12c

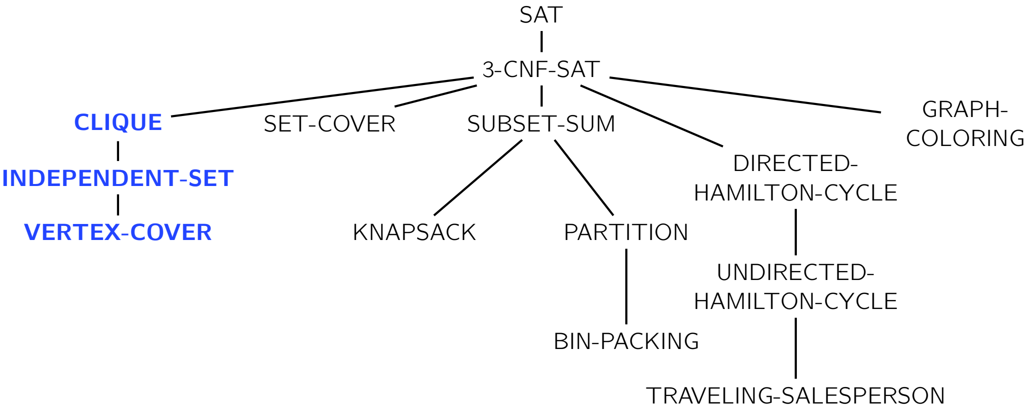
$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE, INDEPENDENT-SET und VERTEX-COVER

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 10. Mai 2024
Basiert auf Folien von PD Dr. David Sabel

Überblick über $\mathcal{NP}$-Vollständigkeitsbeweise



Ungerichtete Graphen

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ besteht aus

- einer endlichen Menge V von Knoten (vertices)
- einer endlichen Menge E von Kanten (edges), wobei Kanten aus zwei Knoten bestehen, und für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $u \neq v$

Ungerichtete Graphen

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ besteht aus

- einer endlichen Menge V von Knoten (vertices)
- einer endlichen Menge E von Kanten (edges), wobei Kanten aus zwei Knoten bestehen, und für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $u \neq v$

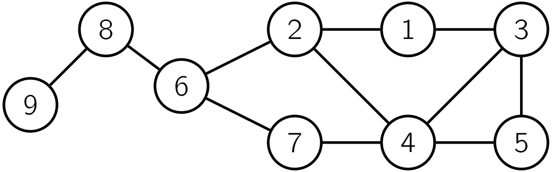
Beispiel: $G = (V, E)$ mit
$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ und
$$E = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\},\\ \{2,6\},\{4,7\},\{6,7\},\{6,8\},\{8,9\}\}$$

Ungerichtete Graphen

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ besteht aus

- einer endlichen Menge V von Knoten (vertices)
- einer endlichen Menge E von Kanten (edges), wobei Kanten aus zwei Knoten bestehen, und für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $u \neq v$

Beispiel: $G = (V, E)$ mit
$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ und
$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\},$
$\{2, 6\}, \{4, 7\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{8, 9\}\}$

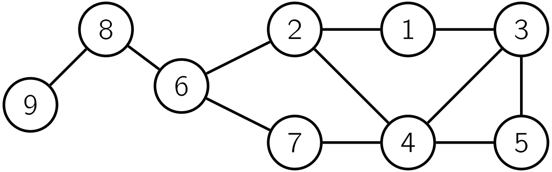


Ungerichtete Graphen

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ besteht aus

- einer endlichen Menge V von Knoten (vertices)
- einer endlichen Menge E von Kanten (edges), wobei Kanten aus zwei Knoten bestehen, und für alle $\{u, v\} \in E$ gilt $u \neq v$

Beispiel: $G = (V, E)$ mit
$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ und
$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{2, 6\}, \{4, 7\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}, \{8, 9\}\}$



Beachte: Wir verbieten

- Schlingen $\{u, u\} \in E$
- Mehrfachkanten (= mehrere Kanten zwischen u und v)
- Hypergraphen (Kanten mit nicht genau 2 Knoten)

Gerichtete Graphen

Bei gerichteten Graphen sind die Kanten gerichtet: $(u, v) \in E$ statt $\{u, v\} \in E$.
Daher sind Kanten (u, v) und (v, u) verschieden.

Gerichtete Graphen

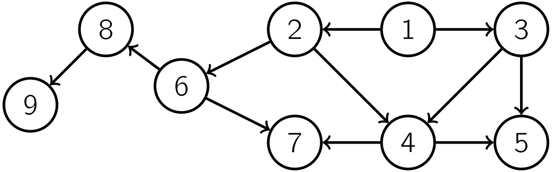
Bei gerichteten Graphen sind die Kanten gerichtet: $(u, v) \in E$ statt $\{u, v\} \in E$.
Daher sind Kanten (u, v) und (v, u) verschieden.

Beispiel: $G = (V, E)$ mit
$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ und
$E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 5),$
$\quad (2, 6), (4, 7), (6, 7), (6, 8), (8, 9)\}$

Gerichtete Graphen

Bei gerichteten Graphen sind die Kanten gerichtet: $(u, v) \in E$ statt $\{u, v\} \in E$.
Daher sind Kanten (u, v) und (v, u) verschieden.

Beispiel: $G = (V, E)$ mit
$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ und
$E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (2, 6), (4, 7), (6, 7), (6, 8), (8, 9)\}$



Cliquen in Graphen

Definition

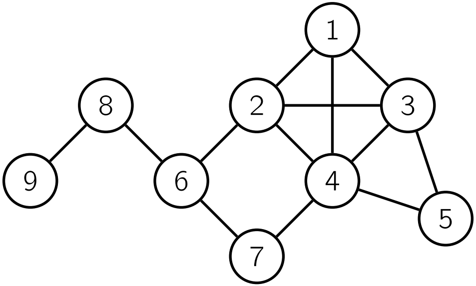
Für einen ungerichteten Graph $G = (V, E)$ ist eine Clique der Größe k eine Menge $V' \subseteq V$, sodass $|V'| = k$ und für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt: $\{u, v\} \in E$.

