13a

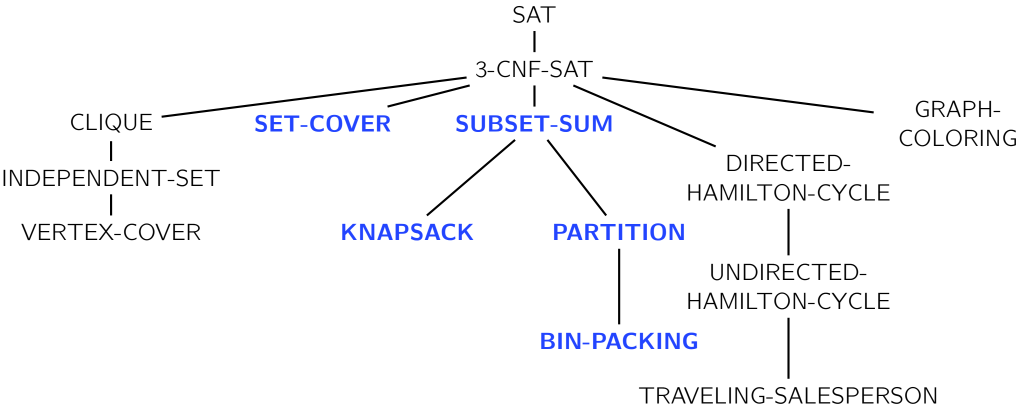
$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SET-COVER, SUBSET-SUM, KNAPSACK, PARTITION und BIN-PACKING

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 16. Juli 2024
Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel

Überblick über $\mathcal{NP}$-Vollständigkeitsbeweise



Das SET-COVER-Problem

Definition

Das SET-COVER-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: Mengen $T_1, \ldots, T_k$ mit $T_1, \ldots, T_k \subseteq M$,
wobei M eine endliche Grundmenge ist, und
eine Zahl $n \leq k$

gefragt: Gibt es eine Auswahl von n Mengen $T_{i_1}, \ldots, T_{i_n}$ ($i_j \in \{1, \ldots, k\}$) mit $T_{i_1} \cup \cdots \cup T_{i_n} = M$?

Das SET-COVER-Problem

Definition

Das SET-COVER-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: Mengen $T_1, \ldots, T_k$ mit $T_1, \ldots, T_k \subseteq M$,
wobei M eine endliche Grundmenge ist, und
eine Zahl $n \leq k$

gefragt: Gibt es eine Auswahl von n Mengen $T_{i_1}, \ldots, T_{i_n}$ $(i_j \in \{1, \ldots, k\})$ mit
$T_{i_1} \cup \cdots \cup T_{i_n} = M$?

Beispiel:

Gegeben seien $T_1 = \{1, 2, 3, 5\}, T_2 = \{1, 2\}, T_3 = \{3, 4\}, T_4 = \{3\}$ mit
$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $n = 2$.

Das SET-COVER-Problem

Definition

Das SET-COVER-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: Mengen $T_1, \ldots, T_k$ mit $T_1, \ldots, T_k \subseteq M$,
wobei M eine endliche Grundmenge ist, und
eine Zahl $n \leq k$

gefragt: Gibt es eine Auswahl von n Mengen $T_{i_1}, \ldots, T_{i_n}$ $(i_j \in \{1, \ldots, k\})$ mit $T_{i_1} \cup \cdots \cup T_{i_n} = M$?

Beispiel:

Gegeben seien $T_1 = \{1, 2, 3, 5\}, T_2 = \{1, 2\}, T_3 = \{3, 4\}, T_4 = \{3\}$ mit $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $n = 2$.

Lösung: T_1, T_3, da $T_1 \cup T_3 = M$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SET-COVER

Satz

SET-COVER ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SET-COVER

Satz

SET-COVER ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis

1. SET-COVER $\in \mathcal{NP}$:
   Rate nichtdeterministisch die n Mengen $T_{i_1}, \ldots, T_{i_n}$.
   Verifiziere deterministisch, ob $T_{i_1} \cup \cdots \cup T_{i_n} = M$ gilt.
   Daher kann SET-COVER in Polynomialzeit auf einer NTM entschieden werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SET-COVER

Beweis (Fortsetzung)

2. SET-COVER ist $\mathcal{NP}$-schwer, erster Versuch:
   Wir zeigen 3-CNF-SAT $\leq_p$ SET-COVER.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SET-COVER

Beweis (Fortsetzung)

2. SET-COVER ist $\mathcal{NP}$-schwer, erster Versuch:
   Wir zeigen 3-CNF-SAT $\leq_p$ SET-COVER.
   Sei $F = K_1 \wedge \cdots \wedge K_m$ eine 3-CNF.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SET-COVER

Beweis (Fortsetzung)

2. SET-COVER ist $\mathcal{NP}$-schwer, erster Versuch:
   Wir zeigen 3-CNF-SAT $\leq_p$ SET-COVER.
   Sei $F = K_1 \wedge \cdots \wedge K_m$ eine 3-CNF.
   Seien $x_1, \ldots, x_n$ die in F vorkommenden aussagenlogischen Variablen.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SET-COVER

Beweis (Fortsetzung)

2. SET-COVER ist $\mathcal{NP}$-schwer, erster Versuch:
   Wir zeigen 3-CNF-SAT $\leq_p$ SET-COVER.

   Sei $F = K_1 \wedge \cdots \wedge K_m$ eine 3-CNF.

   Seien $x_1, \ldots, x_n$ die in F vorkommenden aussagenlogischen Variablen.

   Setze $M := \{1, \ldots, m\}$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SET-COVER

Beweis (Fortsetzung)

2. SET-COVER ist $\mathcal{NP}$-schwer, erster Versuch:
   Wir zeigen 3-CNF-SAT $\leq_p$ SET-COVER.
   Sei $F = K_1 \wedge \cdots \wedge K_m$ eine 3-CNF.
   Seien $x_1, \ldots, x_n$ die in F vorkommenden aussagenlogischen Variablen.
   Setze $M := \{1, \ldots, m\}$.
   Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei

$$P_i := \{j \mid \text{Literal } x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\}$$
$$N_i := \{j \mid \text{Literal } \neg x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\}$$

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SET-COVER

Beweis (Fortsetzung)

2. SET-COVER ist $\mathcal{NP}$-schwer, erster Versuch:
   Wir zeigen 3-CNF-SAT $\leq_p$ SET-COVER.

   Sei $F = K_1 \wedge \cdots \wedge K_m$ eine 3-CNF.

