12b

$\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von 3-CNF-SAT

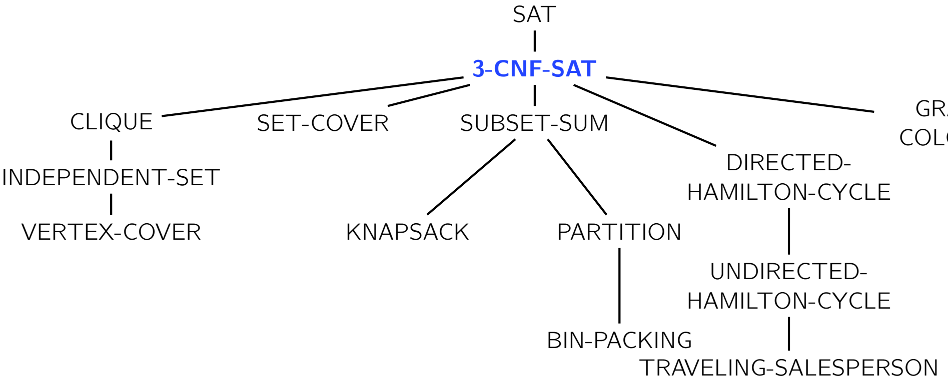
Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 9. Juli 2024
Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel

Überblick über $\mathcal{NP}$-Vollständigkeitsbeweise

Wir weisen $\mathcal{NP}$-Schwere nach durch Polynomialzeitreduktion bekannter $\mathcal{NP}$-vollständiger Probleme auf das neue Problem.



Wiederholung: $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

Definition

Eine Sprache L heißt $\mathcal{NP}$-vollständig, wenn gilt

1. $L \in \mathcal{NP}$ und
2. L ist $\mathcal{NP}$-schwer: für alle $L' \in \mathcal{NP}$ gilt $L' \leq_p L$.

Wiederholung: $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit

Definition

Eine Sprache L heißt $\mathcal{NP}$-vollständig, wenn gilt

1. $L \in \mathcal{NP}$ und
2. L ist $\mathcal{NP}$-schwer: für alle $L' \in \mathcal{NP}$ gilt $L' \leq_p L$.

Beweistechnik für $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von L:

1. Zeige $L \in \mathcal{NP}$.
2. Zeige $L_0 \leq_p L$ für ein bekanntes $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem L_0 (z.B. SAT). Dann folgt die $\mathcal{NP}$-Schwere von L.

Konjunktive Normalform

Die aussagenlogische Formel F ist in konjunktiver Normalform (CNF), wenn sie von der folgenden Form ist:

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j=1}^{n_i} L_{i,j} \right)$$

- Jedes Literal $L_{i,j}$ ist eine aussagenlogische Variable oder deren Negation.
- $(\bigvee_{j=1}^{n_i} L_{i,j})$ ist eine Klausel.

Konjunktive Normalform

Die aussagenlogische Formel F ist in konjunktiver Normalform (CNF), wenn sie von der folgenden Form ist:

$$\bigwedge_{i=1}^{m}(\bigvee_{j=1}^{n_i} L_{i,j})$$

- Jedes Literal $L_{i,j}$ ist eine aussagenlogische Variable oder deren Negation.
- $(\bigvee_{j=1}^{n_i} L_{i,j})$ ist eine Klausel.

Beispiel:

$$x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_4 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4)$$

Konjunktive Normalform

Die aussagenlogische Formel F ist in konjunktiver Normalform (CNF), wenn sie von der folgenden Form ist:

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j=1}^{n_i} L_{i,j} \right)$$

- Jedes Literal $L_{i,j}$ ist eine aussagenlogische Variable oder deren Negation.
- $(\bigvee_{j=1}^{n_i} L_{i,j})$ ist eine Klausel.

Beispiel:

$$x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_4 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4)$$

Eine erfüllende Belegung muss mindestens 1 Literal pro Klausel wahr machen.

