13b

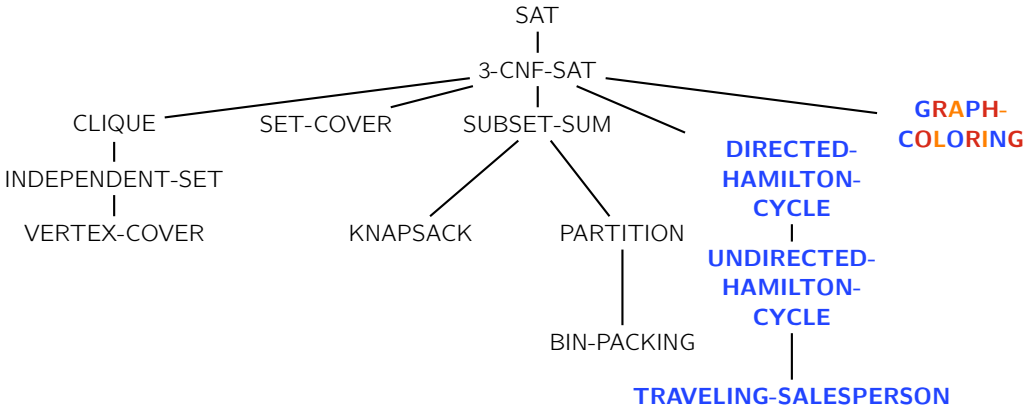
$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING, (UN)DIRECTED-HAMILTON-CYCLE und TRAVELING-SALESPERSON

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 16. Juli 2024
Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel

Überblick über $\mathcal{NP}$-Vollständigkeitsbeweise



Das GRAPH-COLORING-Problem

Definition

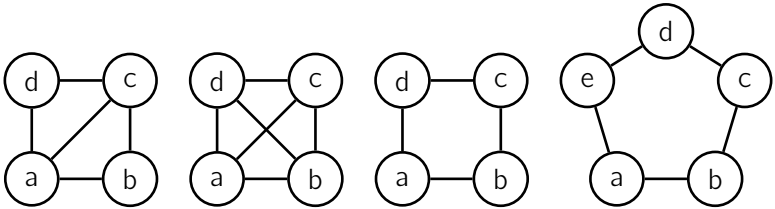
Das GRAPH-COLORING-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$

gefragt: Gibt es eine Färbung der Knoten in V mit höchstens k Farben (eine sogenannte k-Färbung), sodass keine zwei benachbarten Knoten in G die gleiche Farbe erhalten?

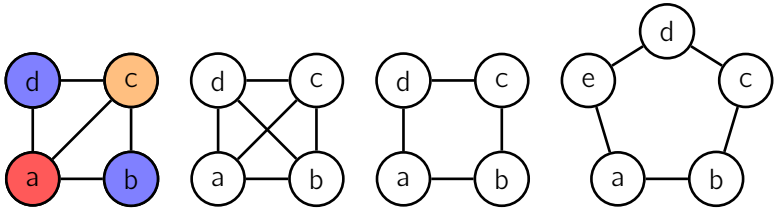
Beispiele für Färbungen

Wie viele Farben sind jeweils minimal notwendig?



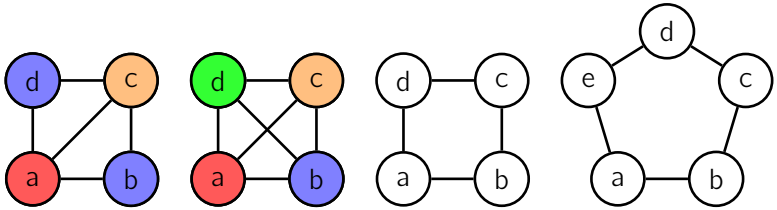
Beispiele für Färbungen

Wie viele Farben sind jeweils minimal notwendig?



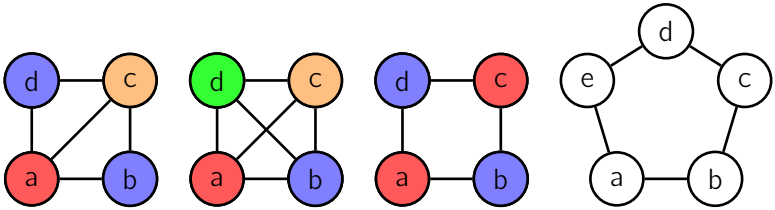
Beispiele für Färbungen

Wie viele Farben sind jeweils minimal notwendig?



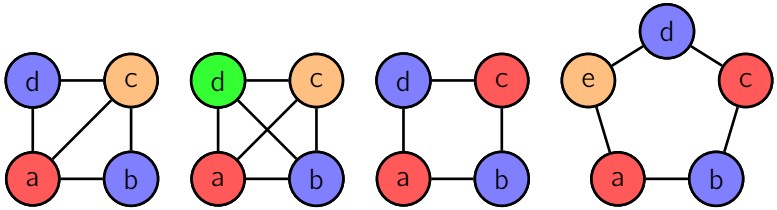
Beispiele für Färbungen

Wie viele Farben sind jeweils minimal notwendig?

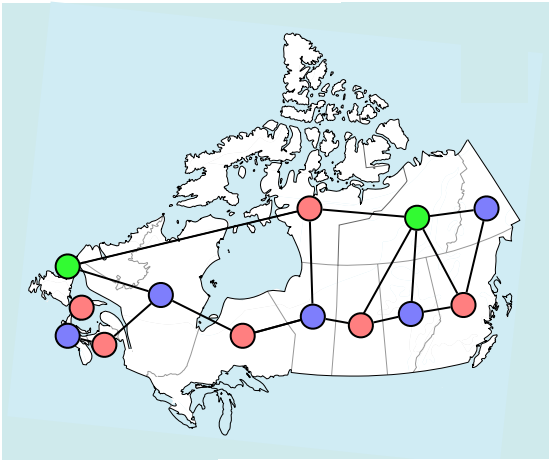


Beispiele für Färbungen

Wie viele Farben sind jeweils minimal notwendig?



Weiteres Beispiel für eine Färbung



Adanak

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING

Satz

GRAPH-COLORING ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING

Satz

GRAPH-COLORING ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis

1. GRAPH-COLORING $\in \mathcal{NP}$:

   Rate nichtdeterministisch die Farbe aus $\{1, \ldots, k\}$ für jeden Knoten $v \in V$.

   Prüfe, dass die Farben von u und v stets verschieden sind, für alle $\{u, v\} \in E$. Das geht in Polynomialzeit.

   Daher kann GRAPH-COLORING auf einer NTM in polynomieller Zeit entschieden werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING

Beweis (Fortsetzung)

2. GRAPH-COLORING ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen 3-CNF-SAT $\leq_p$ GRAPH-COLORING.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING

Beweis (Fortsetzung)

2. GRAPH-COLORING ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen 3-CNF-SAT $\leq_p$ GRAPH-COLORING.

   Sei $H = K_1 \wedge \cdots \wedge K_m$ eine 3-CNF, sodass jede Klausel K_i genau drei Literale enthält.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING

Beweis (Fortsetzung)

2. GRAPH-COLORING ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen 3-CNF-SAT $\leq_p$ GRAPH-COLORING.

   Sei $H = K_1 \wedge \cdots \wedge K_m$ eine 3-CNF, sodass jede Klausel K_i genau drei Literale enthält.