   Seien $x_1, \ldots, x_n$ die in F vorkommenden aussagenlogischen Variablen.

   Setze $M := \{1, \ldots, m\}$.

   Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei

   $$\begin{aligned} P_i &:= \{j \mid \text{Literal } x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \\ N_i &:= \{j \mid \text{Literal } \neg x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \end{aligned}$$

   Das Mengensystem sei $P_1, \ldots, P_n, N_1, \ldots, N_n \subseteq M$.
   Gesucht wird eine Vereinigung von n Mengen.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SET-COVER

Beweis (Fortsetzung)

2. SET-COVER ist $\mathcal{NP}$-schwer, erster Versuch:
   Wir zeigen 3-CNF-SAT $\leq_p$ SET-COVER.

   Sei $F = K_1 \wedge \cdots \wedge K_m$ eine 3-CNF.

   Seien $x_1, \ldots, x_n$ die in F vorkommenden aussagenlogischen Variablen.

   Setze $M := \{1, \ldots, m\}$.

   Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei

$$P_i := \{j \mid \text{Literal } x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\}$$
$$N_i := \{j \mid \text{Literal } \neg x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\}$$

   Das Mengensystem sei $P_1, \ldots, P_n, N_1, \ldots, N_n \subseteq M$.
   Gesucht wird eine Vereinigung von n Mengen.

   Grundgedanke: Wenn P_i bzw. N_i gewählt wird, dann werden die Klauseln, die das Literal enthalten, erfüllt. Das Ziel ist, alle m Klauseln zu erfüllen.

Beispiel für den ersten Versuch

3-CNF:

$$(x_1 \lor x_2 \lor x_3) \land (x_1 \lor \neg x_2) \land (\neg x_1 \lor \neg x_2 \lor x_3)$$

Beispiel für den ersten Versuch

3-CNF:

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$

SET-COVER-Instanz dazu:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \{j \mid x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} &&= \{1,2\}\\
N_1 &= \{j \mid \neg x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} &&= \{3\}\\
P_2 &= \{j \mid x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} &&= \{1\}\\
N_2 &= \{j \mid \neg x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} &&= \{2,3\}\\
P_3 &= \{j \mid x_3 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} &&= \{1,3\}\\
N_3 &= \{j \mid \neg x_3 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} &&= \emptyset
\end{aligned}$$

Gesucht wird eine Vereinigung von $n = 3$ Mengen U_1, U_2, U_3 mit $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = \{1, 2, 3\}$.

Beispiel für den ersten Versuch

3-CNF:

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$

SET-COVER-Instanz dazu:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \{j \mid x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} &&= \{1, 2\} \\
N_1 &= \{j \mid \neg x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} &&= \{3\} \\
P_2 &= \{j \mid x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} &&= \{1\} \\
N_2 &= \{j \mid \neg x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} &&= \{2, 3\} \\
P_3 &= \{j \mid x_3 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} &&= \{1, 3\} \\
N_3 &= \{j \mid \neg x_3 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} &&= \emptyset
\end{aligned}$$

Gesucht wird eine Vereinigung von $n = 3$ Mengen U_1, U_2, U_3 mit
$U_1 \cup U_2 \cup U_3 = \{1, 2, 3\}$.

Lösung: z.B. P_1, N_2, N_3.

Beispiel für den ersten Versuch

3-CNF:

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$

SET-COVER-Instanz dazu:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \{j \mid x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} &&= \{1,2\}\\
N_1 &= \{j \mid \neg x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} &&= \{3\}\\
P_2 &= \{j \mid x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} &&= \{1\}\\
N_2 &= \{j \mid \neg x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} &&= \{2,3\}\\
P_3 &= \{j \mid x_3 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} &&= \{1,3\}\\
N_3 &= \{j \mid \neg x_3 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} &&= \emptyset
\end{aligned}$$

Gesucht wird eine Vereinigung von $n = 3$ Mengen U_1, U_2, U_3 mit $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = \{1, 2, 3\}$.

Lösung: z.B. P_1, N_2, N_3.

Belegung dazu: $I(x_1) = 1, I(x_2) = 0, I(x_3) = 0$.

Weiteres Beispiel für den ersten Versuch

3-CNF:

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$$

Weiteres Beispiel für den ersten Versuch

3-CNF:

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$$

SET-COVER-Instanz dazu:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \{j \mid x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+1\} &&= \{1,3\} \\
N_1 &= \{j \mid \neg x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+1\} &&= \{2,4\} \\
P_2 &= \{j \mid x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+2\} &&= \{1,4\} \\
N_2 &= \{j \mid \neg x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+2\} &&= \{2,3\}
\end{aligned}$$

Gesucht wird eine Vereinigung von $n = 2$ Mengen U_1, U_2 mit $U_1 \cup U_2 = \{1,2,3,4\}$.

Lösung: z.B. P_1, N_1.

Weiteres Beispiel für den ersten Versuch

3-CNF:

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$$

SET-COVER-Instanz dazu:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \{j \mid x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+1\} &= \{1,3\}\\
N_1 &= \{j \mid \neg x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+1\} &= \{2,4\}\\
P_2 &= \{j \mid x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+2\} &= \{1,4\}\\
N_2 &= \{j \mid \neg x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+2\} &= \{2,3\}
\end{aligned}$$

Gesucht wird eine Vereinigung von $n = 2$ Mengen U_1, U_2 mit $U_1 \cup U_2 = \{1,2,3,4\}$.

Lösung: z.B. P_1, N_1.

Aber diese Lösung entspricht keiner gültigen Belegung.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SET-COVER

Beweis (Fortsetzung)

2. SET-COVER ist $\mathcal{NP}$-schwer, zweiter Versuch:

   Wir zeigen 3-CNF-SAT $\leq_p$ SET-COVER.

   Sei $F = K_1 \wedge \cdots \wedge K_m$ eine 3-CNF.