Cliquen in Graphen

Definition

Für einen ungerichteten Graph $G = (V, E)$ ist eine Clique der Größe k eine Menge $V' \subseteq V$, sodass $|V'| = k$ und für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt: $\{u, v\} \in E$.

Beispiel:

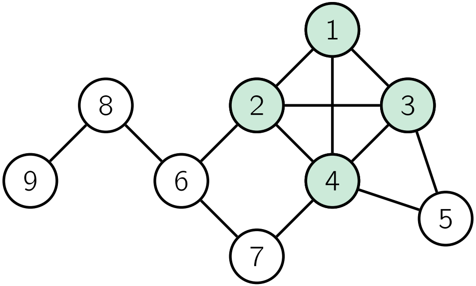


Cliquen in Graphen

Definition

Für einen ungerichteten Graph $G = (V, E)$ ist eine Clique der Größe k eine Menge $V' \subseteq V$, sodass $|V'| = k$ und für alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ gilt: $\{u, v\} \in E$.

Beispiel (Größe 4):



Das CLIQUE-Problem

Definition

Das CLIQUE-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$

gefragt: Besitzt G eine Clique der Größe k?

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE

Satz

CLIQUE ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE

Satz

CLIQUE ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis

1. CLIQUE $\in \mathcal{NP}$:

   Rate nichtdeterministisch eine Menge $V' \subseteq V$ von k Knoten.

   Prüfe deterministisch (in Polynomialzeit), ob für alle $u, v \in V' : \{u, v\} \in E$ gilt.

   Falls ja, akzeptiere, sonst verwirf.

   Daher kann eine NTM konstruiert werden, die CLIQUE in Polynomialzeit entscheidet.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE

Beweis (Fortsetzung)

2. CLIQUE ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen 3-CNF-SAT $\leq_p$ CLIQUE.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE

Beweis (Fortsetzung)

2. CLIQUE ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen 3-CNF-SAT $\leq_p$ CLIQUE.
   Sei $F = K_1 \wedge \cdots \wedge K_m$ eine 3-CNF, wobei
   $$K_i = (L_{i,1} \vee L_{i,2} \vee L_{i,3})$$
   für $i \in \{1, \ldots, m\}$. Falls K_i weniger als drei Literale hat, verdopple Literale.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE

Beweis (Fortsetzung)

2. CLIQUE ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen 3-CNF-SAT $\leq_p$ CLIQUE.
   Sei $F = K_1 \wedge \cdots \wedge K_m$ eine 3-CNF, wobei

$$K_i = (L_{i,1} \vee L_{i,2} \vee L_{i,3})$$

   für $i \in \{1, \ldots, m\}$. Falls K_i weniger als drei Literale hat, verdopple Literale.
   Notation: $\overline{L}$ ist negiertes Literal zu L: $\overline{x} = \neg x$ und $\overline{\neg x} = x$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE

Beweis (Fortsetzung)

2. CLIQUE ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen 3-CNF-SAT $\leq_p$ CLIQUE.
   Sei $F = K_1 \wedge \dots \wedge K_m$ eine 3-CNF, wobei
   $$K_i = (L_{i,1} \vee L_{i,2} \vee L_{i,3})$$
   für $i \in \{1, \dots, m\}$. Falls K_i weniger als drei Literale hat, verdopple Literale.
   Notation: $\overline{L}$ ist negiertes Literal zu L: $\overline{x} = \neg x$ und $\overline{\neg x} = x$.
   Wir erzeugen einen Graphen $f(G)$.
   Für jedes Literal $L_{i,j}$ erzeuge Knoten (i, j) im Graph, d.h.
   $$V := \{(i, j) \mid i \in \{1, \dots, m\} \text{ und } j \in \{1, 2, 3\}\}$$

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE

Beweis (Fortsetzung)

Für die Kanten:

- Erzeuge keine Kanten innerhalb der drei Knoten $\{(i,1),(i,2),(i,3)\}$ einer Klausel für jedes i.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE

Beweis (Fortsetzung)

Für die Kanten:

- Erzeuge keine Kanten innerhalb der drei Knoten $\{(i,1),(i,2),(i,3)\}$ einer Klausel für jedes i.
- Erzeuge Kanten zwischen Literalen verschiedenen Klauseln, aber ohne dass sich zwei verbundene Literale $L_{i,j}$ und $L_{i',j'}$ widersprechen. D.h. $L_{i,j} \neq \overline{L_{i',j'}}$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE

Beweis (Fortsetzung)

Für die Kanten:

- Erzeuge keine Kanten innerhalb der drei Knoten $\{(i,1),(i,2),(i,3)\}$ einer Klausel für jedes i.
- Erzeuge Kanten zwischen Literalen verschiedenen Klauseln, aber ohne dass sich zwei verbundene Literale $L_{i,j}$ und $L_{i',j'}$ widersprechen. D.h. $L_{i,j} \neq \overline{L_{i',j'}}$.

Daher:

$$E := \left\{ \{(i,j),(i',j')\} \;\middle|\; \begin{array}{l} i \neq i' \text{ und } i,i' \in \{1,\ldots,m\} \text{ und } j,j' \in \{1,2,3\} \\ \text{und } L_{i,j} \neq \overline{L_{i',j'}} \end{array} \right\}$$

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE

Beweis (Fortsetzung)

Für die Kanten:

- Erzeuge keine Kanten innerhalb der drei Knoten $\{(i,1),(i,2),(i,3)\}$ einer Klausel für jedes i.
- Erzeuge Kanten zwischen Literalen verschiedenen Klauseln, aber ohne dass sich zwei verbundene Literale $L_{i,j}$ und $L_{i',j'}$ widersprechen. D.h. $L_{i,j} \neq \overline{L_{i',j'}}$.