   Seien $x_1, \ldots, x_n$ die in H vorkommenden aussagenlogischen Variablen.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING

Beweis (Fortsetzung)

2. GRAPH-COLORING ist $\mathcal{NP}$-schwer:

   Wir zeigen 3-CNF-SAT $\leq_p$ GRAPH-COLORING.

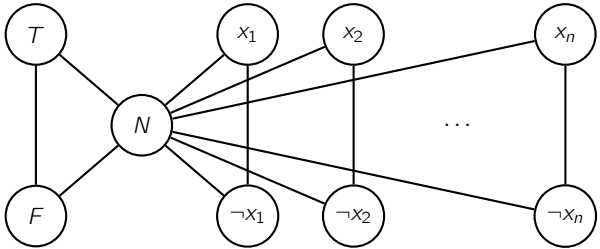
   Sei $H = K_1 \wedge \cdots \wedge K_m$ eine 3-CNF, sodass jede Klausel K_i genau drei Literale enthält.

   Seien $x_1, \ldots, x_n$ die in H vorkommenden aussagenlogischen Variablen.

   Wir erzeugen ein GRAPH-COLORING-Problem $f(H) = (G, k)$ mit $k = 3$.

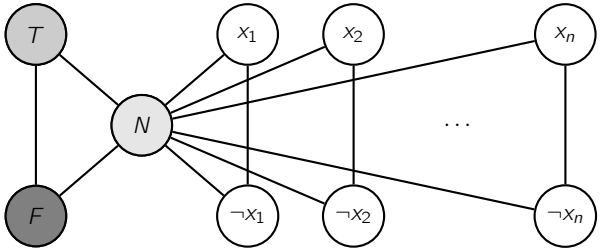
Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Konstruiere zunächst den folgenden Teilgraphen (die „Palette“):



Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

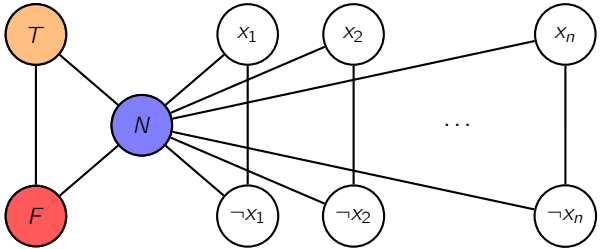
Konstruiere zunächst den folgenden Teilgraphen (die „Palette“):



Wenn der Graph 3-färbbar ist, dann müssen T, N, F verschiedene Farben haben.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

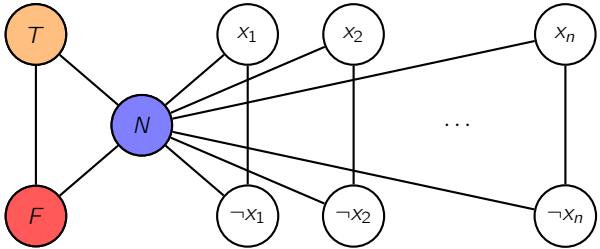
Konstruiere zunächst den folgenden Teilgraphen (die „Palette“):



Wenn der Graph 3-färbbar ist, dann müssen T, N, F verschiedene Farben haben. O.B.d.A. seien dies genau die Farben Orange, Rot und Blau.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Konstruiere zunächst den folgenden Teilgraphen (die „Palette“):

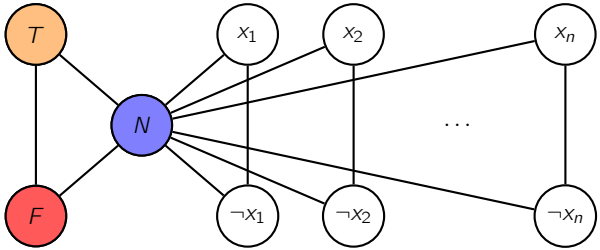


Wenn der Graph 3-färbbar ist, dann müssen T, N, F verschiedene Farben haben.
O.B.d.A. seien dies genau die Farben Orange, Rot und Blau.

Für 3-Färbung muss $(x_i, \neg x_i)$ mit (T, F) oder (F, T) gefärbt werden.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Konstruiere zunächst den folgenden Teilgraphen (die „Palette“):



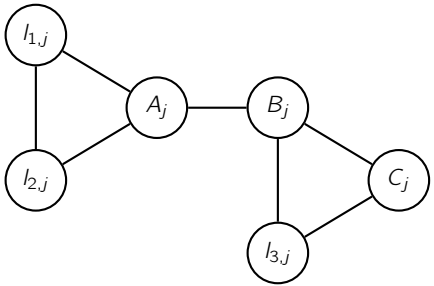
Wenn der Graph 3-färbbar ist, dann müssen T, N, F verschiedene Farben haben.
O.B.d.A. seien dies genau die Farben Orange, Rot und Blau.

Für 3-Färbung muss $(x_i, \neg x_i)$ mit (T,F) oder (F,T) gefärbt werden.

Die Palette gibt eine Belegung an: Die 3-Färbung erzeugt $I(x_i) = 1$, wenn x_i mit T gefärbt ist, und $I(x_i) = 0$, wenn x_i mit F gefärbt ist.

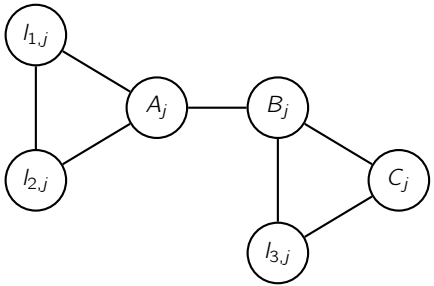
Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Erzeuge für jede Klausel $K_j = L_1 \vee L_2 \vee L_3$ den folgenden Teilgraphen O_j (ein „Oder-Gatter“):



Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

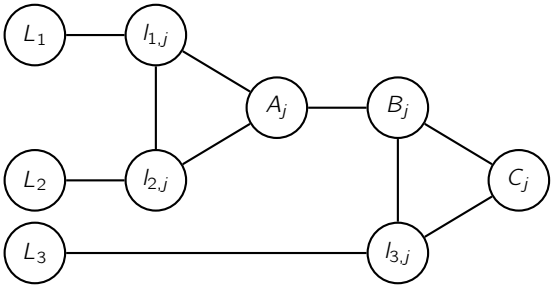
Erzeuge für jede Klausel $K_j = L_1 \vee L_2 \vee L_3$ den folgenden Teilgraphen O_j (ein „Oder-Gatter“):



Grundgedanke: O_j soll das logische Oder der drei Literale in K_j „berechnen“.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Erzeuge für jede Klausel $K_j = L_1 \vee L_2 \vee L_3$ den folgenden Teilgraphen O_j (ein „Oder-Gatter“):

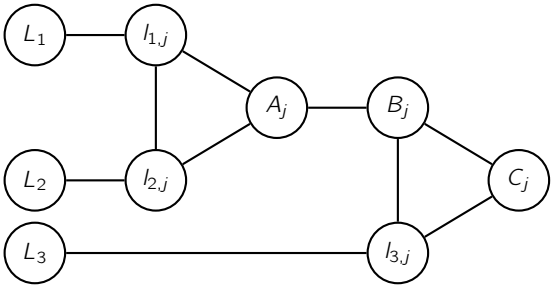


Grundgedanke: O_j soll das logische Oder der drei Literale in K_j „berechnen“.