   Seien $x_1, \ldots, x_n$ die in F vorkommenden aussagenlogischen Variablen.

   Setze $M := \{1, \ldots, m + n\}$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SET-COVER

Beweis (Fortsetzung)

2. SET-COVER ist $\mathcal{NP}$-schwer, zweiter Versuch:

   Wir zeigen 3-CNF-SAT $\leq_p$ SET-COVER.

   Sei $F = K_1 \wedge \cdots \wedge K_m$ eine 3-CNF.

   Seien $x_1, \ldots, x_n$ die in F vorkommenden aussagenlogischen Variablen.

   Setze $M := \{1, \ldots, m + n\}$.

   Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei

$$P_i := \{j \mid \text{Literal } x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m + i\}$$
$$N_i := \{j \mid \text{Literal } \neg x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m + i\}$$

   Das Mengensystem sei $P_1, \ldots, P_n, N_1, \ldots, N_n \subseteq M$.
   Gesucht wird eine Vereinigung von n Mengen.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SET-COVER

Beweis (Fortsetzung)

2. SET-COVER ist $\mathcal{NP}$-schwer, zweiter Versuch:
   Wir zeigen 3-CNF-SAT $\leq_p$ SET-COVER.

   Sei $F = K_1 \wedge \cdots \wedge K_m$ eine 3-CNF.

   Seien $x_1, \ldots, x_n$ die in F vorkommenden aussagenlogischen Variablen.

   Setze $M := \{1, \ldots, m + n\}$.

   Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei

$$P_i := \{j \mid \text{Literal } x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m + i\}$$
$$N_i := \{j \mid \text{Literal } \neg x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m + i\}$$

   Das Mengensystem sei $P_1, \ldots, P_n, N_1, \ldots, N_n \subseteq M$.
   Gesucht wird eine Vereinigung von n Mengen.

   Grundgedanke: Für jedes i muss mindestens (und daher höchstens) eins von P_i, N_i gewählt werden.

Beispiel für den zweiten Versuch

3-CNF:

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$

Beispiel für den zweiten Versuch

3-CNF:

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$

SET-COVER-Instanz dazu:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \{j \mid x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+1\} &&= \{1,2,4\} \\
N_1 &= \{j \mid \neg x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+1\} &&= \{3,4\} \\
P_2 &= \{j \mid x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+2\} &&= \{1,5\} \\
N_2 &= \{j \mid \neg x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+2\} &&= \{2,3,5\} \\
P_3 &= \{j \mid x_3 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+3\} &&= \{1,3,6\} \\
N_3 &= \{j \mid \neg x_3 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+3\} &&= \{6\}
\end{aligned}$$

Beispiel für den zweiten Versuch

3-CNF:

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$

SET-COVER-Instanz dazu:

$P_1 = \{j \mid x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+1\} = \{1,2,4\}$
$N_1 = \{j \mid \neg x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+1\} = \{3,4\}$
$P_2 = \{j \mid x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+2\} = \{1,5\}$
$N_2 = \{j \mid \neg x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+2\} = \{2,3,5\}$
$P_3 = \{j \mid x_3 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+3\} = \{1,3,6\}$
$N_3 = \{j \mid \neg x_3 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+3\} = \{6\}$

Gesucht wird eine Vereinigung von $n = 3$ Mengen U_1, U_2, U_3 mit
$U_1 \cup U_2 \cup U_3 = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Beispiel für den zweiten Versuch

3-CNF:

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$

SET-COVER-Instanz dazu:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \{j \mid x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+1\} &= \{1,2,4\} \\
N_1 &= \{j \mid \neg x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+1\} &= \{3,4\} \\
P_2 &= \{j \mid x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+2\} &= \{1,5\} \\
N_2 &= \{j \mid \neg x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+2\} &= \{2,3,5\} \\
P_3 &= \{j \mid x_3 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+3\} &= \{1,3,6\} \\
N_3 &= \{j \mid \neg x_3 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+3\} &= \{6\}
\end{aligned}$$

Gesucht wird eine Vereinigung von $n = 3$ Mengen U_1, U_2, U_3 mit $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Lösung: z.B. P_1, N_2, N_3.

Beispiel für den zweiten Versuch

3-CNF:

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$

SET-COVER-Instanz dazu:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \{j \mid x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+1\} &&= \{1,2,4\}\\
N_1 &= \{j \mid \neg x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+1\} &&= \{3,4\}\\
P_2 &= \{j \mid x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+2\} &&= \{1,5\}\\
N_2 &= \{j \mid \neg x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+2\} &&= \{2,3,5\}\\
P_3 &= \{j \mid x_3 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+3\} &&= \{1,3,6\}\\
N_3 &= \{j \mid \neg x_3 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+3\} &&= \{6\}
\end{aligned}$$

Gesucht wird eine Vereinigung von $n = 3$ Mengen U_1, U_2, U_3 mit $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Lösung: z.B. P_1, N_2, N_3.

Belegung dazu: $I(x_1) = 1, I(x_2) = 0, I(x_3) = 0$.

Weiteres Beispiel für den zweiten Versuch

3-CNF:

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$$

Weiteres Beispiel für den zweiten Versuch

3-CNF:

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$$

SET-COVER-Instanz dazu:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \{j \mid x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+1\} &= \{1,3,5\}\\
N_1 &= \{j \mid \neg x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+1\} &= \{2,4,5\}\\
P_2 &= \{j \mid x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+2\} &= \{1,4,6\}\\
N_2 &= \{j \mid \neg x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+2\} &= \{2,3,6\}
\end{aligned}$$

Weiteres Beispiel für den zweiten Versuch

3-CNF:

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$$

SET-COVER-Instanz dazu:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \{j \mid x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+1\} &&= \{1,3,5\} \\
N_1 &= \{j \mid \neg x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+1\} &&= \{2,4,5\} \\
P_2 &= \{j \mid x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+2\} &&= \{1,4,6\} \\
N_2 &= \{j \mid \neg x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+2\} &&= \{2,3,6\}
\end{aligned}$$

Gesucht wird eine Vereinigung von $n = 2$ Mengen U_1, U_2 mit
$U_1 \cup U_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Weiteres Beispiel für den zweiten Versuch