Daher:

$$E := \left\{ \{(i,j),(i',j')\} \;\middle|\; \begin{array}{l} i \neq i' \text{ und } i,i' \in \{1,\ldots,m\} \text{ und } j,j' \in \{1,2,3\} \\ \text{und } L_{i,j} \neq \overline{L_{i',j'}} \end{array} \right\}$$

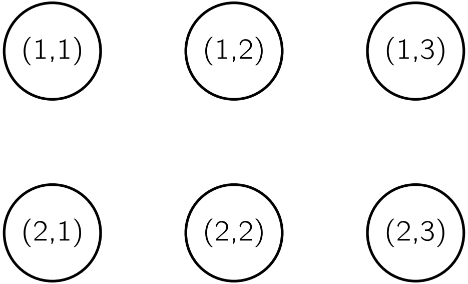
$f(F) = ((V,E),m)$ ist total und in Polynomialzeit berechenbar.

Erstes Beispiel für die Reduktion

Sei $F = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_1)$.

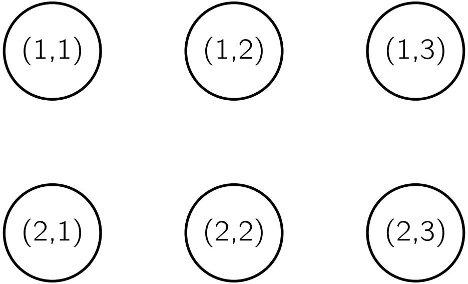
Erstes Beispiel für die Reduktion

Sei $F = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_1)$. Graph:



Erstes Beispiel für die Reduktion

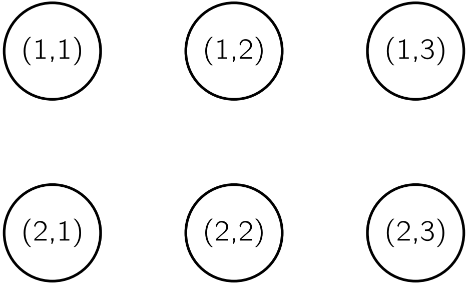
Sei $F = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_1)$. Graph:



Es gibt keine Kanten, da sich $(1, i)$ und $(2, j)$ stets widersprechen.

Erstes Beispiel für die Reduktion

Sei $F = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee \neg x_1)$. Graph:



Es gibt keine Kanten, da sich $(1, i)$ und $(2, j)$ stets widersprechen.

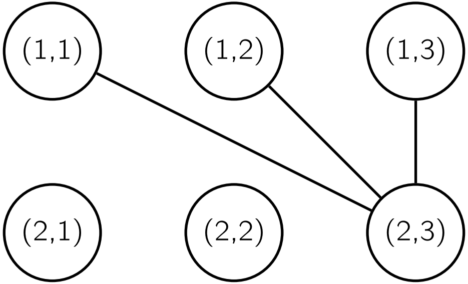
Es gibt keine Clique der Größe 2 aber auch keine erfüllende Belegung der Variablen von F.

Zweites Beispiel für die Reduktion

Sei $F = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee x_1)$.

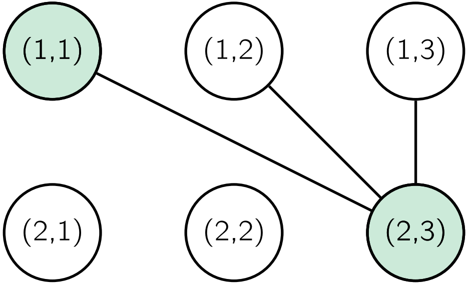
Zweites Beispiel für die Reduktion

Sei $F = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee x_1)$. Graph:



Zweites Beispiel für die Reduktion

Sei $F = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_1 \vee x_1)$. Graph:



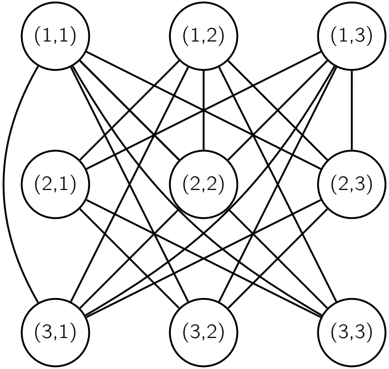
Z.B. ist $\{(1,1),(2,3)\}$ eine Clique der Größe 2.
Die zugehörige Belegung ist $I(x_1) = 1$.

Drittes Beispiel für die Reduktion

Sei $F = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$.

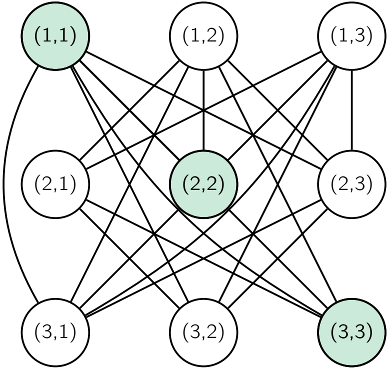
Drittes Beispiel für die Reduktion

Sei $F = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$. Graph:



Drittes Beispiel für die Reduktion

Sei $F = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$. Graph:



Z.B. ist $\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ eine Clique der Größe 3.
Die zugehörige Belegung ist $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 1$, $I(x_3) = 0$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE

Beweis (Fortsetzung)

Zu zeigen: F ist erfüllbar g.d.w. (V, E) eine Clique der Größe m hat.

$\Longrightarrow$ Wenn F erfüllbar ist, gibt es eine Belegung I, sodass in jeder Klausel K_i mindestens ein Literal wahr ist.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE

Beweis (Fortsetzung)

Zu zeigen: F ist erfüllbar g.d.w. (V, E) eine Clique der Größe m hat.