Verbinde die Eingänge mit L_1, L_2 und L_3 aus der Palette.
Die Farben der L_i sind daher F oder T.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Erzeuge für jede Klausel $K_j = L_1 \vee L_2 \vee L_3$ den folgenden Teilgraphen O_j (ein „Oder-Gatter“):



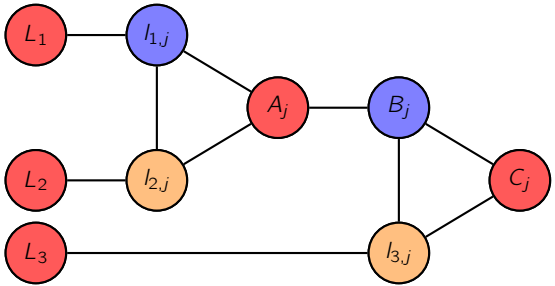
Grundgedanke: O_j soll das logische Oder der drei Literale in K_j „berechnen“.

Verbinde die Eingänge mit L_1, L_2 und L_3 aus der Palette.
Die Farben der L_i sind daher F oder T.

C_j kann mit T gefärbt werden g.d.w. ein L_i mit T gefärbt ist.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Erzeuge für jede Klausel $K_j = L_1 \vee L_2 \vee L_3$ den folgenden Teilgraphen O_j (ein „Oder-Gatter“):



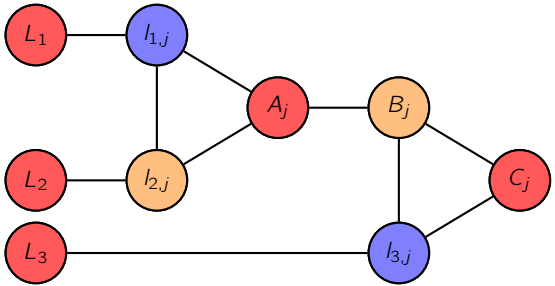
Grundgedanke: O_j soll das logische Oder der drei Literale in K_j „berechnen“.

Verbinde die Eingänge mit L_1, L_2 und L_3 aus der Palette.
Die Farben der L_i sind daher F oder T.

C_j kann mit T gefärbt werden g.d.w. ein L_i mit T gefärbt ist.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Erzeuge für jede Klausel $K_j = L_1 \vee L_2 \vee L_3$ den folgenden Teilgraphen O_j (ein „Oder-Gatter“):



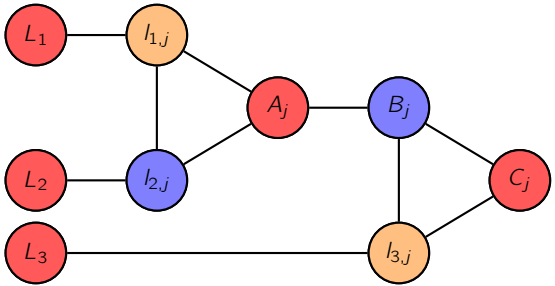
Grundgedanke: O_j soll das logische Oder der drei Literale in K_j „berechnen“.

Verbinde die Eingänge mit L_1, L_2 und L_3 aus der Palette.
Die Farben der L_i sind daher F oder T.

C_j kann mit T gefärbt werden g.d.w. ein L_i mit T gefärbt ist.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Erzeuge für jede Klausel $K_j = L_1 \vee L_2 \vee L_3$ den folgenden Teilgraphen O_j (ein „Oder-Gatter“):



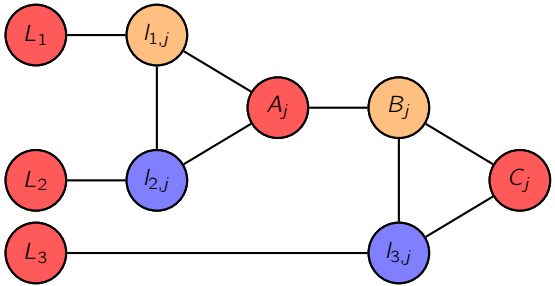
Grundgedanke: O_j soll das logische Oder der drei Literale in K_j „berechnen“.

Verbinde die Eingänge mit L_1, L_2 und L_3 aus der Palette.
Die Farben der L_i sind daher F oder T.

C_j kann mit T gefärbt werden g.d.w. ein L_i mit T gefärbt ist.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Erzeuge für jede Klausel $K_j = L_1 \vee L_2 \vee L_3$ den folgenden Teilgraphen O_j (ein „Oder-Gatter“):



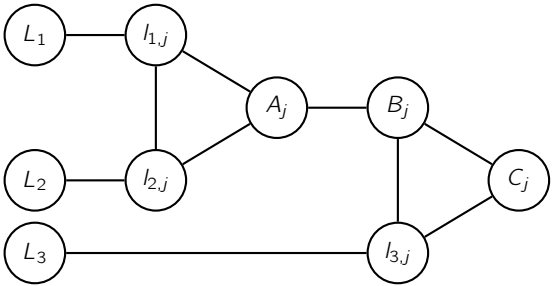
Grundgedanke: O_j soll das logische Oder der drei Literale in K_j „berechnen“.

Verbinde die Eingänge mit L_1, L_2 und L_3 aus der Palette.
Die Farben der L_i sind daher F oder T.

C_j kann mit T gefärbt werden g.d.w. ein L_i mit T gefärbt ist.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Erzeuge für jede Klausel $K_j = L_1 \vee L_2 \vee L_3$ den folgenden Teilgraphen O_j (ein „Oder-Gatter“):



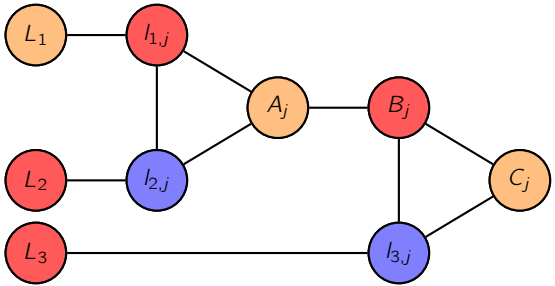
Grundgedanke: O_j soll das logische Oder der drei Literale in K_j „berechnen“.

Verbinde die Eingänge mit L_1, L_2 und L_3 aus der Palette.
Die Farben der L_i sind daher F oder T.

C_j kann mit T gefärbt werden g.d.w. ein L_i mit T gefärbt ist.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Erzeuge für jede Klausel $K_j = L_1 \vee L_2 \vee L_3$ den folgenden Teilgraphen O_j (ein „Oder-Gatter“):



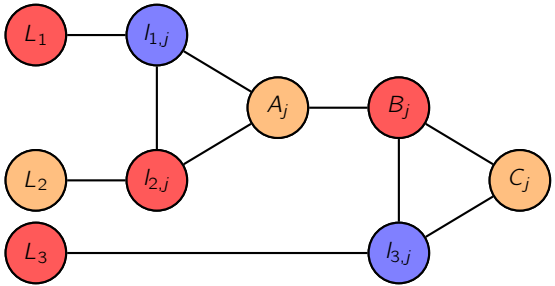
Grundgedanke: O_j soll das logische Oder der drei Literale in K_j „berechnen“.

Verbinde die Eingänge mit L_1, L_2 und L_3 aus der Palette.
Die Farben der L_i sind daher F oder T.