3-CNF:

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$$

SET-COVER-Instanz dazu:

$$\begin{aligned}
P_1 &= \{j \mid x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+1\} &&= \{1,3,5\} \\
N_1 &= \{j \mid \neg x_1 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+1\} &&= \{2,4,5\} \\
P_2 &= \{j \mid x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+2\} &&= \{1,4,6\} \\
N_2 &= \{j \mid \neg x_2 \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+2\} &&= \{2,3,6\}
\end{aligned}$$

Gesucht wird eine Vereinigung von $n = 2$ Mengen U_1, U_2 mit $U_1 \cup U_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Es gibt keine Lösung aber auch keine Belegung für die 3-CNF.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SET-COVER

Beweis (Fortsetzung)

Zur Erinnerung:

$$P_i := \{j \mid \text{Literal } x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\}$$
$$N_i := \{j \mid \text{Literal } \neg x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\}$$

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SET-COVER

Beweis (Fortsetzung)

Zur Erinnerung:

$$P_i := \{j \mid \text{Literal } x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\}$$
$$N_i := \{j \mid \text{Literal } \neg x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\}$$

Die Reduktionsfunktion ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SET-COVER

Beweis (Fortsetzung)

Zur Erinnerung:

$$P_i := \{j \mid \text{Literal } x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\}$$
$$N_i := \{j \mid \text{Literal } \neg x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\}$$

Die Reduktionsfunktion ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

Zu zeigen: F ist erfüllbar g.d.w. es eine Vereinigung von n Mengen $U_1, \ldots, U_n \in \{P_1, N_1, \ldots, P_n, N_n\}$ gibt, sodass $U_1 \cup \cdots \cup U_n = M$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SET-COVER

Beweis (Fortsetzung)

Zur Erinnerung:

$$P_i := \{j \mid \text{Literal } x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\}$$
$$N_i := \{j \mid \text{Literal } \neg x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\}$$

Die Reduktionsfunktion ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

Zu zeigen: F ist erfüllbar g.d.w. es eine Vereinigung von n Mengen $U_1, \dots, U_n \in \{P_1, N_1, \dots, P_n, N_n\}$ gibt, sodass $U_1 \cup \dots \cup U_n = M$.

$\Longrightarrow$ Wenn F erfüllbar ist, gibt es eine Belegung I mit $I(F) = 1$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SET-COVER

Beweis (Fortsetzung)

Zur Erinnerung:

$$P_i := \{j \mid \text{Literal } x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\}$$
$$N_i := \{j \mid \text{Literal } \neg x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\}$$

Die Reduktionsfunktion ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

Zu zeigen: F ist erfüllbar g.d.w. es eine Vereinigung von n Mengen $U_1, \dots, U_n \in \{P_1, N_1, \dots, P_n, N_n\}$ gibt, sodass $U_1 \cup \dots \cup U_n = M$.

$\Longrightarrow$ Wenn F erfüllbar ist, gibt es eine Belegung I mit $I(F) = 1$.

Wenn $I(x_i) = 1$, dann wähle P_i, sonst wähle N_i. Dies ergibt n gewählte Mengen.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SET-COVER

Beweis (Fortsetzung)

Zur Erinnerung:

$$P_i := \{j \mid \text{Literal } x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\}$$
$$N_i := \{j \mid \text{Literal } \neg x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\}$$

Die Reduktionsfunktion ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

Zu zeigen: F ist erfüllbar g.d.w. es eine Vereinigung von n Mengen $U_1, \ldots, U_n \in \{P_1, N_1, \ldots, P_n, N_n\}$ gibt, sodass $U_1 \cup \cdots \cup U_n = M$.

$\Longrightarrow$ Wenn F erfüllbar ist, gibt es eine Belegung I mit $I(F) = 1$.

Wenn $I(x_i) = 1$, dann wähle P_i, sonst wähle N_i. Dies ergibt n gewählte Mengen.

Jede Zahl aus M kommt vor:

- Da jede Klausel durch I erfüllt ist, kommen alle $1, \ldots, m$ vor.
- Da jede Variable x_i mit 0 oder 1 belegt wird, kommen alle $m+1, \ldots, m+n$ vor.

Die Vereinigung der n Mengen ergibt daher M.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SET-COVER

Beweis (Fortsetzung)

Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} P_i &:= \{j \mid \text{Literal } x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\} \\ N_i &:= \{j \mid \text{Literal } \neg x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\} \end{aligned}$$

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SET-COVER

Beweis (Fortsetzung)

Zur Erinnerung:

$$P_i := \{j \mid \text{Literal } x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\}$$
$$N_i := \{j \mid \text{Literal } \neg x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\}$$

Zu zeigen: F ist erfüllbar g.d.w. es eine Vereinigung von n Mengen $U_1, \ldots, U_n \in \{P_1, N_1, \ldots, P_n, N_n\}$ gibt, sodass $U_1 \cup \cdots \cup U_n = M$.

$\Longleftarrow$ Seien $U_1, \ldots, U_n \in \{P_1, N_1, \ldots, P_n, N_n\}$ mit $U_1 \cup \cdots \cup U_n = M$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SET-COVER

Beweis (Fortsetzung)

Zur Erinnerung:

$$P_i := \{j \mid \text{Literal } x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\}$$
$$N_i := \{j \mid \text{Literal } \neg x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\}$$

Zu zeigen: F ist erfüllbar g.d.w. es eine Vereinigung von n Mengen $U_1, \ldots, U_n \in \{P_1, N_1, \ldots, P_n, N_n\}$ gibt, sodass $U_1 \cup \cdots \cup U_n = M$.

$\Longleftarrow$ Seien $U_1, \ldots, U_n \in \{P_1, N_1, \ldots, P_n, N_n\}$ mit $U_1 \cup \cdots \cup U_n = M$.

Da $m+1, \ldots, m+n$ in der Vereinigung sind, muss für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ genau entweder P_i oder N_i in der Vereinigung sein. O.B.d.A. $U_i \in \{P_i, N_i\}$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SET-COVER

Beweis (Fortsetzung)

Zur Erinnerung:

$$P_i := \{j \mid \text{Literal } x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\}$$
$$N_i := \{j \mid \text{Literal } \neg x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\}$$

Zu zeigen: F ist erfüllbar g.d.w. es eine Vereinigung von n Mengen $U_1, \dots, U_n \in \{P_1, N_1, \dots, P_n, N_n\}$ gibt, sodass $U_1 \cup \dots \cup U_n = M$.