Konjunktive Normalform

Die aussagenlogische Formel F ist in konjunktiver Normalform (CNF), wenn sie von der folgenden Form ist:

$$\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j=1}^{n_i} L_{i,j}\right)$$

- Jedes Literal $L_{i,j}$ ist eine aussagenlogische Variable oder deren Negation.
- $(\bigvee_{j=1}^{n_i} L_{i,j})$ ist eine Klausel.

Beispiel:

$$x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_4 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_4)$$

Eine erfüllende Belegung muss mindestens 1 Literal pro Klausel wahr machen.

Wir nehmen an, dass es keine Klauseln gibt, die x und $\neg x$ enthalten.
Diese Klauseln sind immer wahr und können gelöscht werden.

3-CNF-SAT

Definition

Das 3-CNF-SAT-Problem lässt sich wie folgt formulieren.

gegeben: eine aussagenlogische Formel F in CNF,
sodass jede Klausel höchstens 3 Literale enthält
(d.h. eine aussagenlogische Formel F in 3-CNF)

gefragt: Ist F erfüllbar? Genauer: Gibt es eine erfüllende Belegung der Variablen,
sodass F den Wert 1 erhält?

Zugehörigkeit von 3-CNF-SAT zu $\mathcal{NP}$

Satz

3-CNF-SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Zugehörigkeit von 3-CNF-SAT zu $\mathcal{NP}$

Satz

3-CNF-SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis

1. 3-CNF-SAT ist in $\mathcal{NP}$:
   Rate nichtdeterministisch eine Belegung der Variablen.

Zugehörigkeit von 3-CNF-SAT zu $\mathcal{NP}$

Satz

3-CNF-SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis

1. 3-CNF-SAT ist in $\mathcal{NP}$:

   Rate nichtdeterministisch eine Belegung der Variablen.

   Prüfe deterministisch, ob die Belegung die 3-CNF wahr macht. Akzeptiere in diesem Fall, sonst verwirf.

Zugehörigkeit von 3-CNF-SAT zu $\mathcal{NP}$

Satz

3-CNF-SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis

1. 3-CNF-SAT ist in $\mathcal{NP}$:

   Rate nichtdeterministisch eine Belegung der Variablen.

   Prüfe deterministisch, ob die Belegung die 3-CNF wahr macht. Akzeptiere in diesem Fall, sonst verwirf.

   Dies geht in Polynomialzeit in der Größe der 3-CNF.

Zugehörigkeit von 3-CNF-SAT zu $\mathcal{NP}$

Satz

3-CNF-SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis

1. 3-CNF-SAT ist in $\mathcal{NP}$:

   Rate nichtdeterministisch eine Belegung der Variablen.

   Prüfe deterministisch, ob die Belegung die 3-CNF wahr macht. Akzeptiere in diesem Fall, sonst verwirf.

   Dies geht in Polynomialzeit in der Größe der 3-CNF.

   Daher kann 3-CNF-SAT auf einer NTM in Polynomialzeit entschieden werden.

$\mathcal{NP}$-Schwere von 3-CNF-SAT

Satz

3-CNF-SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis (Fortsetzung)

2. 3-CNF-SAT ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen SAT $\leq_p$ 3-CNF-SAT.

$\mathcal{NP}$-Schwere von 3-CNF-SAT

Satz

3-CNF-SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis (Fortsetzung)

2. 3-CNF-SAT ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen SAT $\leq_p$ 3-CNF-SAT.

   Gesucht wird eine polynomiell berechenbare, totale Funktion f, sodass:
   F ist erfüllbar g.d.w. die 3-CNF $f(F)$ ist erfüllbar.

CNF-Transformation

Die CNF-Transformation ist ein Verfahren,
um F in eine äquivalente CNF $f(F)$ umzuformen.

CNF-Transformation

Die CNF-Transformation ist ein Verfahren,
um F in eine äquivalente CNF $f(F)$ umzuformen.

Schritte:

1. Löse $\iff$ und $\implies$ auf.
2. Schiebe Negationen nach innen und anschließend multipliziere aus.
   (Wende Distributivität, Kommutativität an, um CNF herzustellen.)

