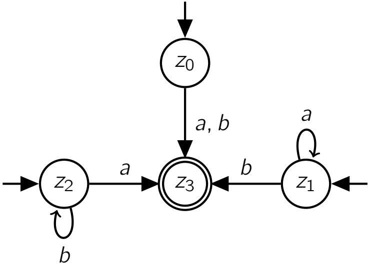


a) Welche Sprache erkennt der gezeigte NFA?

$$L = \{a, b\} \cup \{b^i a \mid i \geq 0\} \cup \{a^i b \mid i \geq 0\}$$
$$= \{b^i a \mid i \geq 0\} \cup \{a^i b \mid i \geq 0\}$$

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



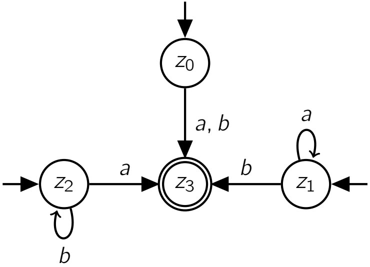
a) Welche Sprache erkennt der gezeigte NFA?

$$L = \{a, b\} \cup \{b^i a \mid i \geq 0\} \cup \{a^i b \mid i \geq 0\}$$
$$= \{b^i a \mid i \geq 0\} \cup \{a^i b \mid i \geq 0\}$$

b) Geben Sie die Sprache durch einen regulären Ausdruck an.

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



a) Welche Sprache erkennt der gezeigte NFA?

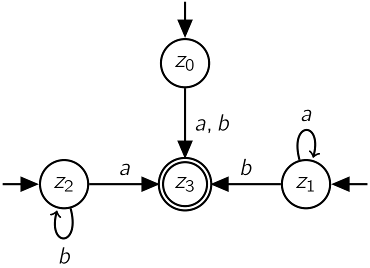
$$L = \{a, b\} \cup \{b^i a \mid i \geq 0\} \cup \{a^i b \mid i \geq 0\}$$
$$= \{b^i a \mid i \geq 0\} \cup \{a^i b \mid i \geq 0\}$$

b) Geben Sie die Sprache durch einen regulären Ausdruck an.

$L = L(\alpha)$ mit $\alpha = (a^* b | b^* a)$

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

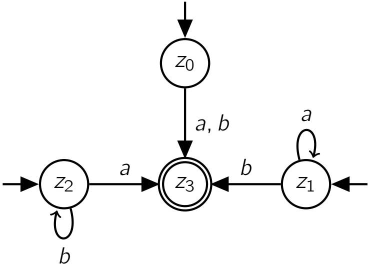
Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