C_j kann mit T gefärbt werden g.d.w. ein L_i mit T gefärbt ist.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Erzeuge für jede Klausel $K_j = L_1 \vee L_2 \vee L_3$ den folgenden Teilgraphen O_j (ein „Oder-Gatter“):



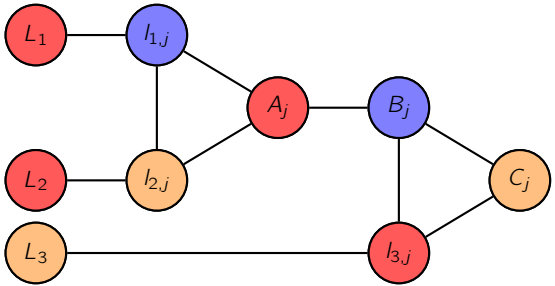
Grundgedanke: O_j soll das logische Oder der drei Literale in K_j „berechnen“.

Verbinde die Eingänge mit L_1, L_2 und L_3 aus der Palette.
Die Farben der L_i sind daher F oder T.

C_j kann mit T gefärbt werden g.d.w. ein L_i mit T gefärbt ist.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Erzeuge für jede Klausel $K_j = L_1 \vee L_2 \vee L_3$ den folgenden Teilgraphen O_j (ein „Oder-Gatter“):



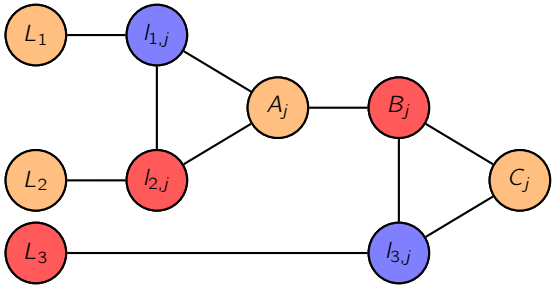
Grundgedanke: O_j soll das logische Oder der drei Literale in K_j „berechnen“.

Verbinde die Eingänge mit L_1, L_2 und L_3 aus der Palette.
Die Farben der L_i sind daher F oder T.

C_j kann mit T gefärbt werden g.d.w. ein L_i mit T gefärbt ist.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Erzeuge für jede Klausel $K_j = L_1 \vee L_2 \vee L_3$ den folgenden Teilgraphen O_j (ein „Oder-Gatter“):



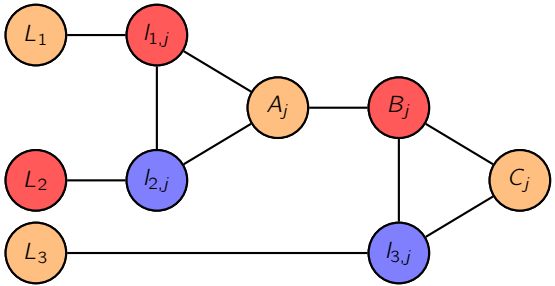
Grundgedanke: O_j soll das logische Oder der drei Literale in K_j „berechnen“.

Verbinde die Eingänge mit L_1, L_2 und L_3 aus der Palette.
Die Farben der L_i sind daher F oder T.

C_j kann mit T gefärbt werden g.d.w. ein L_i mit T gefärbt ist.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Erzeuge für jede Klausel $K_j = L_1 \vee L_2 \vee L_3$ den folgenden Teilgraphen O_j (ein „Oder-Gatter“):



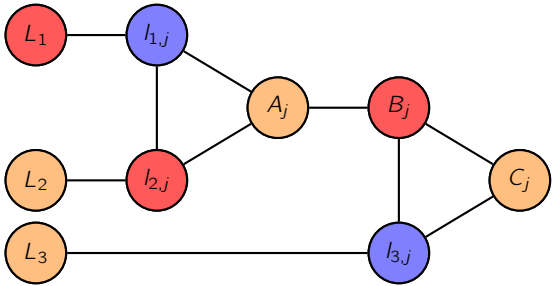
Grundgedanke: O_j soll das logische Oder der drei Literale in K_j „berechnen“.

Verbinde die Eingänge mit L_1, L_2 und L_3 aus der Palette.
Die Farben der L_i sind daher F oder T.

C_j kann mit T gefärbt werden g.d.w. ein L_i mit T gefärbt ist.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Erzeuge für jede Klausel $K_j = L_1 \vee L_2 \vee L_3$ den folgenden Teilgraphen O_j (ein „Oder-Gatter“):



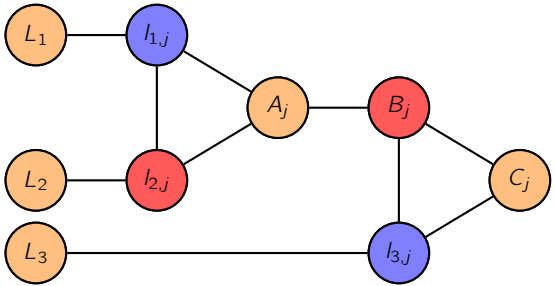
Grundgedanke: O_j soll das logische Oder der drei Literale in K_j „berechnen“.

Verbinde die Eingänge mit L_1, L_2 und L_3 aus der Palette.
Die Farben der L_i sind daher F oder T.

C_j kann mit T gefärbt werden g.d.w. ein L_i mit T gefärbt ist.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Erzeuge für jede Klausel $K_j = L_1 \vee L_2 \vee L_3$ den folgenden Teilgraphen O_j (ein „Oder-Gatter“):



Grundgedanke: O_j soll das logische Oder der drei Literale in K_j „berechnen“.

Verbinde die Eingänge mit L_1, L_2 und L_3 aus der Palette.
Die Farben der L_i sind daher F oder T.

C_j kann mit T gefärbt werden g.d.w. ein L_i mit T gefärbt ist.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Erzeuge die Oder-Gatter $O_1, \ldots, O_m$ für jeweils $K_1, \ldots, K_m$.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Erzeuge die Oder-Gatter $O_1, \ldots, O_m$ für jeweils $K_1, \ldots, K_m$.

Für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$, sei $K_j = L_1 \vee L_2 \vee L_3$.
Verbinde jedes $l_{i,j}$ von O_j mit L_i aus der „Palette“.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Erzeuge die Oder-Gatter $O_1, \ldots, O_m$ für jeweils $K_1, \ldots, K_m$.

Für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$, sei $K_j = L_1 \vee L_2 \vee L_3$.
Verbinde jedes $l_{i,j}$ von O_j mit L_i aus der „Palette“.

Verbinde jeweils C_j mit N und C_j mit F.
Eine zulässige Färbung muss daher C_j auf T setzen.

Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Erzeuge die Oder-Gatter $O_1, \ldots, O_m$ für jeweils $K_1, \ldots, K_m$.

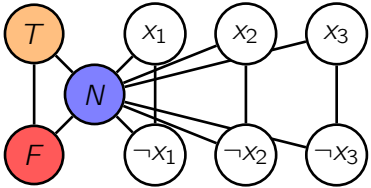
Für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$, sei $K_j = L_1 \vee L_2 \vee L_3$.
Verbinde jedes $l_{i,j}$ von O_j mit L_i aus der „Palette“.

Verbinde jeweils C_j mit N und C_j mit F.
Eine zulässige Färbung muss daher C_j auf T setzen.

Damit haben wir den Graphen G konstruiert.