$\Longrightarrow$ Wenn F erfüllbar ist, gibt es eine Belegung I, sodass in jeder Klausel K_i mindestens ein Literal wahr ist.

D.h. es gibt Literale $L_{1,j_1}, \ldots, L_{m,j_m}$ mit $I(L_{1,j_1}) = 1, \ldots, I(L_{m,j_m}) = 1$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE

Beweis (Fortsetzung)

Zu zeigen: F ist erfüllbar g.d.w. (V, E) eine Clique der Größe m hat.

$\Longrightarrow$ Wenn F erfüllbar ist, gibt es eine Belegung I, sodass in jeder Klausel K_i mindestens ein Literal wahr ist.

D.h. es gibt Literale $L_{1,j_1}, \ldots, L_{m,j_m}$ mit $I(L_{1,j_1}) = 1, \ldots, I(L_{m,j_m}) = 1$.

Diese Literale können sich paarweise nicht widersprechen.
D.h. sie sind im Graph paarweise miteinander verbunden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE

Beweis (Fortsetzung)

Zu zeigen: F ist erfüllbar g.d.w. (V, E) eine Clique der Größe m hat.

$\Longrightarrow$ Wenn F erfüllbar ist, gibt es eine Belegung I, sodass in jeder Klausel K_i mindestens ein Literal wahr ist.

D.h. es gibt Literale $L_{1,j_1}, \ldots, L_{m,j_m}$ mit $I(L_{1,j_1}) = 1, \ldots, I(L_{m,j_m}) = 1$.

Diese Literale können sich paarweise nicht widersprechen.
D.h. sie sind im Graph paarweise miteinander verbunden.

Daher formt $\{(1, j_1), \ldots, (m, j_m)\}$ eine Clique der Größe m.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE

Beweis (Fortsetzung)

$\Longleftarrow$ Wir nehmen an, dass (V, E) eine Clique der Größe m hat und beweisen, dass F erfüllbar ist.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE

Beweis (Fortsetzung)

$\Longleftarrow$ Wir nehmen an, dass (V, E) eine Clique der Größe m hat und beweisen, dass F erfüllbar ist.

Sei $V' = \{(i_1, j_1), \ldots (i_m, j_m)\}$ eine Clique der Größe m.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE

Beweis (Fortsetzung)

$\Longleftarrow$ Wir nehmen an, dass (V, E) eine Clique der Größe m hat und beweisen, dass F erfüllbar ist.

Sei $V' = \{(i_1, j_1), \ldots (i_m, j_m)\}$ eine Clique der Größe m.

Da (i, x) und (i, y) nie miteinander verbunden sind,
müssen alle $i_1, \ldots, i_m$ paarweise verschieden sein, also $\{i_1, \ldots, i_m\} = \{1, \ldots, m\}$.
Mit anderen Worten gehören die Literale zu verschiedenen Klauseln.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE

Beweis (Fortsetzung)

$\Longleftarrow$ Wir nehmen an, dass (V, E) eine Clique der Größe m hat und beweisen, dass F erfüllbar ist.

Sei $V' = \{(i_1, j_1), \ldots (i_m, j_m)\}$ eine Clique der Größe m.

Da (i, x) und (i, y) nie miteinander verbunden sind, müssen alle $i_1, \ldots, i_m$ paarweise verschieden sein, also $\{i_1, \ldots, i_m\} = \{1, \ldots, m\}$. Mit anderen Worten gehören die Literale zu verschiedenen Klauseln.

Da sie verbunden sind, widersprechen sich die Literale $L_{i_1, j_1}, \ldots L_{i_m, j_m}$ paarweise nicht.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE

Beweis (Fortsetzung)

$\Longleftarrow$ Wir nehmen an, dass (V, E) eine Clique der Größe m hat und beweisen, dass F erfüllbar ist.

Sei $V' = \{(i_1, j_1), \ldots (i_m, j_m)\}$ eine Clique der Größe m.

Da (i, x) und (i, y) nie miteinander verbunden sind,
müssen alle $i_1, \ldots, i_m$ paarweise verschieden sein, also $\{i_1, \ldots, i_m\} = \{1, \ldots, m\}$.
Mit anderen Worten gehören die Literale zu verschiedenen Klauseln.

Da sie verbunden sind, widersprechen sich die Literale $L_{i_1,j_1}, \ldots L_{i_m,j_m}$ paarweise nicht.

Definiere die Belegung I mit $I(x) = 1$ wenn $L_{i_k,j_k} = x$ und $I(x) = 0$ wenn $L_{i_k,j_k} = \neg x$ und $I(y) = 1$ für alle anderen Variablen.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE

Beweis (Fortsetzung)

$\Longleftarrow$ Wir nehmen an, dass (V, E) eine Clique der Größe m hat und beweisen, dass F erfüllbar ist.

Sei $V' = \{(i_1, j_1), \dots (i_m, j_m)\}$ eine Clique der Größe m.

Da (i, x) und (i, y) nie miteinander verbunden sind,
müssen alle $i_1, \dots, i_m$ paarweise verschieden sein, also $\{i_1, \dots, i_m\} = \{1, \dots, m\}$.
Mit anderen Worten gehören die Literale zu verschiedenen Klauseln.

Da sie verbunden sind, widersprechen sich die Literale $L_{i_1,j_1}, \dots L_{i_m,j_m}$ paarweise nicht.

Definiere die Belegung I mit $I(x) = 1$ wenn $L_{i_k,j_k} = x$ und $I(x) = 0$ wenn $L_{i_k,j_k} = \neg x$ und $I(y) = 1$ für alle anderen Variablen.