$\Longleftarrow$ Seien $U_1, \dots, U_n \in \{P_1, N_1, \dots, P_n, N_n\}$ mit $U_1 \cup \dots \cup U_n = M$.

Da $m+1, \dots, m+n$ in der Vereinigung sind, muss für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ genau entweder P_i oder N_i in der Vereinigung sein. O.B.d.A. $U_i \in \{P_i, N_i\}$.

Setze $I(x_i) = 1$ wenn $U_i = P_i$ und $I(x_i) = 0$ wenn $U_i = N_i$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von SET-COVER

Beweis (Fortsetzung)

Zur Erinnerung:

$$P_i := \{j \mid \text{Literal } x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\}$$
$$N_i := \{j \mid \text{Literal } \neg x_i \text{ kommt in Klausel } K_j \text{ vor}\} \cup \{m+i\}$$

Zu zeigen: F ist erfüllbar g.d.w. es eine Vereinigung von n Mengen $U_1, \ldots, U_n \in \{P_1, N_1, \ldots, P_n, N_n\}$ gibt, sodass $U_1 \cup \cdots \cup U_n = M$.

$\Longleftarrow$ Seien $U_1, \ldots, U_n \in \{P_1, N_1, \ldots, P_n, N_n\}$ mit $U_1 \cup \cdots \cup U_n = M$.

Da $m+1, \ldots, m+n$ in der Vereinigung sind, muss für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ genau entweder P_i oder N_i in der Vereinigung sein. O.B.d.A. $U_i \in \{P_i, N_i\}$.

Setze $I(x_i) = 1$ wenn $U_i = P_i$ und $I(x_i) = 0$ wenn $U_i = N_i$.

Da $1, \ldots, m$ in der Vereinigung sind, wird in jeder Klausel ein Literal durch I wahr gemacht. Daher ist F erfüllbar. □

Das SUBSET-SUM-Problem

Definition

Das SUBSET-SUM-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{N}$

gefragt: Gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$, sodass $\sum_{i \in I} a_i = s$?

Das SUBSET-SUM-Problem

Definition

Das SUBSET-SUM-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{N}$

gefragt: Gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$, sodass $\sum_{i \in I} a_i = s$?

Beispiel:

Gegeben seien $a_1, \ldots, a_6 = 1, 21, 5, 16, 12, 19$ und $s = 49$.

Das SUBSET-SUM-Problem

Definition

Das SUBSET-SUM-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{N}$

gefragt: Gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$, sodass $\sum_{i \in I} a_i = s$?

Beispiel:

Gegeben seien $a_1, \ldots, a_6 = 1, 21, 5, 16, 12, 19$ und $s = 49$.

Lösung: $2, 4, 5,$ da $21 + 16 + 12 = 49$.

Das SUBSET-SUM-Problem

Definition

Das SUBSET-SUM-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{N}$

gefragt: Gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$, sodass $\sum_{i \in I} a_i = s$?

Beispiel:

Gegeben seien $a_1, \ldots, a_6 = 1, 21, 5, 16, 12, 19$ und $s = 49$.

Lösung: $2, 4, 5$, da $21 + 16 + 12 = 49$.

Satz

Das SUBSET-SUM-Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Das SUBSET-SUM-Problem

Definition

Das SUBSET-SUM-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{N}$

gefragt: Gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$, sodass $\sum_{i \in I} a_i = s$?

Beispiel:

Gegeben seien $a_1, \ldots, a_6 = 1, 21, 5, 16, 12, 19$ und $s = 49$.

Lösung: $2, 4, 5,$ da $21 + 16 + 12 = 49$.

Satz

Das SUBSET-SUM-Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis Siehe Skript. $\square$

Das KNAPSACK-Problem

Definition

Das KNAPSACK-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: k Gegenstände mit Gewichten $w_1, \dots, w_k \in \mathbb{N}$ und
Nutzenwerten $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$,
sowie zwei Schwellenwerte $s_w, s_n \in \mathbb{N}$

gefragt: Gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, k\}$, sodass $\sum_{i \in I} w_i \leq s_w$ und $\sum_{i \in I} n_i \geq s_n$?

Das KNAPSACK-Problem

Definition

Das KNAPSACK-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: k Gegenstände mit Gewichten $w_1, \ldots, w_k \in \mathbb{N}$ und
Nutzenwerten $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$,
sowie zwei Schwellenwerte $s_w, s_n \in \mathbb{N}$

gefragt: Gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$, sodass $\sum_{i \in I} w_i \leq s_w$ und $\sum_{i \in I} n_i \geq s_n$?

Beachte: Für $w_i = n_i$ und $s_n = s_w$ ergibt sich genau das SUBSET-SUM-Problem.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von KNAPSACK

Satz

KNAPSACK ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von KNAPSACK

Satz

KNAPSACK ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis

1. KNAPSACK $\in \mathcal{NP}$:
   Rate eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ nichtdeterministisch.
   Prüfe deterministisch, ob $\sum_{i \in I} w_i \leq s_w$ und $\sum_{i \in I} n_i \geq s_n$.
   Daher kann KNAPSACK in Polynomialzeit auf einer NTM entschieden werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von KNAPSACK

Beweis (Fortsetzung)

2. KNAPSACK ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen SUBSET-SUM $\leq_p$ KNAPSACK.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von KNAPSACK

Beweis (Fortsetzung)

2. KNAPSACK ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen SUBSET-SUM $\leq_p$ KNAPSACK.
   Sei $((a_1, \ldots, a_k), s)$ eine SUBSET-SUM-Instanz.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von KNAPSACK

Beweis (Fortsetzung)

2. KNAPSACK ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen SUBSET-SUM $\leq_p$ KNAPSACK.

   Sei $((a_1, \ldots, a_k), s)$ eine SUBSET-SUM-Instanz.