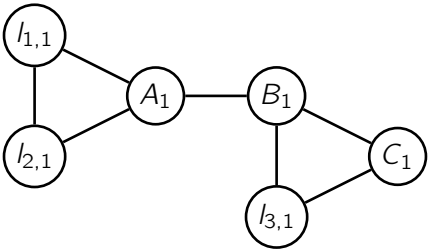
Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

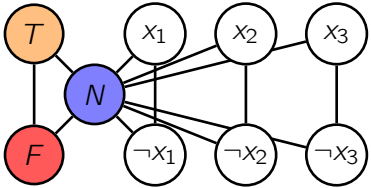
Beispiel: Sei $H = K_1$, wobei $K_1 = x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_2$.



Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

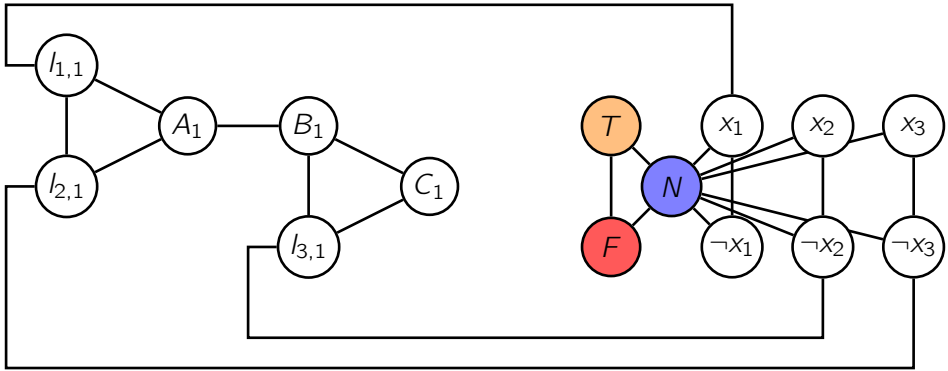
Beispiel: Sei $H = K_1$, wobei $K_1 = x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_2$.





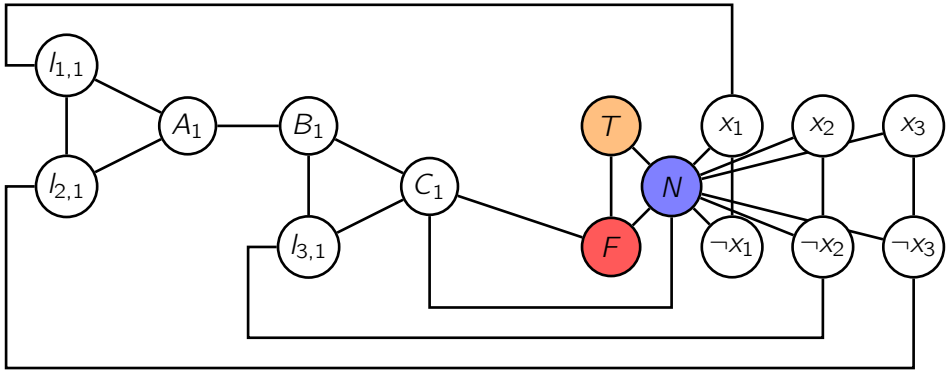
Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Beispiel: Sei $H = K_1$, wobei $K_1 = x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_2$.



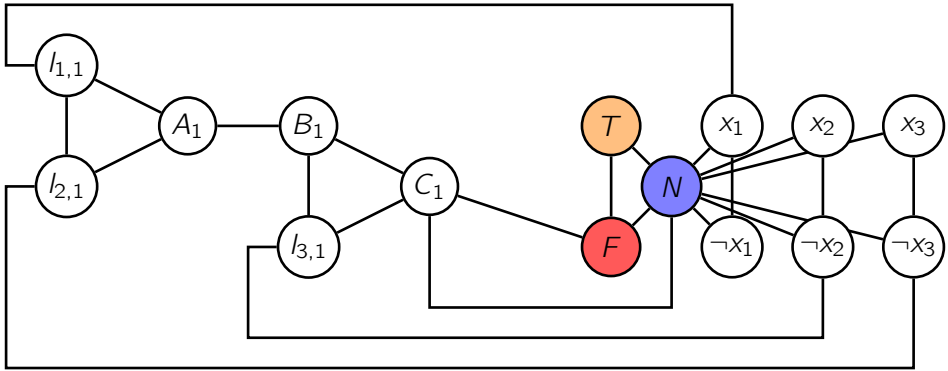
Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Beispiel: Sei $H = K_1$, wobei $K_1 = x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_2$.



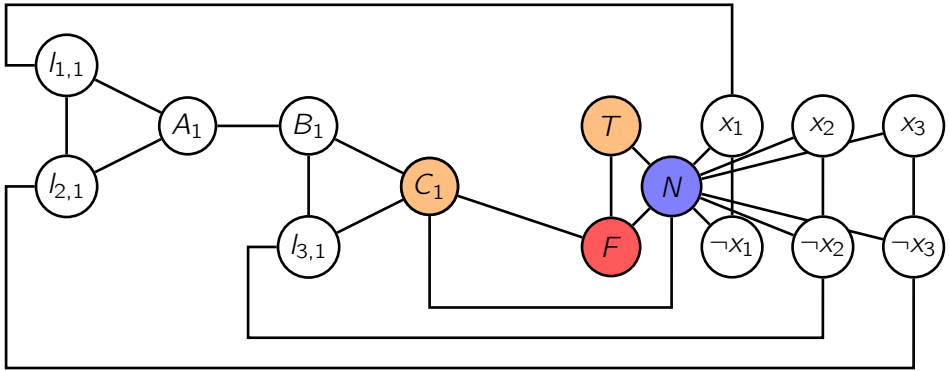
Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Beispiel: Sei $H = K_1$, wobei $K_1 = x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_2$.
H ist erfüllbar g.d.w. folgender Graph G 3-färbbar ist.



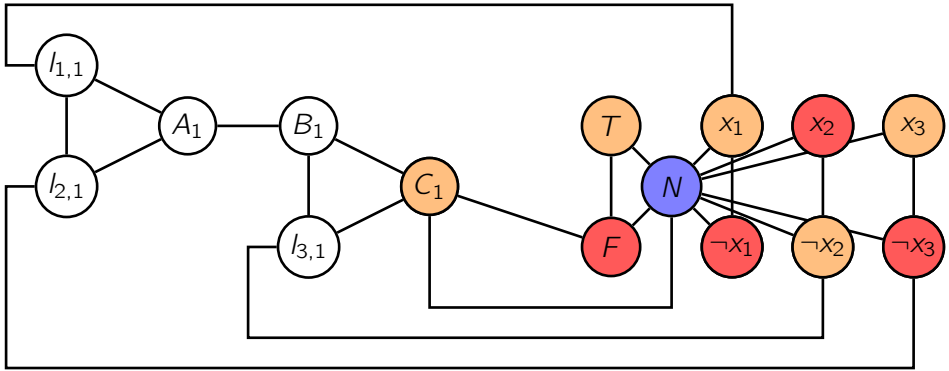
Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Beispiel: Sei $H = K_1$, wobei $K_1 = x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_2$.
H ist erfüllbar g.d.w. folgender Graph G 3-färbbar ist.