CNF-Transformation

Die CNF-Transformation ist ein Verfahren,
um F in eine äquivalente CNF $f(F)$ umzuformen.

Schritte:

1. Löse $\iff$ und $\implies$ auf.
2. Schiebe Negationen nach innen und anschließend multipliziere aus.
   (Wende Distributivität, Kommutativität an, um CNF herzustellen.)

Zum Beispiel wird $x_1 \iff x_2$ zu $(\neg x_1 \lor x_2) \land (x_1 \lor \neg x_2)$.

CNF-Transformation

Die CNF-Transformation ist ein Verfahren,
um F in eine äquivalente CNF $f(F)$ umzuformen.

Schritte:

1. Löse $\iff$ und $\implies$ auf.
2. Schiebe Negationen nach innen und anschließend multipliziere aus.
   (Wende Distributivität, Kommutativität an, um CNF herzustellen.)

Zum Beispiel wird $x_1 \iff x_2$ zu $(\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2)$.

Aber der Algorithmus hat im schlechtesten Fall exponentielle Laufzeit und kann Klauseln erzeugen, die mehr als drei Literale enthalten.

CNF-Transformation

Die CNF-Transformation ist ein Verfahren,
um F in eine äquivalente CNF $f(F)$ umzuformen.

Schritte:

1. Löse $\iff$ und $\implies$ auf.
2. Schiebe Negationen nach innen und anschließend multipliziere aus.
   (Wende Distributivität, Kommutativität an, um CNF herzustellen.)

Zum Beispiel wird $x_1 \iff x_2$ zu $(\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2)$.

Aber der Algorithmus hat im schlechtesten Fall exponentielle Laufzeit und kann Klauseln erzeugen, die mehr als drei Literale enthalten.

Er kann daher nicht direkt für eine Polynomialzeitreduktion von SAT auf 3-CNF-SAT verwendet werden.

$\mathcal{NP}$-Schwere von 3-CNF-SAT

Satz

3-CNF-SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis (Fortsetzung)

2. 3-CNF-SAT ist $\mathcal{NP}$-schwer:

   Wir zeigen SAT $\leq_p$ 3-CNF-SAT.

   Gesucht wird eine polynomiell berechenbare, totale Funktion f, sodass:
   F ist erfüllbar g.d.w. die 3-CNF $f(F)$ ist erfüllbar.

$\mathcal{NP}$-Schwere von 3-CNF-SAT

Satz

3-CNF-SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis (Fortsetzung)

2. 3-CNF-SAT ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen SAT $\leq_p$ 3-CNF-SAT.

   Gesucht wird eine polynomiell berechenbare, totale Funktion f, sodass:
   F ist erfüllbar g.d.w. die 3-CNF $f(F)$ ist erfüllbar.

   Beachte: f muss die Erfüllbarkeit erhalten, aber nicht die Äquivalenz.

$\mathcal{NP}$-Schwere von 3-CNF-SAT

Satz

3-CNF-SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis (Fortsetzung)

2. 3-CNF-SAT ist $\mathcal{NP}$-schwer:
   Wir zeigen SAT $\leq_p$ 3-CNF-SAT.

   Gesucht wird eine polynomiell berechenbare, totale Funktion f, sodass:
   F ist erfüllbar g.d.w. die 3-CNF $f(F)$ ist erfüllbar.

   Beachte: f muss die Erfüllbarkeit erhalten, aber nicht die Äquivalenz.

   Die Tseitin-Transformation ist ein Verfahren, um F in eine erfüllbarkeitsäquivalente 3-CNF $f(F)$ umzuformen, sodass $f(F)$ polynomielle Größe in $|F|$ hat.

Tseitin-Transformation

Schritte:

1. Schiebe alle Negationen nach innen vor die Literale, dabei werden die Regeln $\neg\neg F \rightsquigarrow F$, $\neg(F \wedge G) \rightsquigarrow \neg F \vee \neg G$, $\neg(F \vee G) \rightsquigarrow \neg F \wedge \neg G$, $\neg(F \iff G) \rightsquigarrow \neg F \iff G$ und $\neg(F \implies G) \rightsquigarrow F \wedge \neg G$ angewendet.