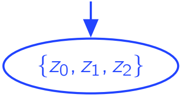


c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

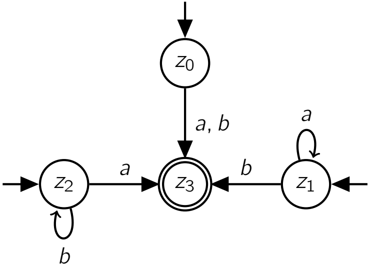


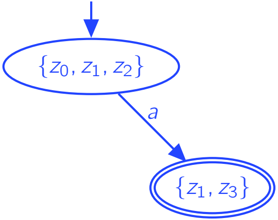


c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

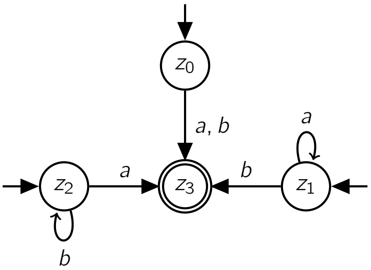


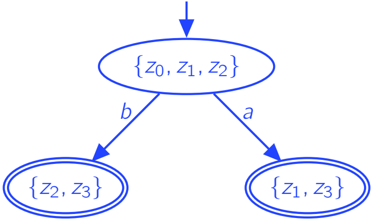


c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

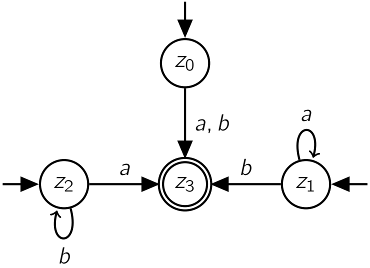


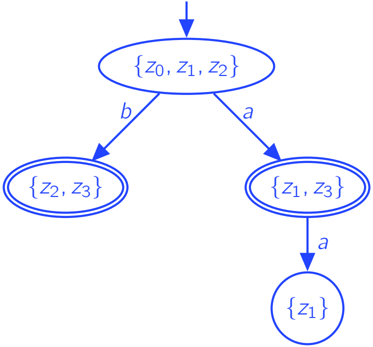


c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

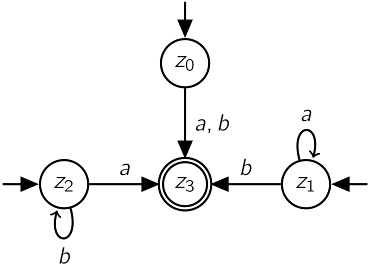


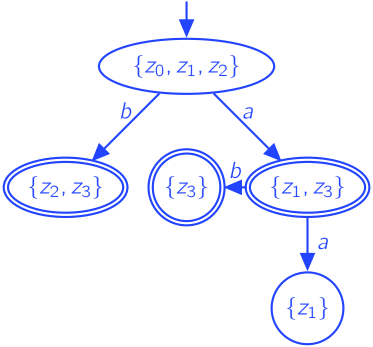


c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

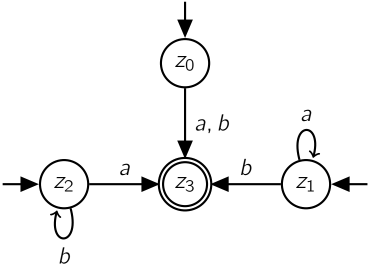


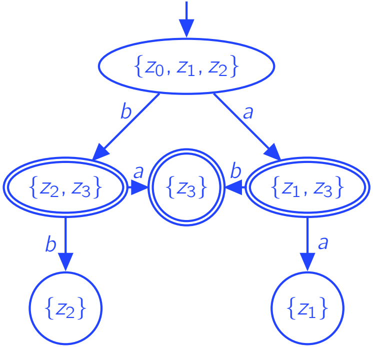


c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

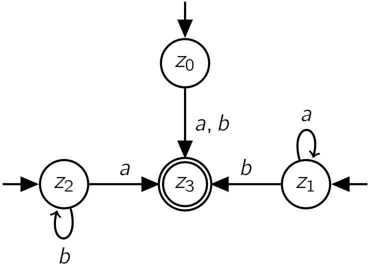


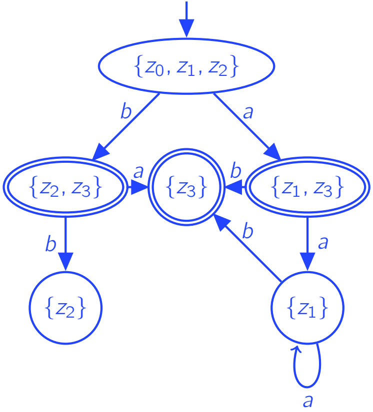


c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

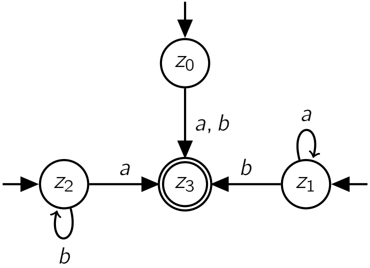


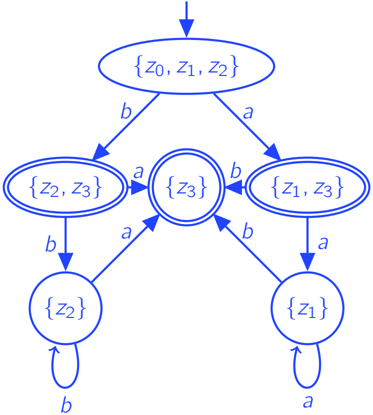


c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