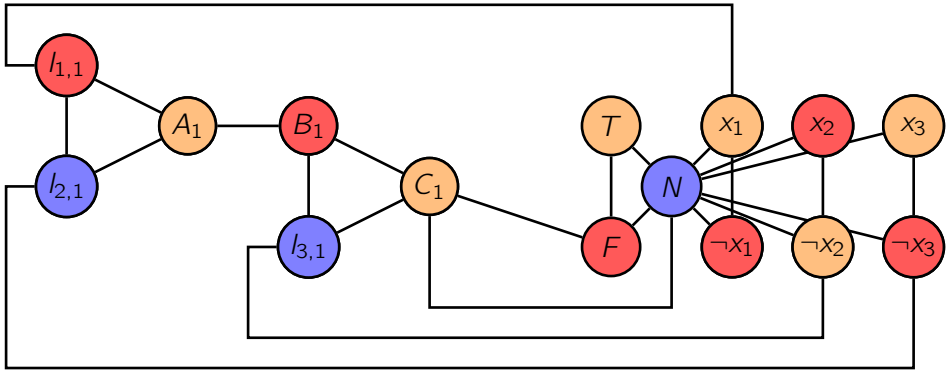
Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Beispiel: Sei $H = K_1$, wobei $K_1 = x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_2$.
H ist erfüllbar g.d.w. folgender Graph G 3-färbbar ist.



Konstruktion der GRAPH-COLORING-Instanz

Beispiel: Sei $H = K_1$, wobei $K_1 = x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_2$.
H ist erfüllbar g.d.w. folgender Graph G 3-färbbar ist.



$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING

Die Funktion f ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING

Die Funktion f ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

Wir zeigen: H ist erfüllbar g.d.w. der Graph G 3-färbbar ist.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING

Die Funktion f ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

Wir zeigen: H ist erfüllbar g.d.w. der Graph G 3-färbbar ist.

$\Longleftarrow$ Sei G 3-färbbar.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING

Die Funktion f ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

Wir zeigen: H ist erfüllbar g.d.w. der Graph G 3-färbbar ist.

$\Longleftarrow$ Sei G 3-färbbar.

Dann sind alle C_j mit T gefärbt.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING

Die Funktion f ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

Wir zeigen: H ist erfüllbar g.d.w. der Graph G 3-färbbar ist.

$\Longleftarrow$ Sei G 3-färbbar.

Dann sind alle C_j mit T gefärbt.

x_i und $\neg x_i$ sind mit T und F oder umgekehrt gefärbt.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING

Die Funktion f ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

Wir zeigen: H ist erfüllbar g.d.w. der Graph G 3-färbbar ist.

$\Longleftarrow$ Sei G 3-färbbar.

Dann sind alle C_j mit T gefärbt.

x_i und $\neg x_i$ sind mit T und F oder umgekehrt gefärbt.

Wir definieren die Belegung I mit $I(x_i) = 1$ wenn x_i mit T und $I(x_i) = 0$ sonst.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING

Die Funktion f ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

Wir zeigen: H ist erfüllbar g.d.w. der Graph G 3-färbbar ist.

$\Longleftarrow$ Sei G 3-färbbar.

Dann sind alle C_j mit T gefärbt.

x_i und $\neg x_i$ sind mit T und F oder umgekehrt gefärbt.

Wir definieren die Belegung I mit $I(x_i) = 1$ wenn x_i mit T und $I(x_i) = 0$ sonst.

Die Belegung I macht die Formel H wahr, da in jeder Klausel ein Literal durch I wahr gemacht wird.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von GRAPH-COLORING

Die Funktion f ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

Wir zeigen: H ist erfüllbar g.d.w. der Graph G 3-färbbar ist.

$\Longleftarrow$ Sei G 3-färbbar.

Dann sind alle C_j mit T gefärbt.

x_i und $\neg x_i$ sind mit T und F oder umgekehrt gefärbt.

Wir definieren die Belegung I mit $I(x_i) = 1$ wenn x_i mit T und $I(x_i) = 0$ sonst.

Die Belegung I macht die Formel H wahr, da in jeder Klausel ein Literal durch I wahr gemacht wird.

$\Longrightarrow$ Analog kann aus einer erfüllenden Belegung I eine 3-Färbung erzeugt werden. □

Gerichtete Hamilton-Kreise

Definition

In einem gerichteten Graphen ist ein Hamilton-Kreis ein Kreis, der genau alle Knoten einmal besucht.

Formal: Für $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ist ein Hamilton-Kreis eine Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, sodass $(v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}) \in E$ und $(v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}) \in E$.

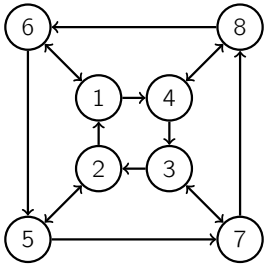
Gerichtete Hamilton-Kreise

Definition

In einem gerichteten Graphen ist ein Hamilton-Kreis ein Kreis, der genau alle Knoten einmal besucht.

Formal: Für $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ist ein Hamilton-Kreis eine Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, sodass $(v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}) \in E$ und $(v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}) \in E$.

Beispiel:



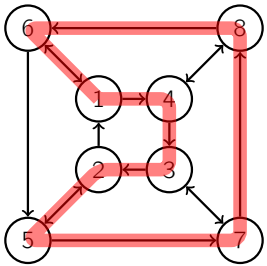
Gerichtete Hamilton-Kreise

Definition

In einem gerichteten Graphen ist ein Hamilton-Kreis ein Kreis, der genau alle Knoten einmal besucht.

Formal: Für $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ist ein Hamilton-Kreis eine Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, sodass $(v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}) \in E$ und $(v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}) \in E$.

Beispiel:



Das DIRECTED-HAMILTON-CYCLE-Problem

Definition

Das DIRECTED-HAMILTON-CYCLE-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$

gefragt: Gibt es einen Hamilton-Kreis in G?

Das DIRECTED-HAMILTON-CYCLE-Problem

Definition

Das DIRECTED-HAMILTON-CYCLE-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$

gefragt: Gibt es einen Hamilton-Kreis in G?

Satz

DIRECTED-HAMILTON-CYCLE ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Das DIRECTED-HAMILTON-CYCLE-Problem

Definition

Das DIRECTED-HAMILTON-CYCLE-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$

gefragt: Gibt es einen Hamilton-Kreis in G?

Satz

DIRECTED-HAMILTON-CYCLE ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis Siehe Skript. □

Ungerichtete Hamilton-Kreise

Definition

In einem ungerichteten Graphen ist ein Hamilton-Kreis ein Kreis, der genau alle Knoten einmal besucht.

Formal: Für $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ist ein Hamilton-Kreis eine Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, sodass $\{v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}\} \in E$ und $\{v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}\} \in E$.

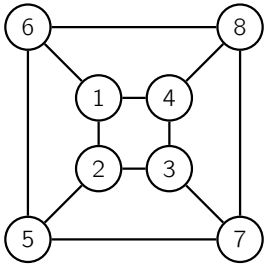
Ungerichtete Hamilton-Kreise

Definition

In einem ungerichteten Graphen ist ein Hamilton-Kreis ein Kreis, der genau alle Knoten einmal besucht.

Formal: Für $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ist ein Hamilton-Kreis eine Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, sodass $\{v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}\} \in E$ und $\{v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}\} \in E$.

Beispiel:



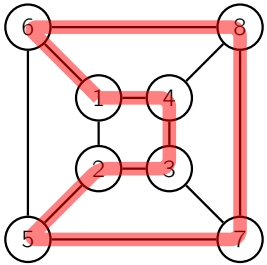
Ungerichtete Hamilton-Kreise

Definition

In einem ungerichteten Graphen ist ein Hamilton-Kreis ein Kreis, der genau alle Knoten einmal besucht.

Formal: Für $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ist ein Hamilton-Kreis eine Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, sodass $\{v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}\} \in E$ und $\{v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}\} \in E$.