Tseitin-Transformation

Schritte:

1. Schiebe alle Negationen nach innen vor die Literale, dabei werden die Regeln $\neg\neg F \rightsquigarrow F$, $\neg(F \wedge G) \rightsquigarrow \neg F \vee \neg G$, $\neg(F \vee G) \rightsquigarrow \neg F \wedge \neg G$, $\neg(F \iff G) \rightsquigarrow \neg F \iff G$ und $\neg(F \implies G) \rightsquigarrow F \wedge \neg G$ angewendet.
2. Bilde den Syntaxbaum der Formel, mit Literalen auf den Blättern.

Tseitin-Transformation

Schritte:

1. Schiebe alle Negationen nach innen vor die Literale, dabei werden die Regeln $\neg\neg F \leadsto F$, $\neg(F \wedge G) \leadsto \neg F \vee \neg G$, $\neg(F \vee G) \leadsto \neg F \wedge \neg G$, $\neg(F \iff G) \leadsto \neg F \iff G$ und $\neg(F \implies G) \leadsto F \wedge \neg G$ angewendet.
2. Bilde den Syntaxbaum der Formel, mit Literalen auf den Blättern.
3. Führe für jeden Nichtblatt-Knoten neue aussagenlogische Variable X ein, die als Synonym für eine Teilformel steht.

Tseitin-Transformation

Schritte:

1. Schiebe alle Negationen nach innen vor die Literale, dabei werden die Regeln $\neg\neg F \rightsquigarrow F$, $\neg(F \wedge G) \rightsquigarrow \neg F \vee \neg G$, $\neg(F \vee G) \rightsquigarrow \neg F \wedge \neg G$, $\neg(F \iff G) \rightsquigarrow \neg F \iff G$ und $\neg(F \implies G) \rightsquigarrow F \wedge \neg G$ angewendet.
2. Bilde den Syntaxbaum der Formel, mit Literalen auf den Blättern.
3. Führe für jeden Nichtblatt-Knoten neue aussagenlogische Variable X ein, die als Synonym für eine Teilformel steht.
4. Pro Gabelung
$$\begin{tikzcd} & \overset{X}{\otimes} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ L_1 & & L_2 \end{tikzcd}$$
erzeuge die Formel $X \iff (L_1 \otimes L_2)$, wobei $\otimes \in \{\wedge, \vee, \implies, \iff\}$ und L_1 bzw. L_2 entweder die neue Variable oder das Literal am Blatt ist.

Tseitin-Transformation

5. Konjugiere die erzeugten Formeln zu F' und schließlich erzeuge $W \wedge F'$, wobei W die Variable für die Wurzel ist.
   Die erzeugte Formel ist von der Form

$$W \wedge \bigwedge_{i,j,k} (X_i \iff (L_j \otimes_i L_k))$$

Tseitin-Transformation

5. Konjugiere die erzeugten Formeln zu F' und schließlich erzeuge $W \wedge F'$, wobei W die Variable für die Wurzel ist.
   Die erzeugte Formel ist von der Form

$$W \wedge \bigwedge_{i,j,k} (X_i \iff (L_j \otimes_i L_k))$$

6. Berechne für jede Teilformel $X_i \iff (L_j \otimes_i L_k)$ die CNF mit der üblichen CNF-Transformation.

Tseitin-Transformation

5. Konjugiere die erzeugten Formeln zu F' und schließlich erzeuge $W \wedge F'$, wobei W die Variable für die Wurzel ist.
   Die erzeugte Formel ist von der Form
   $$W \wedge \bigwedge_{i,j,k} (X_i \iff (L_j \otimes_i L_k))$$
6. Berechne für jede Teilformel $X_i \iff (L_j \otimes_i L_k)$ die CNF mit der üblichen CNF-Transformation.
7. Lösche doppelte Vorkommen von Literalen.