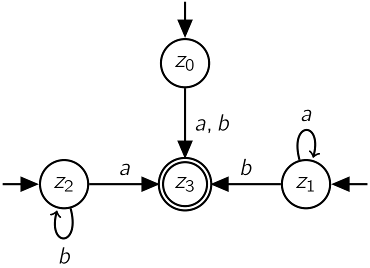


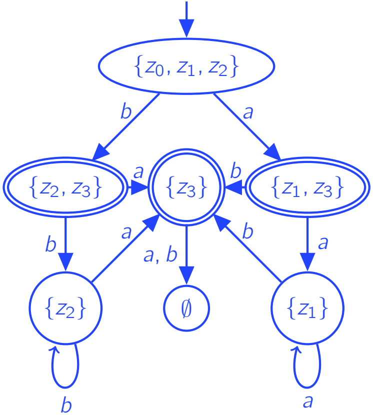


c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

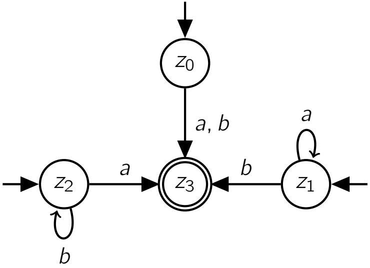


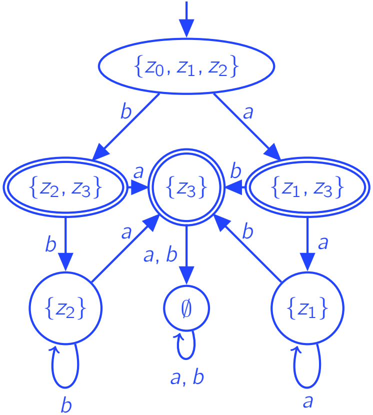


c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende NFA über $\Sigma = \{a, b\}$.

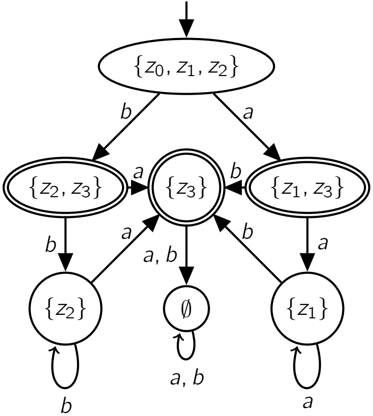




c) Erzeugen Sie einen äquivalenten DFA durch die Potenzmengenkonstruktion (erreichbare Zustände reichen aus).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

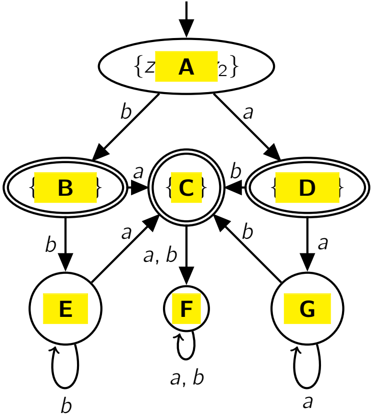
Gegeben sei der folgende DFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



d) Minimieren Sie den DFA (Partitionstabelle erforderlich).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

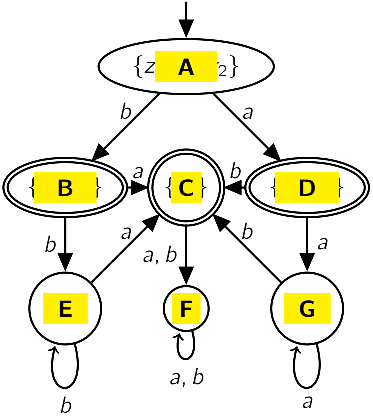
Gegeben sei der folgende DFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



d) Minimieren Sie den DFA (Partitionstabelle erforderlich).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende DFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