I macht die Literale $L_{i_1,j_1}, \dots L_{i_m,j_m}$ wahr
und da mindestens ein Literal pro Klausel wahr ist, ist F wahr.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von CLIQUE

Beweis (Fortsetzung)

$\Longleftarrow$ Wir nehmen an, dass (V, E) eine Clique der Größe m hat und beweisen, dass F erfüllbar ist.

Sei $V' = \{(i_1, j_1), \dots (i_m, j_m)\}$ eine Clique der Größe m.

Da (i, x) und (i, y) nie miteinander verbunden sind,
müssen alle $i_1, \dots, i_m$ paarweise verschieden sein, also $\{i_1, \dots, i_m\} = \{1, \dots, m\}$.
Mit anderen Worten gehören die Literale zu verschiedenen Klauseln.

Da sie verbunden sind, widersprechen sich die Literale $L_{i_1,j_1}, \dots L_{i_m,j_m}$ paarweise nicht.

Definiere die Belegung I mit $I(x) = 1$ wenn $L_{i_k,j_k} = x$ und $I(x) = 0$ wenn $L_{i_k,j_k} = \neg x$ und $I(y) = 1$ für alle anderen Variablen.

I macht die Literale $L_{i_1,j_1}, \dots L_{i_m,j_m}$ wahr
und da mindestens ein Literal pro Klausel wahr ist, ist F wahr.

Daher: 3-CNF-SAT $\leq_p$ CLIQUE.
Da 3-CNF-SAT $\mathcal{NP}$-schwer ist, folgt dass CLIQUE $\mathcal{NP}$-schwer ist. $\square$

Unabhängige Knotenmenge

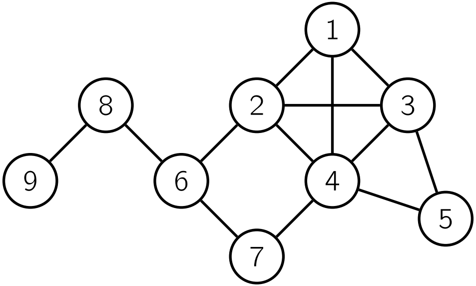
Definition

Für einen Graphen $G = (V, E)$ ist $V' \subseteq V$ eine unabhängige Knotenmenge (*independent set*), wenn keine zwei Knoten aus V' über eine Kante verbunden sind, d.h. $u, v \in V'$ impliziert $\{u, v\} \notin E$.

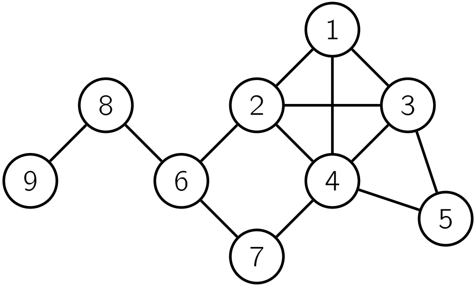
Beachte:

- $\emptyset$ ist immer eine unabhängige Knotenmenge.
- Man möchte typischerweise eine große Menge V' finden.

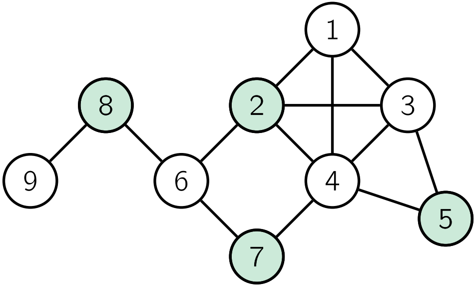
Beispiele für unabhängige Knotenmengen



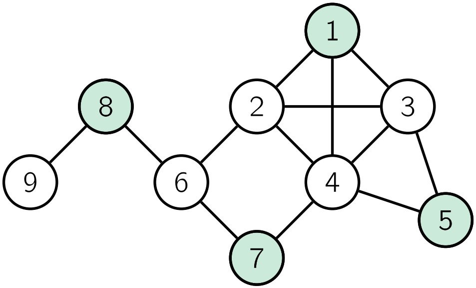
Beispiele für unabhängige Knotenmengen



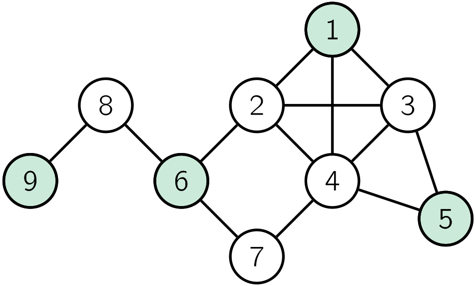
Beispiele für unabhängige Knotenmengen



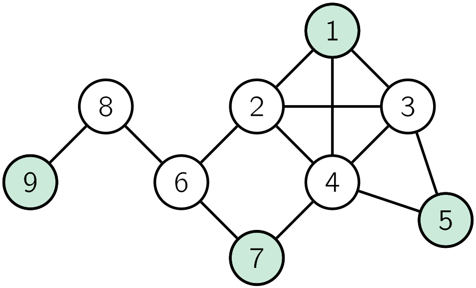
Beispiele für unabhängige Knotenmengen



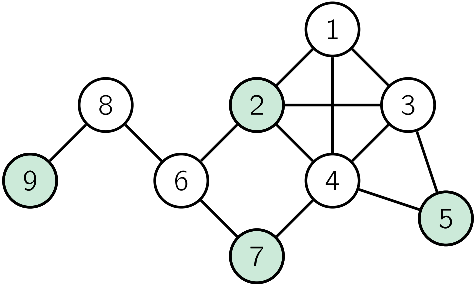
Beispiele für unabhängige Knotenmengen



Beispiele für unabhängige Knotenmengen



Beispiele für unabhängige Knotenmengen

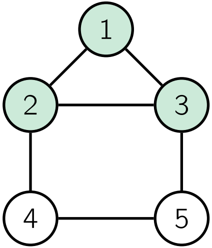


Komplementgraph

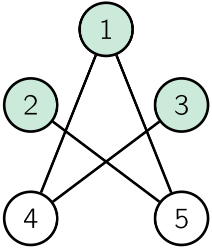
Für einen Graphen $G = (V, E)$ ist der Komplementgraph zu G der Graph $\overline{G} = (V, \overline{E})$ mit