Tseitin-Transformation

5. Konjugiere die erzeugten Formeln zu F' und schließlich erzeuge $W \wedge F'$, wobei W die Variable für die Wurzel ist.
   Die erzeugte Formel ist von der Form
   $$W \wedge \bigwedge_{i,j,k} (X_i \iff (L_j \otimes_i L_k))$$
6. Berechne für jede Teilformel $X_i \iff (L_j \otimes_i L_k)$ die CNF mit der üblichen CNF-Transformation.
7. Lösche doppelte Vorkommen von Literalen.

Diese Prozedur ergibt eine Formel in 3-CNF,
da pro Klausel nur drei verschiedene Variablen vorkommen können.

Beispiel für die Tseitin-Transformation

Sei $F = \neg(\neg(x_3 \Longrightarrow \neg x_1) \vee x_2)$.

Beispiel für die Tseitin-Transformation

Sei $F = \neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1) \vee x_2)$.

Negationen nach innen schieben:

$$
\begin{aligned}
& \neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1) \vee x_2) \\
\rightsquigarrow\ & \neg\neg(x_3 \implies \neg x_1) \wedge \neg x_2 \\
\rightsquigarrow\ & (x_3 \implies \neg x_1) \wedge \neg x_2
\end{aligned}
$$

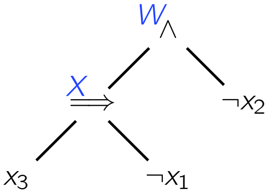
Beispiel für die Tseitin-Transformation

Sei $F = \neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1) \vee x_2)$.

Negationen nach innen schieben:

$$
\begin{aligned}
& \neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1) \vee x_2) \\
\rightsquigarrow\ & \neg\neg(x_3 \implies \neg x_1) \wedge \neg x_2 \\
\rightsquigarrow\ & (x_3 \implies \neg x_1) \wedge \neg x_2
\end{aligned}
$$

Syntaxbaum dazu:



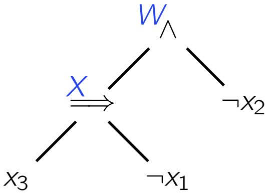
Beispiel für die Tseitin-Transformation

Sei $F = \neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1) \vee x_2)$.

Negationen nach innen schieben:

$$\begin{aligned} & \neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1) \vee x_2) \\ \leadsto\ & \neg\neg(x_3 \implies \neg x_1) \wedge \neg x_2 \\ \leadsto\ & (x_3 \implies \neg x_1) \wedge \neg x_2 \end{aligned}$$

Syntaxbaum dazu:



Formel: $W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$

Beispiel für die Tseitin-Transformation

Berechnung der CNFs der kleinen Teilformeln:

$$W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$

Beispiel für die Tseitin-Transformation

Berechnung der CNFs der kleinen Teilformeln:

$$
\begin{aligned}
& W \land (W \iff (X \land \neg x_2)) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \land (W \lor \neg(X \land \neg x_2)) \land (\neg W \lor (X \land \neg x_2)) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))
\end{aligned}
$$

Beispiel für die Tseitin-Transformation

Berechnung der CNFs der kleinen Teilformeln:

$$W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$

$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg(X \wedge \neg x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$

$$\rightsquigarrow W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))$$

Beispiel für die Tseitin-Transformation

Berechnung der CNFs der kleinen Teilformeln:

$$
\begin{aligned}
& W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg(X \wedge \neg x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge {\color{red}(\neg W \vee (X \wedge \neg x_2))} \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge {\color{blue}(\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2)} \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1))
\end{aligned}
$$

Beispiel für die Tseitin-Transformation

Berechnung der CNFs der kleinen Teilformeln:

$$
\begin{aligned}
& W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg(X \wedge \neg x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (\neg X \vee (x_3 \implies \neg x_1)) \wedge (X \vee \neg(x_3 \implies \neg x_1))
\end{aligned}
$$