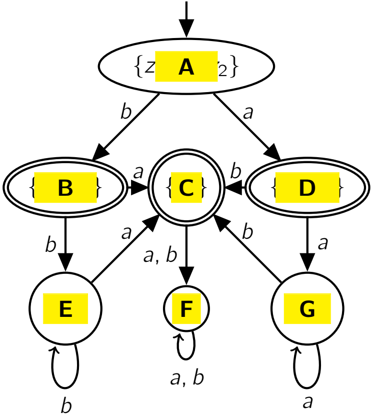
Partitionstabelle:

0.	A	E	F	G	B	C	D

d) Minimieren Sie den DFA (Partitionstabelle erforderlich).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende DFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



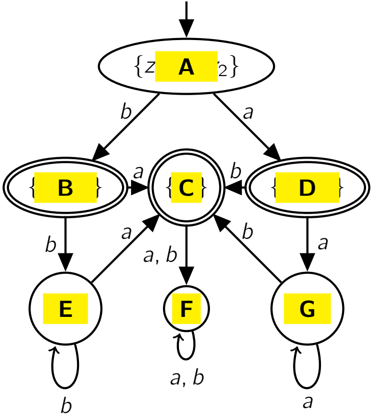
Partitionstabelle:

0.	A E F G				B C D			
1.	A E	F G			B C D			mit a

d) Minimieren Sie den DFA (Partitionstabelle erforderlich).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende DFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



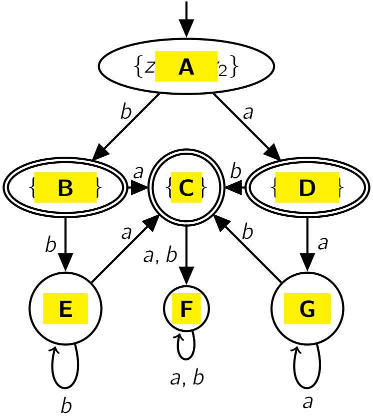
Partitionstabelle:

0.	A E F G | B C D	
1.	A E | F G | B C D	mit a
2.	A | E | F | G | B C D	mit b

d) Minimieren Sie den DFA (Partitionstabelle erforderlich).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende DFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



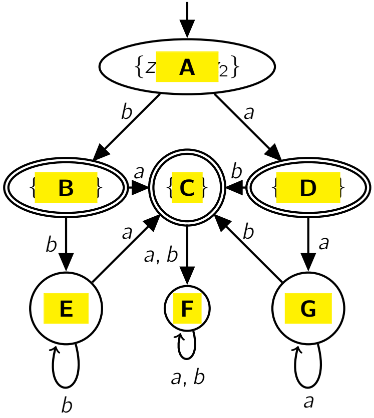
Partitionstabelle:

0.	A E F G | B C D	
1.	A E | F G | B C D	mit a
2.	A | E | F | G | B C D	mit b
3.	A | E | F | G | B | C | D	mit a

d) Minimieren Sie den DFA (Partitionstabelle erforderlich).

Beispielaufgabe zu endlichen Automaten

Gegeben sei der folgende DFA über $\Sigma = \{a, b\}$.



Partitionstabelle:

0.	A E F G ∣ B C D	
1.	A E ∣ F G ∣ B C D	mit *a*
2.	A ∣ E ∣ F ∣ G ∣ B C D	mit *b*
3.	A ∣ E ∣ F ∣ G ∣ B ∣ C ∣ D	mit *a*

Der Automat war schon minimal.

d) Minimieren Sie den DFA (Partitionstabelle erforderlich).