   Sei $f((a_1, \ldots, a_k), s) = ((w_1, \ldots, w_k), (n_1, \ldots, n_k), s_w, s_m)$ mit $w_i = a_i, n_i = a_i$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$ und $s_w = s$ und $s_m = s$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von KNAPSACK

Beweis (Fortsetzung)

2. KNAPSACK ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen SUBSET-SUM $\leq_p$ KNAPSACK.

   Sei $((a_1, \ldots, a_k), s)$ eine SUBSET-SUM-Instanz.

   Sei $f((a_1, \ldots, a_k), s) = ((w_1, \ldots, w_k), (n_1, \ldots, n_k), s_w, s_m)$ mit $w_i = a_i, n_i = a_i$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$ und $s_w = s$ und $s_m = s$.

   f ist in polynomieller Zeit von einer DTM berechenbar.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von KNAPSACK

Beweis (Fortsetzung)

2. KNAPSACK ist $\mathcal{NP}$-schwer:

   Wir zeigen SUBSET-SUM $\leq_p$ KNAPSACK.

   Sei $((a_1, \ldots, a_k), s)$ eine SUBSET-SUM-Instanz.

   Sei $f((a_1, \ldots, a_k), s) = ((w_1, \ldots, w_k), (n_1, \ldots, n_k), s_w, s_m)$ mit $w_i = a_i, n_i = a_i$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$ und $s_w = s$ und $s_m = s$.

   f ist in polynomieller Zeit von einer DTM berechenbar.

   $((a_1, \ldots, a_k), s)$ ist SUBSET-SUM-lösbar g.d.w. $f((a_1, \ldots, a_k), s)$ KNAPSACK-lösbar ist. $\square$

Das PARTITION-Problem

Definition

Das PARTITION-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$

gefragt: Gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$, sodass $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in \{1,\ldots,k\} \setminus I} a_i$?

Das PARTITION-Problem

Definition

Das PARTITION-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: natürliche Zahlen $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$

gefragt: Gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, k\}$, sodass $\sum\limits_{i \in I} a_i = \sum\limits_{i \in \{1,\dots,k\} \setminus I} a_i$?

Beispiel:

Gegeben seien $k = 4$ und $a_1, \dots, a_4 = 7, 2, 8, 13$.

Das PARTITION-Problem

Definition

Das PARTITION-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$

gefragt: Gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$, sodass $\sum\limits_{i \in I} a_i = \sum\limits_{i \in \{1,\ldots,k\} \setminus I} a_i$?

Beispiel:

Gegeben seien $k = 4$ und $a_1, \ldots, a_4 = 7, 2, 8, 13$.

Lösung: z.B. $I = \{1, 3\}$, da $\sum\limits_{i \in \{1\,3\}} a_i = 15 = \sum\limits_{i \in \{2,4\}} a_i$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von PARTITION

Satz

PARTITION ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von PARTITION

Satz

PARTITION ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis

1. PARTITION $\in \mathcal{NP}$:
   Rate nichtdeterministisch $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$.
   Prüfe deterministisch, ob $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in \{1,\ldots,k\} \setminus I} a_i$.
   Daher kann PARTITION in Polynomialzeit auf einer NTM entschieden werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von PARTITION

Beweis (Fortsetzung)

2. PARTITION ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen SUBSET-SUM $\leq_p$ PARTITION.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von PARTITION

Beweis (Fortsetzung)

2. PARTITION ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen SUBSET-SUM $\leq_p$ PARTITION.

   Sei $f((a_1, \ldots, a_k), s) = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2})$ mit $a_{k+1} = A + s$ und $a_{k+2} = 2A - s$, wobei $A = \sum_{i=1}^{k} a_i$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von PARTITION

Beweis (Fortsetzung)

2. PARTITION ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen SUBSET-SUM $\leq_p$ PARTITION.

   Sei $f((a_1, \ldots, a_k), s) = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2})$ mit $a_{k+1} = A + s$ und $a_{k+2} = 2A - s$, wobei $A = \sum_{i=1}^{k} a_i$.

   Beachte: $\sum_{i=1}^{k+2} a_i = 4A$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von PARTITION

Beweis (Fortsetzung)

2. PARTITION ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen SUBSET-SUM $\leq_p$ PARTITION.
   Sei $f((a_1, \ldots, a_k), s) = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2})$ mit $a_{k+1} = A + s$ und $a_{k+2} = 2A - s$, wobei $A = \sum_{i=1}^{k} a_i$.
   Beachte: $\sum_{i=1}^{k+2} a_i = 4A$.
   Die Funktion f ist total und kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Beispiel für die SUBSET-SUM-Instanzkonstruktion

SUBSET-SUM-Instanz:

$$((1, 2, 3, 4, 5, 6), 14)$$

Beispiel für die SUBSET-SUM-Instanzkonstruktion

SUBSET-SUM-Instanz:

$$((1, 2, 3, 4, 5, 6), 14)$$

Wir haben $s = 14$, $A = 21$, $A + s = 35$, $2A = 42$ und $2A - s = 28$.

Beispiel für die SUBSET-SUM-Instanzkonstruktion

SUBSET-SUM-Instanz:

$$((1, 2, 3, 4, 5, 6), 14)$$

Wir haben $s = 14$, $A = 21$, $A + s = 35$, $2A = 42$ und $2A - s = 28$.

PARTITION-Instanz zur SUBSET-SUM-Instanz:

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 35, 28)$$

Beispiel für die SUBSET-SUM-Instanzkonstruktion

SUBSET-SUM-Instanz:

$$((1, 2, 3, 4, 5, 6), 14)$$

Wir haben $s = 14$, $A = 21$, $A + s = 35$, $2A = 42$ und $2A - s = 28$.

PARTITION-Instanz zur SUBSET-SUM-Instanz:

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 35, 28)$$

Lösung der PARTITION-Instanz: z.B. $I = \{1, 3, 4, 6, 8\}$,
da $1 + 3 + 4 + 6 + 28 = 42 = 2 + 5 + 35$.

Beispiel für die SUBSET-SUM-Instanzkonstruktion

SUBSET-SUM-Instanz:

$$((1, 2, 3, 4, 5, 6), 14)$$

Wir haben $s = 14$, $A = 21$, $A + s = 35$, $2A = 42$ und $2A - s = 28$.