Beispiel für die Tseitin-Transformation

Berechnung der CNFs der kleinen Teilformeln:

$$
\begin{aligned}
& W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg(X \wedge \neg x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge {\color{red}(\neg X \vee (x_3 \implies \neg x_1)) \wedge (X \vee \neg(x_3 \implies \neg x_1))} \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge {\color{blue}(\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee \neg(\neg x_3 \vee \neg x_1))}
\end{aligned}
$$

Beispiel für die Tseitin-Transformation

Berechnung der CNFs der kleinen Teilformeln:

$$
\begin{aligned}
& W \land (W \iff (X \land \neg x_2)) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\leadsto\ & W \land (W \lor \neg(X \land \neg x_2)) \land (\neg W \lor (X \land \neg x_2)) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\leadsto\ & W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor (X \land \neg x_2)) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\leadsto\ & W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\leadsto\ & W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (\neg X \lor (x_3 \implies \neg x_1)) \land (X \lor \neg(x_3 \implies \neg x_1)) \\
\leadsto\ & W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (\neg X \lor \neg x_3 \lor \neg x_1) \land \color{red}{(X \lor \neg(\neg x_3 \lor \neg x_1))} \\
\leadsto\ & W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (\neg X \lor \neg x_3 \lor \neg x_1) \land \color{blue}{(X \lor (x_3 \land x_1))}
\end{aligned}
$$

Beispiel für die Tseitin-Transformation

Berechnung der CNFs der kleinen Teilformeln:

$$
\begin{aligned}
& W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg(X \wedge \neg x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (\neg X \vee (x_3 \implies \neg x_1)) \wedge (X \vee \neg(x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee \neg(\neg x_3 \vee \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee (x_3 \wedge x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee x_3) \wedge (X \vee x_1)
\end{aligned}
$$

Beispiel für die Tseitin-Transformation

Berechnung der CNFs der kleinen Teilformeln:

$$
\begin{aligned}
& W \land (W \iff (X \land \neg x_2)) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \land (W \lor \neg(X \land \neg x_2)) \land (\neg W \lor (X \land \neg x_2)) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor (X \land \neg x_2)) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (\neg X \lor (x_3 \implies \neg x_1)) \land (X \lor \neg(x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (\neg X \lor \neg x_3 \lor \neg x_1) \land (X \lor \neg(\neg x_3 \lor \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (\neg X \lor \neg x_3 \lor \neg x_1) \land (X \lor (x_3 \land x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (\neg X \lor \neg x_3 \lor \neg x_1) \land (X \lor x_3) \land (X \lor x_1)
\end{aligned}
$$

Die erzeugte Formel $f(F)$ ist erfüllbarkeitsäquivalent zu $F = \neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1) \lor x_2)$.
Zum Beispiel:

Beispiel für die Tseitin-Transformation

Berechnung der CNFs der kleinen Teilformeln:

$$
\begin{aligned}
& W \wedge (W \iff (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg(X \wedge \neg x_2)) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee (X \wedge \neg x_2)) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (\neg X \vee (x_3 \implies \neg x_1)) \wedge (X \vee \neg(x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee \neg(\neg x_3 \vee \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee (x_3 \wedge x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \wedge (W \vee \neg X \vee x_2) \wedge (\neg W \vee X) \wedge (\neg W \vee \neg x_2) \wedge (\neg X \vee \neg x_3 \vee \neg x_1) \wedge (X \vee x_3) \wedge (X \vee x_1)
\end{aligned}
$$

Die erzeugte Formel $f(F)$ ist erfüllbarkeitsäquivalent zu $F = \neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1) \vee x_2)$.
Zum Beispiel:

Erfüllende Belegung I für $f(F)$:
$I(x_1) = 0,\ I(x_2) = 0,\ I(x_3) = 1,\ I(W) = 1,\ I(X) = 1$