Beispielaufgabe zum CYK-Algorithmus

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und
$P = \{S \to CS \mid b,\ A \to a,\ B \to b,\ C \to AC \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für *aaaaab* aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

Beispielaufgabe zum CYK-Algorithmus

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und
$P = \{S \to CS \mid b,\ A \to a,\ B \to b,\ C \to AC \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für *aaaaab* aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

	a 1	a 2	a 3	a 4	a 5	b 6
1	A	A	A	A	A	B, C, S
2					C	
3				C		
4			C			
5		C				
6	C					

Beispielaufgabe zum CYK-Algorithmus

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und
$P = \{S \rightarrow CS \mid b,\ A \rightarrow a,\ B \rightarrow b,\ C \rightarrow AC \mid b\}$.

Führen Sie den CYK-Algorithmus für *aaaaab* aus. Liegt das Wort in $L(G)$?

	a 1	a 2	a 3	a 4	a 5	b 6
1	A	A	A	A	A	B, C, S
2					C	
3				C		
4			C			
5		C				
6	C					

Da unten links nicht das Startsymbol S in der Tabelle steht,
liegt das Wort nicht in $L(G)$.

Klassiker: „Beweisaufgaben“

- Nichtregularität einer Sprache zeigen mit dem Pumping-Lemma für reguläre Sprachen
- Nichtregularität einer Sprache zeigen mit dem Satz von Myhill und Nerode
- Nicht-Kontextfreiheit einer Sprache zeigen mit dem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen
- Unentscheidbarkeit zeigen mit einer Reduktion
- Unentscheidbarkeit zeigen mit dem Satz von Rice
- $\mathcal{NP}$-Schwere zeigen mit einer Polynomialzeitreduktion

Blau: nur FSK

Beispielaufgabe zu „Nichtregularität beweisen“

Zeigen Sie, dass $L = \{a^j \$ b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.

Beispielaufgabe zu „Nichtregularität beweisen“

Zeigen Sie, dass $L = \{a^j \$ b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.

Mit dem Pumping-Lemma.

Sei $n > 0$ beliebig.

Wir wählen $z \in L$ als $z = a^n \$ b^n$. Wir haben $|z| \geq n$.

Sei $z = uvw$ ein beliebige Zerlegung von z,
sodass $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Dann $u = a^i$, $v = a^j$,
$w = a^k \$ b^n$ mit $i + j + k = n$ und $j \geq 1$.

Wir wählen $i = 0$. Dann gilt $uv^0w = a^{n-j} \$ b^n \notin L$. Widerspruch. $\square$

Beispielaufgabe zu „Nichtregularität beweisen“

Zeigen Sie, dass $L = \{a^j\$b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Beispielaufgabe zu „Nichtregularität beweisen"

Zeigen Sie, dass $L = \{a^j\$b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Die Nerode-Relation $\sim_L$ eine Sprache L ist so definiert: $u \sim_L v$ g.d.w.

$$\forall w \in \Sigma^*,\ uw \in L \text{ g.d.w. } vw \in L$$

Der Satz von Myhill und Nerode sagt: Index($\sim_L$) ist endlich g.d.w. L regulär ist.

Beispielaufgabe zu „Nichtregularität beweisen“

Zeigen Sie, dass $L = \{a^j\$b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Die Nerode-Relation $\sim_L$ eine Sprache L ist so definiert: $u \sim_L v$ g.d.w.

$$\forall w \in \Sigma^*,\ uw \in L \text{ g.d.w. } vw \in L$$

Der Satz von Myhill und Nerode sagt: Index($\sim_L$) ist endlich g.d.w. L regulär ist.

Für die Aufgabe müssen wir unendlich viele verschiedene Äquivalenzklassen finden.

Beispielaufgabe zu „Nichtregularität beweisen“

Zeigen Sie, dass $L = \{a^j \$ b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Die Nerode-Relation $\sim_L$ eine Sprache L ist so definiert: $u \sim_L v$ g.d.w.

$$\forall w \in \Sigma^*,\ uw \in L \text{ g.d.w. } vw \in L$$

Der Satz von Myhill und Nerode sagt: Index($\sim_L$) ist endlich g.d.w. L regulär ist.