$$\overline{E} := \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$$

Beispiel für den Komplementgraphen

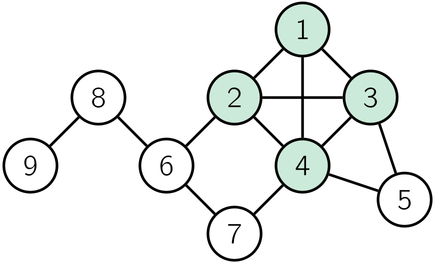


Graph

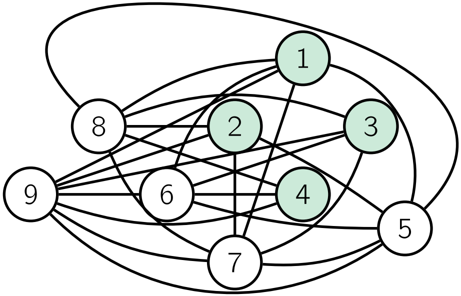


Komplementgraph

Weiteres Beispiel für den Komplementgraphen



Graph



Komplementgraph

Unabhängige Knotenmengen vs. Cliquen

Lemma

Für jeden ungerichteten Graph G gilt: G hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe k g.d.w. $\overline{G}$ eine Clique der Größe k hat.

Unabhängige Knotenmengen vs. Cliquen

Lemma

Für jeden ungerichteten Graph G gilt: G hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe k g.d.w. $\overline{G}$ eine Clique der Größe k hat.

Beweis Sei $V' \subseteq V$.

V' ist eine unabhängige Knotenmenge der Größe k

Unabhängige Knotenmengen vs. Cliquen

Lemma

Für jeden ungerichteten Graph G gilt: G hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe k g.d.w. $\overline{G}$ eine Clique der Größe k hat.

Beweis Sei $V' \subseteq V$.

V' ist eine unabhängige Knotenmenge der Größe k
g.d.w. $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$ und $|V'| = k$

Unabhängige Knotenmengen vs. Cliquen

Lemma

Für jeden ungerichteten Graph G gilt: G hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe k g.d.w. $\overline{G}$ eine Clique der Größe k hat.

Beweis Sei $V' \subseteq V$.

V' ist eine unabhängige Knotenmenge der Größe k

g.d.w. $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$ und $|V'| = k$

V' ist eine Clique der Größe k in $\overline{G}$

Unabhängige Knotenmengen vs. Cliquen

Lemma

Für jeden ungerichteten Graph G gilt: G hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe k g.d.w. $\overline{G}$ eine Clique der Größe k hat.

Beweis Sei $V' \subseteq V$.

V' ist eine unabhängige Knotenmenge der Größe k

g.d.w. $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$ und $|V'| = k$

$\{u, v\} \in \overline{E}$ für $u, v \in V'$ und $|V'| = k$

g.d.w. V' ist eine Clique der Größe k in $\overline{G}$

Unabhängige Knotenmengen vs. Cliquen

Lemma

Für jeden ungerichteten Graph G gilt: G hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe k g.d.w. $\overline{G}$ eine Clique der Größe k hat.

Beweis Sei $V' \subseteq V$.

V' ist eine unabhängige Knotenmenge der Größe k
g.d.w. $\{u, v\} \notin E$ für $u, v \in V'$ und $|V'| = k$
g.d.w. $\{u, v\} \in \overline{E}$ für $u, v \in V'$ und $|V'| = k$
g.d.w. V' ist eine Clique der Größe k in $\overline{G}$ $\square$

Das INDEPENDENT-SET-Problem

Definition

Das INDEPENDENT-SET-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$

gefragt: Besitzt G eine unabhängige Knotenmenge der Größe k?

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von INDEPENDENT-SET

Satz

INDEPENDENT-SET ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von INDEPENDENT-SET

Satz

INDEPENDENT-SET ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis

1. INDEPENDENT-SET $\in \mathcal{NP}$:
   Rate nichtdeterministisch eine Menge $V' \subseteq V$ von k Knoten.

   Verifiziere deterministisch, ob für jedes Paar $\{u, v\} \in V'$ gilt: $\{u, v\} \notin E$.
   Dies geht in Polynomialzeit.

   Daher kann INDEPENDENT-SET in Polynomialzeit auf einer NTM entschieden werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von INDEPENDENT-SET

Beweis

2. INDEPENDENT-SET ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen CLIQUE $\leq_p$ INDEPENDENT-SET.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von INDEPENDENT-SET

Beweis

2. INDEPENDENT-SET ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen CLIQUE $\leq_p$ INDEPENDENT-SET.
   Sei $f((V, E), m) = ((V, \overline{E}), m)$ mit $\overline{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, \{u, v\} \notin E\}$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von INDEPENDENT-SET

Beweis

2. INDEPENDENT-SET ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen CLIQUE $\leq_p$ INDEPENDENT-SET.
   Sei $f((V, E), m) = ((V, \overline{E}), m)$ mit $\overline{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, \{u, v\} \notin E\}$.
   Die Funktion f ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von INDEPENDENT-SET

Beweis

2. INDEPENDENT-SET ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen CLIQUE $\leq_p$ INDEPENDENT-SET.
   Sei $f((V,E),m) = ((V,\overline{E}),m)$ mit $\overline{E} = \{\{u,v\} \mid u,v \in V, \{u,v\} \notin E\}$.
   Die Funktion f ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.
   Dann gilt: (V,E) hat eine Clique der Größe m g.d.w.
   $(V,\overline{E})$ eine unabhängige Knotenmenge der Größe m hat.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von INDEPENDENT-SET

Beweis

2. INDEPENDENT-SET ist $\mathcal{NP}$-schwer:

   Wir zeigen CLIQUE $\leq_p$ INDEPENDENT-SET.