PARTITION-Instanz zur SUBSET-SUM-Instanz:

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 35, 28)$$

Lösung der PARTITION-Instanz: z.B. $I = \{1, 3, 4, 6, 8\}$,
da $1 + 3 + 4 + 6 + 28 = 42 = 2 + 5 + 35$.

Lösung der SUBSET-SUM-Instanz: $\{1, 3, 4, 6\}$.
Tatsächlich $1 + 3 + 4 + 6 = 14$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von PARTITION

Beweis (Fortsetzung)

Wir zeigen: $((a_1, \ldots, a_k), s)$ ist SUBSET-SUM-lösbar g.d.w. $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2})$ PARTITION-lösbar ist.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von PARTITION

Beweis (Fortsetzung)

Wir zeigen: $((a_1, \ldots, a_k), s)$ ist SUBSET-SUM-lösbar g.d.w. $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2})$ PARTITION-lösbar ist.

$\Longrightarrow$ Wenn $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ eine Lösung für $((a_1, \ldots, a_k), s)$ ist, dann ist $I \cup \{k+2\}$ eine Lösung für $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2})$, weil $\sum_{I \cup \{k+2\}} a_i = s + (2A - s) = 2A$, was die Hälfte von $\sum_{i=1}^{k+2} = 4A$ ausmacht.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von PARTITION

Beweis (Fortsetzung)

Wir zeigen: $((a_1, \ldots, a_k), s)$ ist SUBSET-SUM-lösbar g.d.w. $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2})$ PARTITION-lösbar ist.

$\Longrightarrow$ Wenn $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ eine Lösung für $((a_1, \ldots, a_k), s)$ ist, dann ist $I \cup \{k+2\}$ eine Lösung für $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2})$, weil $\sum_{I \cup \{k+2\}} a_i = s + (2A - s) = 2A$, was die Hälfte von $\sum_{i=1}^{k+2} = 4A$ ausmacht.

$\Longleftarrow$ Wenn $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2})$ eine Lösung $I \subseteq \{1, \ldots, k+2\}$ hat, dann $\sum_{i \in I} a_i = 2A = \sum_{i \in \{1,\ldots,k+2\} \setminus I} a_i$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von PARTITION

Beweis (Fortsetzung)

Wir zeigen: $((a_1, \dots, a_k), s)$ ist SUBSET-SUM-lösbar g.d.w. $(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2})$ PARTITION-lösbar ist.

$\Longrightarrow$ Wenn $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ eine Lösung für $((a_1, \dots, a_k), s)$ ist, dann ist $I \cup \{k+2\}$ eine Lösung für $(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2})$, weil $\sum_{I \cup \{k+2\}} a_i = s + (2A - s) = 2A$, was die Hälfte von $\sum_{i=1}^{k+2} = 4A$ ausmacht.

$\Longleftarrow$ Wenn $(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2})$ eine Lösung $I \subseteq \{1, \dots, k+2\}$ hat, dann $\sum_{i \in I} a_i = 2A = \sum_{i \in \{1, \dots, k+2\} \setminus I} a_i$.

$k+1$ und $k+2$ können nicht gleichzeitig in I sein, da sonst die Summe zu groß ist.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von PARTITION

Beweis (Fortsetzung)

Wir zeigen: $((a_1, \ldots, a_k), s)$ ist SUBSET-SUM-lösbar g.d.w. $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2})$ PARTITION-lösbar ist.

$\Longrightarrow$ Wenn $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ eine Lösung für $((a_1, \ldots, a_k), s)$ ist, dann ist $I \cup \{k+2\}$ eine Lösung für $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2})$, weil $\sum_{I \cup \{k+2\}} a_i = s + (2A - s) = 2A$, was die Hälfte von $\sum_{i=1}^{k+2} = 4A$ ausmacht.

$\Longleftarrow$ Wenn $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2})$ eine Lösung $I \subseteq \{1, \ldots, k+2\}$ hat, dann $\sum_{i \in I} a_i = 2A = \sum_{i \in \{1,\ldots,k+2\} \setminus I} a_i$.

$k+1$ und $k+2$ können nicht gleichzeitig in I sein, da sonst die Summe zu groß ist.

- Wenn $k+2 \in I$, dann $I' = I \setminus \{k+2\}$.
- Wenn $k+1 \in I$, dann $I' = (\{1, \ldots, k+2\} \setminus I) \setminus \{k+2\}$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von PARTITION

Beweis (Fortsetzung)

Wir zeigen: $((a_1, \ldots, a_k), s)$ ist SUBSET-SUM-lösbar g.d.w. $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2})$ PARTITION-lösbar ist.

$\Longrightarrow$ Wenn $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ eine Lösung für $((a_1, \ldots, a_k), s)$ ist, dann ist $I \cup \{k+2\}$ eine Lösung für $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2})$, weil $\sum_{I \cup \{k+2\}} a_i = s + (2A - s) = 2A$, was die Hälfte von $\sum_{i=1}^{k+2} = 4A$ ausmacht.

$\Longleftarrow$ Wenn $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2})$ eine Lösung $I \subseteq \{1, \ldots, k+2\}$ hat, dann $\sum_{i \in I} a_i = 2A = \sum_{i \in \{1,\ldots,k+2\} \setminus I} a_i$.

$k+1$ und $k+2$ können nicht gleichzeitig in I sein, da sonst die Summe zu groß ist.

- Wenn $k+2 \in I$, dann $I' = I \setminus \{k+2\}$.
- Wenn $k+1 \in I$, dann $I' = (\{1, \ldots, k+2\} \setminus I) \setminus \{k+2\}$.

In beiden Fällen ist $\sum_{i \in I'} = 2A - (2A - s) = s$ und die Indexmenge I' ist daher eine Lösung von $((a_1, \ldots, a_k), s)$. $\square$

Das BIN-PACKING-Problem

Definition

Das BIN-PACKING-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: natürliche Zahlen $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$,
die Behältergröße $b \in \mathbb{N}$ und
die Anzahl der Behälter m

gefragt: Kann man alle gegeben Zahlen so auf die Behälter aufteilen, sodass keiner der Behälter überläuft?
Formal: Gibt es eine totale Funktion $assign : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, m\}$, sodass für alle Behälter $j \in \{1, \dots, m\}$ gilt: $\left(\sum_{i:assign(i)=j} a_i\right) \leq b$?