Beispiel:



Das UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE-Problem

Definition

Das UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$

gefragt: Gibt es einen Hamilton-Kreis in G?

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE

Satz

UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis

1. UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE $\in \mathcal{NP}$:
   Rate die Permutation π nichtdeterministisch.
   Prüfe, ob $\{v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}\} \in E$ für jedes i und $\{v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}\} \in E$ gilt.
   Dies kann auf einer NTM in Polynomialzeit durchgeführt werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE

Beweis (Fortsetzung)

2. UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen DIRECTED-HAMILTON-CYCLE $\leq_p$ UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE

Beweis (Fortsetzung)

2. UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen DIRECTED-HAMILTON-CYCLE $\leq_p$ UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE.

   Sei f die Funktion, die aus einem gerichteten Graphen (V, E) einen ungerichteten Graphen macht, sodass

$$f(V) := \bigcup \{\{v_{in}, v, v_{out}\} \mid v \in V\}$$

$$f(E) := \{\{u_{out}, v_{in}\} \mid (u, v) \in E\} \cup \bigcup \{\{\{v_{in}, v\}, \{v, v_{out}\}\} \mid v \in V\}$$

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE

Beweis (Fortsetzung)

2. UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen DIRECTED-HAMILTON-CYCLE $\leq_p$ UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE.

   Sei f die Funktion, die aus einem gerichteten Graphen (V, E) einen ungerichteten Graphen macht, sodass

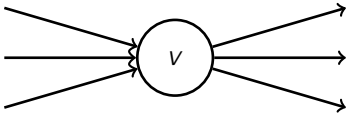
$$f(V) := \bigcup \{\{v_{in}, v, v_{out}\} \mid v \in V\}$$

$$f(E) := \{\{u_{out}, v_{in}\} \mid (u, v) \in E\} \cup \bigcup \{\{\{v_{in}, v\}, \{v, v_{out}\}\} \mid v \in V\}$$

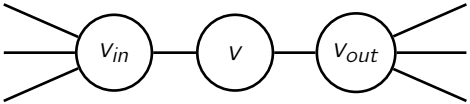
   Die Funktion f ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE

D.h. jeder Knoten v mit Ein- und Ausgängen



wird ersetzt durch



$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE

Wir zeigen: G hat einen gerichteten Hamilton-Kreis g.d.w. $f(G)$ einen ungerichteten Hamilton-Kreis hat.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE

Wir zeigen: G hat einen gerichteten Hamilton-Kreis g.d.w. $f(G)$ einen ungerichteten Hamilton-Kreis hat.

$\Longrightarrow$ Falls $v_{\pi(n)}, \ldots, v_{\pi(1)}, v_{\pi(n)}$ ein gerichteter Hamilton-Kreis ist, dann ist $v_{in,\pi(1)}, v_{\pi(1)}, v_{out,\pi(1)}, \ldots, v_{in,\pi(n)}, v_{\pi(n)}, v_{out,\pi(n)}, v_{in,\pi(1)}$ ein ungerichteter Hamilton-Kreis.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE

Wir zeigen: G hat einen gerichteten Hamilton-Kreis g.d.w.
$f(G)$ einen ungerichteten Hamilton-Kreis hat.

$\Longrightarrow$ Falls $v_{\pi(n)}, \ldots, v_{\pi(1)}, v_{\pi(n)}$ ein gerichteter Hamilton-Kreis ist,
dann ist $v_{in,\pi(1)}, v_{\pi(1)}, v_{out,\pi(1)}, \ldots, v_{in,\pi(n)}, v_{\pi(n)}, v_{out,\pi(n)}, v_{in,\pi(1)}$
ein ungerichteter Hamilton-Kreis.

$\Longleftarrow$ In $f(G)$ kann der Knoten v durch einen Hamilton-Kreis nur in einer Richtung
durchlaufen werden: von v_{in} durch v durch v_{out} oder umgekehrt.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE

Wir zeigen: G hat einen gerichteten Hamilton-Kreis g.d.w.
$f(G)$ einen ungerichteten Hamilton-Kreis hat.

$\Longrightarrow$ Falls $v_{\pi(n)}, \ldots, v_{\pi(1)}, v_{\pi(n)}$ ein gerichteter Hamilton-Kreis ist,
dann ist $v_{in,\pi(1)}, v_{\pi(1)}, v_{out,\pi(1)}, \ldots, v_{in,\pi(n)}, v_{\pi(n)}, v_{out,\pi(n)}, v_{in,\pi(1)}$
ein ungerichteter Hamilton-Kreis.

$\Longleftarrow$ In $f(G)$ kann der Knoten v durch einen Hamilton-Kreis nur in einer Richtung durchlaufen werden: von v_{in} durch v durch v_{out} oder umgekehrt.

- Falls $v_{in,\pi(1)}, v_{\pi(1)}, v_{out,\pi(1)}, \ldots, v_{in,\pi(n)}, v_{\pi(n)}, v_{out,\pi(n)}, v_{in,\pi(1)}$
ein ungerichteter Hamilton-Kreis ist,
dann ist $v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}$ ein gerichteter Hamilton-Kreis.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE

Wir zeigen: G hat einen gerichteten Hamilton-Kreis g.d.w.
$f(G)$ einen ungerichteten Hamilton-Kreis hat.

$\Longrightarrow$ Falls $v_{\pi(n)}, \ldots, v_{\pi(1)}, v_{\pi(n)}$ ein gerichteter Hamilton-Kreis ist,
dann ist $v_{in,\pi(1)}, v_{\pi(1)}, v_{out,\pi(1)}, \ldots, v_{in,\pi(n)}, v_{\pi(n)}, v_{out,\pi(n)}, v_{in,\pi(1)}$
ein ungerichteter Hamilton-Kreis.

$\Longleftarrow$ In $f(G)$ kann der Knoten v durch einen Hamilton-Kreis nur in einer Richtung durchlaufen werden: von v_{in} durch v durch v_{out} oder umgekehrt.

- Falls $v_{in,\pi(1)}, v_{\pi(1)}, v_{out,\pi(1)}, \ldots, v_{in,\pi(n)}, v_{\pi(n)}, v_{out,\pi(n)}, v_{in,\pi(1)}$
ein ungerichteter Hamilton-Kreis ist,
dann ist $v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}$ ein gerichteter Hamilton-Kreis.
- Falls $v_{out,\pi(1)}, v_{\pi(1)}, v_{in,\pi(1)}, \ldots, v_{out,\pi(n)}, v_{\pi(n)}, v_{in,\pi(n)}, v_{out,\pi(1)}$
ein ungerichteter Hamilton-Kreis ist,
dann ist $v_{\pi(n)}, \ldots, v_{\pi(1)}, v_{\pi(n)}$ ein gerichteter Hamilton-Kreis. $\square$

Das TRAVELING-SALESPERSON-Problem

Definition

Das TRAVELING-SALESPERSON-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: eine Menge von Knoten (Städten) $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$,
eine $(n \times n)$-Matrix $(M_{i,j})$ mit Entfernungen $M_{i,j} \in \mathbb{N}$ zwischen den Städten v_i und v_j, sowie
eine Zahl $k \in \mathbb{N}$

gefragt: Gibt es eine Rundreise, die alle Städte besucht, der Startort gleich dem Zielort ist, und nicht länger als k ist?
Formal: Gibt es eine Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, sodass $(\sum_{i=1}^{n-1} M_{\pi(i),\pi(i+1)}) + M_{\pi(n),\pi(1)} \leq k$?