Für die Aufgabe müssen wir unendlich viele verschiedene Äquivalenzklassen finden.

Für $u_i = a^i\$$ und $w_i = b^i$ gilt $u_i\$w_i \in L$, aber $u_j\$w_i \notin L$.
Damit $u_i \not\sim_L u_j$ für $i \neq j$.

Beispielaufgabe zu „Nichtregularität beweisen“

Zeigen Sie, dass $L = \{a^j\$b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist durch Verwendung des Satzes von Myhill und Nerode.

Die Nerode-Relation $\sim_L$ eine Sprache L ist so definiert: $u \sim_L v$ g.d.w.

$$\forall w \in \Sigma^*,\ uw \in L \text{ g.d.w. } vw \in L$$

Der Satz von Myhill und Nerode sagt: Index($\sim_L$) ist endlich g.d.w. L regulär ist.

Für die Aufgabe müssen wir unendlich viele verschiedene Äquivalenzklassen finden.

Für $u_i = a^i\$$ und $w_i = b^i$ gilt $u_i\$w_i \in L$, aber $u_j\$w_i \notin L$.
Damit $u_i \not\sim_L u_j$ für $i \neq j$.

Es gibt also unendlich viele disjunkte Äquivalenzklassen: $[u_1]_{\sim_L}$, $[u_2\$]_{\sim_L}$, ...
Daher: Index($\sim_L$) $= \infty$.
Mit dem Satz von Myhill und Nerode folgt, dass L nicht regulär ist. $\square$

Beispielaufgabe zu „Unentscheidbarkeit beweisen“

Sei $X = \{w \mid M_w \text{ hält genau bei Eingabe } 0\}$.
Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit mithilfe einer Reduktion.

Beispielaufgabe zu „Unentscheidbarkeit beweisen“

Sei $X = \{w \mid M_w \text{ hält genau bei Eingabe } 0\}$.
Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit mithilfe einer Reduktion.

Sei $H_0 = \{w \mid M_w \text{ hält bei leerer Eingabe}\}$. Aus der Vorlesung: H_0 ist unentscheidbar.

Beispielaufgabe zu „Unentscheidbarkeit beweisen“

Sei $X = \{w \mid M_w \text{ hält genau bei Eingabe } 0\}$.
Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit mithilfe einer Reduktion.

Sei $H_0 = \{w \mid M_w \text{ hält bei leerer Eingabe}\}$. Aus der Vorlesung: H_0 ist unentscheidbar.

Wir zeigen $H_0 \leq X$:

Beispielaufgabe zu „Unentscheidbarkeit beweisen“

Sei $X = \{w \mid M_w \text{ hält genau bei Eingabe } 0\}$.
Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit mithilfe einer Reduktion.

Sei $H_0 = \{w \mid M_w \text{ hält bei leerer Eingabe}\}$. Aus der Vorlesung: H_0 ist unentscheidbar.

Wir zeigen $H_0 \leq X$:

Die Reduktionsfunktion f nimmt eine Turingmaschinenbeschreibung und erstellt daraus eine neue Turingmaschinenbeschreibung.

Beispielaufgabe zu „Unentscheidbarkeit beweisen“

Sei $X = \{w \mid M_w$ hält genau bei Eingabe $0\}$.
Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit mithilfe einer Reduktion.

Sei $H_0 = \{w \mid M_w$ hält bei leerer Eingabe$\}$. Aus der Vorlesung: H_0 ist unentscheidbar.

Wir zeigen $H_0 \leq X$:

Die Reduktionsfunktion f nimmt eine Turingmaschinenbeschreibung und erstellt daraus eine neue Turingmaschinenbeschreibung.

Sei w ein Wort. Sei M_w die Turingmaschine zu w.

Beispielaufgabe zu „Unentscheidbarkeit beweisen“

Sei $X = \{w \mid M_w \text{ hält genau bei Eingabe } 0\}$.
Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit mithilfe einer Reduktion.