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von BIN-PACKING

Satz

BIN-PACKING ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von BIN-PACKING

Satz

BIN-PACKING ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis

1. BIN-PACKING $\in \mathcal{NP}$:

   Rate nichtdeterministisch für jede Zahl a_i in welchen Behälter sie gehört.

   Prüfe deterministisch, dass die geratene Zuordnung keinen Behälter überlaufen lässt.

   BIN-PACKING kann daher in Polynomialzeit auf einer NTM entschieden werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von BIN-PACKING

Beweis (Fortsetzung)

2. BIN-PACKING ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen PARTITION $\leq_p$ BIN-PACKING.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von BIN-PACKING

Beweis (Fortsetzung)

2. BIN-PACKING ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen PARTITION $\leq_p$ BIN-PACKING.
   Sei $(a_1, \ldots, a_k)$ eine PARTITION-Instanz. Sei $f(a_1, \ldots, a_k)$ die BIN-PACKING-Instanz mit Zahlen $a_1, \ldots, a_k$,
   Behältergröße $b = \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i}{2} \right\rfloor$ und $m = 2$ Behältern.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von BIN-PACKING

Beweis (Fortsetzung)

2. BIN-PACKING ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen PARTITION $\leq_p$ BIN-PACKING.

   Sei $(a_1, \ldots, a_k)$ eine PARTITION-Instanz. Sei $f(a_1, \ldots, a_k)$ die BIN-PACKING-Instanz mit Zahlen $a_1, \ldots, a_k$, Behältergröße $b = \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i}{2} \right\rfloor$ und $m = 2$ Behältern.

   Die Funktion f ist total und kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von BIN-PACKING

Beweis (Fortsetzung)

Wir zeigen: $(a_1, \ldots, a_k)$ ist PARTITION-lösbar g.d.w. $((a_1, \ldots, a_k), b, 2)$ BIN-PACKING-lösbar ist.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von BIN-PACKING

Beweis (Fortsetzung)

Wir zeigen: $(a_1, \ldots, a_k)$ ist PARTITION-lösbar g.d.w. $((a_1, \ldots, a_k), b, 2)$ BIN-PACKING-lösbar ist.

Wenn $\sum_{i=1}^{k} a_i$ ungerade ist, dann ist die PARTITION-Instanz unlösbar und die BIN-PACKING-Instanz ebenso. Sonst:

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von BIN-PACKING

Beweis (Fortsetzung)

Wir zeigen: $(a_1, \ldots, a_k)$ ist PARTITION-lösbar g.d.w. $((a_1, \ldots, a_k), b, 2)$ BIN-PACKING-lösbar ist.

Wenn $\sum_{i=1}^{k} a_i$ ungerade ist, dann ist die PARTITION-Instanz unlösbar und die BIN-PACKING-Instanz ebenso. Sonst:

$\Longleftarrow$ Wenn $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ eine Lösung für PARTITION ist, dann ist

$$assign(i) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i \in I \\ 2 & \text{wenn } i \notin I \end{cases}$$

eine Lösung für BIN-PACKING.

Beweis (Fortsetzung)

Wir zeigen: $(a_1, \ldots, a_k)$ ist PARTITION-lösbar g.d.w. $((a_1, \ldots, a_k), b, 2)$ BIN-PACKING-lösbar ist.

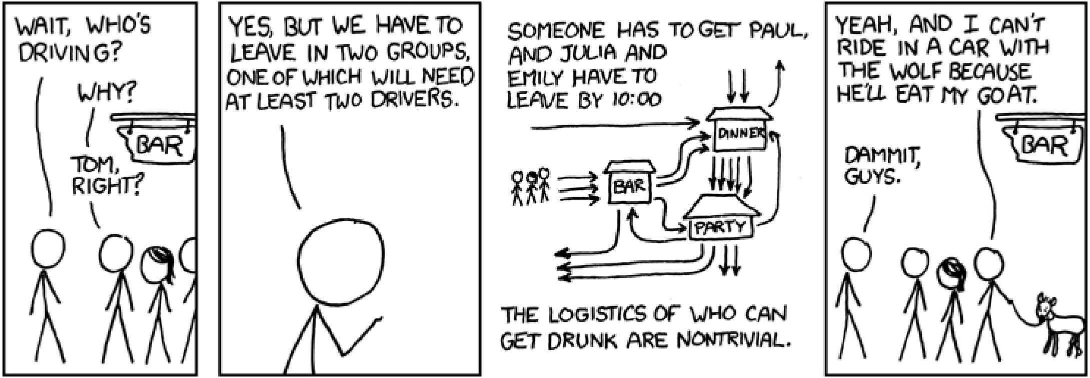
Wenn $\sum_{i=1}^{k} a_i$ ungerade ist, dann ist die PARTITION-Instanz unlösbar und die BIN-PACKING-Instanz ebenso. Sonst:

$\Longleftarrow$ Wenn $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ eine Lösung für PARTITION ist, dann ist

$$assign(i) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i \in I \\ 2 & \text{wenn } i \notin I \end{cases}$$

eine Lösung für BIN-PACKING.

$\Longrightarrow$ Sei *assign* eine Lösung für BIN-PACKING.
Mit $I = \{i \mid 1 \leq i \leq k, assign(i) = 1\}$ kann eine Lösung für PARTITION erstellt werden. $\square$


WAIT, WHO'S DRIVING?
WHY?
TOM, RIGHT?
BAR
YES, BUT WE HAVE TO LEAVE IN TWO GROUPS, ONE OF WHICH WILL NEED AT LEAST TWO DRIVERS.
SOMEONE HAS TO GET PAUL, AND JULIA AND EMILY HAVE TO LEAVE BY 10:00
DINNER
BAR
PARTY
THE LOGISTICS OF WHO CAN GET DRUNK ARE NONTRIVIAL.
YEAH, AND I CAN'T RIDE IN A CAR WITH THE WOLF BECAUSE HE'LL EAT MY GOAT.
DAMMIT, GUYS.
BAR

xkcd.com/589/