Beispiel für die Tseitin-Transformation

Berechnung der CNFs der kleinen Teilformeln:

$$
\begin{aligned}
& W \land (W \iff (X \land \neg x_2)) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \land (W \lor \neg(X \land \neg x_2)) \land (\neg W \lor (X \land \neg x_2)) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor (X \land \neg x_2)) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (X \iff (x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (\neg X \lor (x_3 \implies \neg x_1)) \land (X \lor \neg(x_3 \implies \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (\neg X \lor \neg x_3 \lor \neg x_1) \land (X \lor \neg(\neg x_3 \lor \neg x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (\neg X \lor \neg x_3 \lor \neg x_1) \land (X \lor (x_3 \land x_1)) \\
\rightsquigarrow\ & W \land (W \lor \neg X \lor x_2) \land (\neg W \lor X) \land (\neg W \lor \neg x_2) \land (\neg X \lor \neg x_3 \lor \neg x_1) \land (X \lor x_3) \land (X \lor x_1)
\end{aligned}
$$

Die erzeugte Formel $f(F)$ ist erfüllbarkeitsäquivalent zu $F = \neg(\neg(x_3 \implies \neg x_1) \lor x_2)$.
Zum Beispiel:

Erfüllende Belegung I für $f(F)$:
$I(x_1) = 0,\ I(x_2) = 0,\ I(x_3) = 1,\ I(W) = 1,\ I(X) = 1$

Erfüllende Belegung I' für F:
$I'(x_1) = 0,\ I'(x_2) = 0,\ I'(x_3) = 1$

Erfüllbarkeitsäquivalenz der Tseitin-Transformation

Beweis (Fortsetzung)

Wir zeigen: F ist erfüllbar g.d.w. $f(F)$ ist erfüllbar.

Erfüllbarkeitsäquivalenz der Tseitin-Transformation

Beweis (Fortsetzung)

Wir zeigen: F ist erfüllbar g.d.w. $f(F)$ ist erfüllbar.

$\Longleftarrow$ Sei I eine Belegung mit $I(f(F)) = 1$.
Für die Restriktion I' von I auf die Variablen von F gilt $I'(F) = 1$.

Erfüllbarkeitsäquivalenz der Tseitin-Transformation

Beweis (Fortsetzung)

Wir zeigen: F ist erfüllbar g.d.w. $f(F)$ ist erfüllbar.

$\Longleftarrow$ Sei I eine Belegung mit $I(f(F)) = 1$.
Für die Restriktion I' von I auf die Variablen von F gilt $I'(F) = 1$.

$\Longrightarrow$ Sei I eine Belegung mit $I(F) = 1$.
Sei I' die Belegung mit

- $I'(x) = I(x)$ für alle Variablen x, die in F vorkommen
- $I'(X) = I'(L_1 \otimes L_2)$ für

$$
\begin{tikzcd}
 & \overset{X}{\otimes} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
L_1 & & L_2
\end{tikzcd}
$$

Dann gilt $I'(f(F)) = 1$.

Komplexität der Tseitin-Transformation

Beweis (Fortsetzung)

Es bleibt zu zeigen, dass f polynomiell berechenbar ist.

Komplexität der Tseitin-Transformation

Beweis (Fortsetzung)

Es bleibt zu zeigen, dass f polynomiell berechenbar ist.

Die Größe der Teilformeln, die in CNF gebracht werden, ist konstant.

Die Anzahl der Teilformeln, die erzeugt werden, ist proportional zur Größe des Syntaxbaums.

Die Größe der 3-CNF ist also polynomiell in der ursprünglichen Formel F.

Die Berechnung in Polynomialzeit geht.

Komplexität der Tseitin-Transformation

Beweis (Fortsetzung)

Es bleibt zu zeigen, dass f polynomiell berechenbar ist.

Die Größe der Teilformeln, die in CNF gebracht werden, ist konstant.

Die Anzahl der Teilformeln, die erzeugt werden, ist proportional zur Größe des Syntaxbaums.

Die Größe der 3-CNF ist also polynomiell in der ursprünglichen Formel F.

Die Berechnung in Polynomialzeit geht.

Daher: SAT $\leq_p$ 3-CNF-SAT.
Da SAT $\mathcal{NP}$-schwer ist, folgt dass 3-CNF-SAT $\mathcal{NP}$-schwer ist. $\square$