Sei $H_0 = \{w \mid M_w \text{ hält bei leerer Eingabe}\}$. Aus der Vorlesung: H_0 ist unentscheidbar.

Wir zeigen $H_0 \leq X$:

Die Reduktionsfunktion f nimmt eine Turingmaschinenbeschreibung und erstellt daraus eine neue Turingmaschinenbeschreibung.

Sei w ein Wort. Sei M_w die Turingmaschine zu w.

f erstellt daraus eine Turingmaschine N, sodass

- N prüft, ob die Eingabe 0 ist. Falls nicht, geht N in eine Endlosschleife.
- N löscht das Eingabeband.
- N simuliert M_w bei leerer Eingabe.
- Wenn M_w akzeptiert, dann akzeptiert N, ansonsten läuft N endlos.

Beispielaufgabe zu „Unentscheidbarkeit beweisen“

Es gilt:

$w \in H_0$

Beispielaufgabe zu „Unentscheidbarkeit beweisen“

Es gilt:

$$w \in H_0$$

g.d.w. M_w hält bei leerer Eingabe

Beispielaufgabe zu „Unentscheidbarkeit beweisen“

Es gilt:

$w \in H_0$

g.d.w. M_w hält bei leerer Eingabe

$f(w) \in X$

Beispielaufgabe zu „Unentscheidbarkeit beweisen“

Es gilt:

$w \in H_0$

g.d.w. M_w hält bei leerer Eingabe

$N = M_{f(w)}$ hält genau bei Eingabe 0

g.d.w. $f(w) \in X$

Beispielaufgabe zu „Unentscheidbarkeit beweisen“

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
& w \in H_0 \\
\text{g.d.w. } & M_w \text{ hält bei leerer Eingabe} \\
\text{g.d.w. } & N = M_{f(w)} \text{ hält genau bei Eingabe } 0 \\
\text{g.d.w. } & f(w) \in X
\end{aligned}
$$

Beispielaufgabe zu „Unentscheidbarkeit beweisen“

Es gilt:

$$w \in H_0$$

g.d.w. M_w hält bei leerer Eingabe

g.d.w. $N = M_{f(w)}$ hält genau bei Eingabe 0

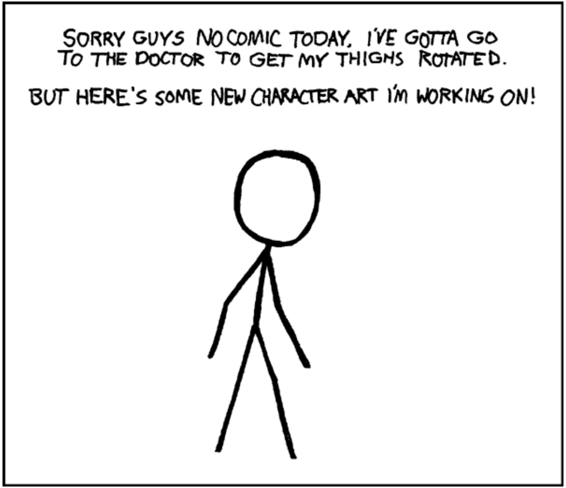
g.d.w. $f(w) \in X$

Da f total und berechenbar ist, gilt $H_0 \leq X$. $\square$

Weitere typische Aufgaben

- Formalismen ineinander überführen (z.B. regulärer Ausdruck in DFA)
- Programme schreiben als Turingmaschine, WHILE-, LOOP-, GOTO-Programm, primitiv rekursive Funktion, μ-rekursive Funktion
- Sprachen in der Chomsky-Hierarchie einordnen

Blau: Nur FSK


SORRY GUYS NO COMIC TODAY. I'VE GOTTA GO TO THE DOCTOR TO GET MY THIGHS ROTATED.
BUT HERE'S SOME NEW CHARACTER ART I'M WORKING ON!

xkcd.com/157/