   Sei $f((V, E), m) = ((V, \overline{E}), m)$ mit $\overline{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, \{u, v\} \notin E\}$.

   Die Funktion f ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

   Dann gilt: (V, E) hat eine Clique der Größe m g.d.w.
   $(V, \overline{E})$ eine unabhängige Knotenmenge der Größe m hat.

   Daher: CLIQUE $\leq_p$ INDEPENDENT-SET.
   Da CLIQUE $\mathcal{NP}$-schwer ist, folgt dass INDEPENDENT-SET
   $\mathcal{NP}$-schwer ist. $\square$

Überdeckende Knotenmenge

Definition

Für einen Graphen $G = (V, E)$ ist $V' \subseteq V$ eine überdeckende Knotenmenge (*vertex cover*), wenn jede Kante aus E mindestens einen Knoten in V' hat, d.h. für alle Knoten $u, v \in V$: $\{u, v\} \in E$ impliziert $u \in V' \vee v \in V'$.

Überdeckende Knotenmenge

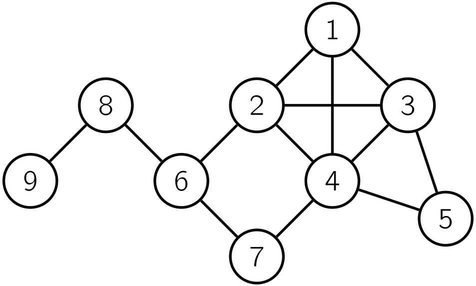
Definition

Für einen Graphen $G = (V, E)$ ist $V' \subseteq V$ eine überdeckende Knotenmenge (*vertex cover*), wenn jede Kante aus E mindestens einen Knoten in V' hat, d.h. für alle Knoten $u, v \in V$: $\{u, v\} \in E$ impliziert $u \in V' \vee v \in V'$.

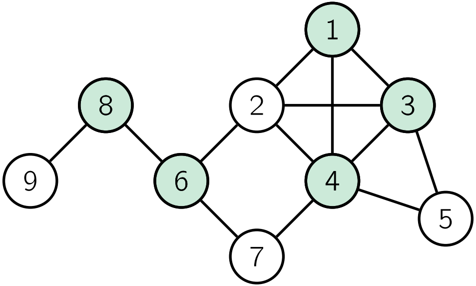
Beachte:

- V ist immer eine überdeckende Knotenmenge.
- Man möchte typischerweise eine kleine Menge V' finden.

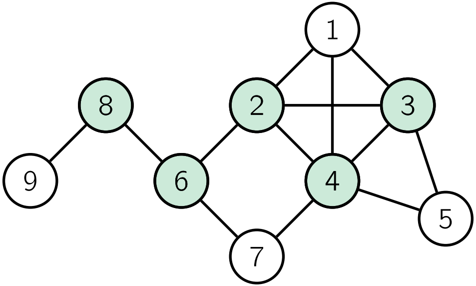
Beispiele für überdeckende Knotenmengen



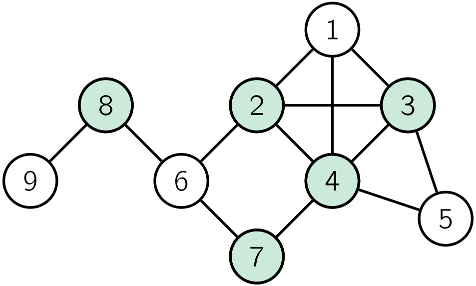
Beispiele für überdeckende Knotenmengen



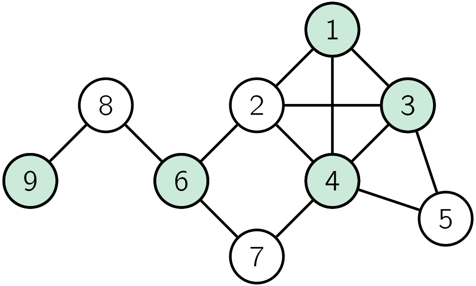
Beispiele für überdeckende Knotenmengen



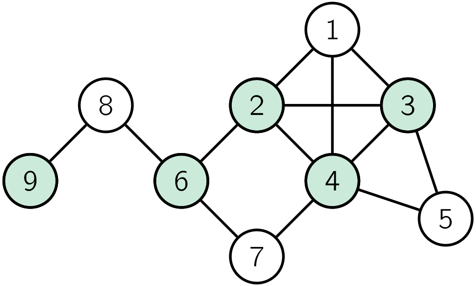
Beispiele für überdeckende Knotenmengen



Beispiele für überdeckende Knotenmengen



Beispiele für überdeckende Knotenmengen



Überdeckende Knotenmengen vs. unabhängige Knotenmengen

Lemma

$G = (V, E)$ hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe k g.d.w.
G hat eine überdeckende Knotenmenge der Größe $|V| - k$.

Überdeckende Knotenmengen vs. unabhängige Knotenmengen

Lemma

$G = (V, E)$ hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe k g.d.w.
G hat eine überdeckende Knotenmenge der Größe $|V| - k$.

Beweis Sei $V' \subseteq V$.

Überdeckende Knotenmengen vs. unabhängige Knotenmengen

Lemma

$G = (V, E)$ hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe k g.d.w.
G hat eine überdeckende Knotenmenge der Größe $|V| - k$.

Beweis Sei $V' \subseteq V$.

V' ist eine unabhängige Knotenmenge

Überdeckende Knotenmengen vs. unabhängige Knotenmengen

Lemma

$G = (V, E)$ hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe k g.d.w.
G hat eine überdeckende Knotenmenge der Größe $|V| - k$.