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von TRAVELING-SALESPERSON

Satz

Das TRAVELING-SALESPERSON-Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von TRAVELING-SALESPERSON

Satz

Das TRAVELING-SALESPERSON-Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis

- TRAVELING-SALESPERSON $\in \mathcal{NP}$:
  Rate die Permutation π nichtdeterministisch.
  Prüfe, ob $(\sum_{i=1}^{n-1} M_{\pi(i),\pi(i+1)}) + M_{\pi(n),\pi(1)} \leq k$ gilt.
  Dies kann auf einer NTM in Polynomialzeit durchgeführt werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von TRAVELING-SALESPERSON

Beweis (Fortsetzung)

- TRAVELING-SALESPERSON ist $\mathcal{NP}$-schwer:
  Wir zeigen UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE $\leq_p$ TRAVELING-SALESPERSON.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von TRAVELING-SALESPERSON

Beweis (Fortsetzung)

- TRAVELING-SALESPERSON ist $\mathcal{NP}$-schwer:
  Wir zeigen UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE $\leq_p$ TRAVELING-SALESPERSON.
  Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$. Dann sei $f(G) = (V, (M_{i,j}, n))$ mit

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{i,j\} \in E \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von TRAVELING-SALESPERSON

Beweis (Fortsetzung)

- TRAVELING-SALESPERSON ist $\mathcal{NP}$-schwer:
  Wir zeigen UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE $\leq_p$ TRAVELING-SALESPERSON.
  Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$. Dann sei $f(G) = (V, (M_{i,j}, n))$ mit

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{i,j\} \in E \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

  Die Funktion f ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von TRAVELING-SALESPERSON

Beweis (Fortsetzung)

- TRAVELING-SALESPERSON ist $\mathcal{NP}$-schwer:
  Wir zeigen UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE $\leq_p$ TRAVELING-SALESPERSON.
  Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$. Dann sei $f(G) = (V, (M_{i,j}, n))$ mit

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{i,j\} \in E \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

  Die Funktion f ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.
  Wir zeigen: G hat einen Hamilton-Kreis g.d.w.
  $f(G)$ eine Rundreise der Länge n hat.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von TRAVELING-SALESPERSON

Beweis (Fortsetzung)

- TRAVELING-SALESPERSON ist $\mathcal{NP}$-schwer:
  Wir zeigen UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE $\leq_p$ TRAVELING-SALESPERSON.
  Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$. Dann sei $f(G) = (V, (M_{i,j}, n))$ mit

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{i,j\} \in E \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

  Die Funktion f ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.
  Wir zeigen: G hat einen Hamilton-Kreis g.d.w.
  $f(G)$ eine Rundreise der Länge n hat.
  $\Longrightarrow$ Wenn G einen Hamilton-Kreis hat, dann ist das eine Rundreise der Länge n.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von TRAVELING-SALESPERSON

Beweis (Fortsetzung)

- TRAVELING-SALESPERSON ist $\mathcal{NP}$-schwer:
  Wir zeigen UNDIRECTED-HAMILTON-CYCLE $\leq_p$ TRAVELING-SALESPERSON.
  Sei $G = (V, E)$ mit $V = \{1, \ldots, n\}$. Dann sei $f(G) = (V, (M_{i,j}, n))$ mit

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{i,j\} \in E \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

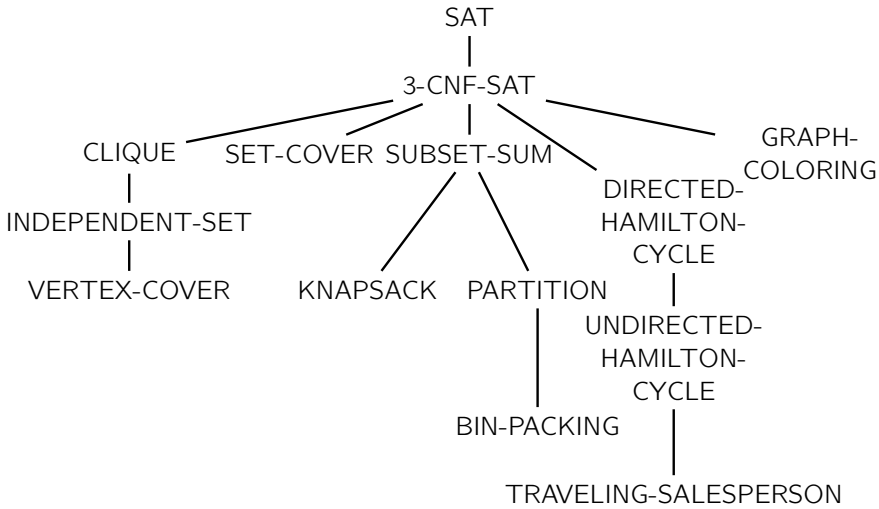
  Die Funktion f ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

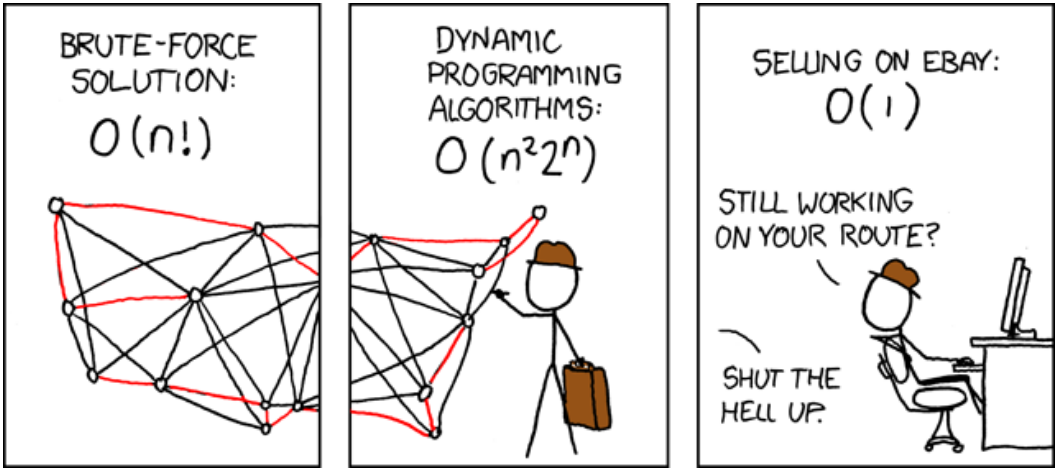
  Wir zeigen: G hat einen Hamilton-Kreis g.d.w. $f(G)$ eine Rundreise der Länge n hat.

  $\Longrightarrow$ Wenn G einen Hamilton-Kreis hat, dann ist das eine Rundreise der Länge n.

  $\Longleftarrow$ Wenn $f(G)$ eine Rundreise der Länge $\leq n$ hat, dann muss die Länge genau n sein, und es können nur Kanten mit Entfernung 1 verwendet werden.
  Daher hat G einen Hamilton-Kreis. □

Zusammenfassung der $\mathcal{NP}$-Vollständigkeitsbeweise




BRUTE-FORCE SOLUTION:
O(n!)
DYNAMIC PROGRAMMING ALGORITHMS:
O(n²2ⁿ)
SELLING ON EBAY:
O(1)
STILL WORKING ON YOUR ROUTE?
SHUT THE HELL UP.

xkcd.com/399/