Beweis Sei $V' \subseteq V$.

V' ist eine unabhängige Knotenmenge
g.d.w. $\{u, v\} \notin E$ für alle $u, v \in V'$

Überdeckende Knotenmengen vs. unabhängige Knotenmengen

Lemma

$G = (V, E)$ hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe k g.d.w.
G hat eine überdeckende Knotenmenge der Größe $|V| - k$.

Beweis Sei $V' \subseteq V$.

V' ist eine unabhängige Knotenmenge
g.d.w. $\{u, v\} \notin E$ für alle $u, v \in V'$
g.d.w. $u \notin V' \vee v \notin V'$ für alle $\{u, v\} \in E$

Überdeckende Knotenmengen vs. unabhängige Knotenmengen

Lemma

$G = (V, E)$ hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe k g.d.w.
G hat eine überdeckende Knotenmenge der Größe $|V| - k$.

Beweis Sei $V' \subseteq V$.

V' ist eine unabhängige Knotenmenge
g.d.w. $\{u, v\} \notin E$ für alle $u, v \in V'$
g.d.w. $u \notin V' \vee v \notin V'$ für alle $\{u, v\} \in E$

$V \setminus V'$ ist eine überdeckende Knotenmenge

Überdeckende Knotenmengen vs. unabhängige Knotenmengen

Lemma

$G = (V, E)$ hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe k g.d.w.
G hat eine überdeckende Knotenmenge der Größe $|V| - k$.

Beweis Sei $V' \subseteq V$.

V' ist eine unabhängige Knotenmenge
g.d.w. $\{u, v\} \notin E$ für alle $u, v \in V'$
g.d.w. $u \notin V' \vee v \notin V'$ für alle $\{u, v\} \in E$

$(u \in V \setminus V') \vee (v \in V \setminus V')$ für alle $\{u, v\} \in E$
g.d.w. $V \setminus V'$ ist eine überdeckende Knotenmenge

Überdeckende Knotenmengen vs. unabhängige Knotenmengen

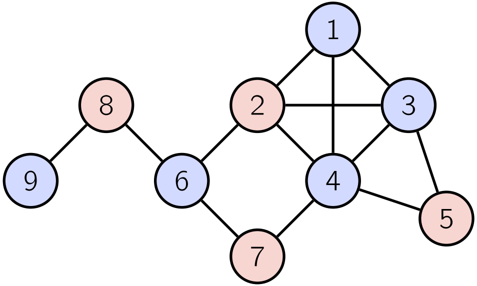
Lemma

$G = (V, E)$ hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe k g.d.w.
G hat eine überdeckende Knotenmenge der Größe $|V| - k$.

Beweis Sei $V' \subseteq V$.

V' ist eine unabhängige Knotenmenge
g.d.w. $\{u, v\} \notin E$ für alle $u, v \in V'$
g.d.w. $u \notin V' \vee v \notin V'$ für alle $\{u, v\} \in E$
g.d.w. $(u \in V \setminus V') \vee (v \in V \setminus V')$ für alle $\{u, v\} \in E$
g.d.w. $V \setminus V'$ ist eine überdeckende Knotenmenge $\square$

Beispiel



unabhängige Knotenmenge

überdeckende Knotenmenge

Das VERTEX-COVER-Problem

Definition

Das VERTEX-COVER-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$

gefragt: Besitzt G eine überdeckende Knotenmenge der Größe höchstens k?

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von VERTEX-COVER

Satz

VERTEX-COVER ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von VERTEX-COVER

Satz

VERTEX-COVER ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis

1. VERTEX-COVER $\in \mathcal{NP}$:
   Sei $G = (V, E)$.
   Rate nichtdeterministisch eine Menge $V' \subseteq V$ von k Knoten.
   Prüfe deterministisch (in Polynomialzeit), ob für alle $\{u, v\} \in E$: $u \in V' \vee v \in V'$.
   D.h. VERTEX-COVER wird in Polynomialzeit von einer NTM entschieden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von VERTEX-COVER

Beweis (Fortsetzung)

2. VERTEX-COVER ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen INDEPENDENT-SET $\leq_p$ VERTEX-COVER.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von VERTEX-COVER

Beweis (Fortsetzung)

2. VERTEX-COVER ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen INDEPENDENT-SET $\leq_p$ VERTEX-COVER.
   Sei $f((V, E, m)) = (V, E, |V| - m)$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von VERTEX-COVER

Beweis (Fortsetzung)

2. VERTEX-COVER ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen INDEPENDENT-SET $\leq_p$ VERTEX-COVER.

   Sei $f((V, E, m)) = (V, E, |V| - m)$.

   Die Funktion f ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von VERTEX-COVER

Beweis (Fortsetzung)

2. VERTEX-COVER ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen INDEPENDENT-SET $\leq_p$ VERTEX-COVER.

   Sei $f((V, E, m)) = (V, E, |V| - m)$.

   Die Funktion f ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

   Zudem gilt:
   (V, E) hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe m g.d.w.
   (V, E) hat eine überdeckende Knotenmenge der Größe $|V| - m$.

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von VERTEX-COVER

Beweis (Fortsetzung)

2. VERTEX-COVER ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen INDEPENDENT-SET $\leq_p$ VERTEX-COVER.

   Sei $f((V, E, m)) = (V, E, |V| - m)$.

   Die Funktion f ist total und kann in Polynomialzeit berechnet werden.

   Zudem gilt:
   (V, E) hat eine unabhängige Knotenmenge der Größe m g.d.w.
   (V, E) hat eine überdeckende Knotenmenge der Größe $|V| - m$.

   Daher: INDEPENDENT-SET $\leq_p$ VERTEX-COVER.
   Da INDEPENDENT-SET $\mathcal{NP}$-schwer ist, folgt dass VERTEX-COVER $\mathcal{NP}$-schwer ist. $\square$