LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

Formale Sprachen und Komplexität
Theoretische Informatik für Studierende der Medieninformatik
Sommersemester 2024

10c
Reduktion und der Satz von Rice

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 2. Juli 2024
Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel

Reduktion

- Reduktion ist ein Hilfsmittel, um Unentscheidbarkeit nachzuweisen.
- Statt Unentscheidbarkeit von Sprache L von Grund auf neu zu beweisen, zeige: Wenn man L entscheiden könnte, dann könnte man auch K (d.h. das spezielle Halteproblem) entscheiden.
- Da K bereits als unentscheidbar gezeigt wurde, folgt L ist unentscheidbar.
- Statt K können wir eine beliebige Sprache nehmen, die bereits als unentscheidbar bewiesen ist.

Definition von Reduktion

Definition

Seien $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ Sprachen.
Dann sagen wir L_1 ist auf L_2 reduzierbar (geschrieben $L_1 \leq L_2$), falls es eine totale berechenbare Funktion $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ gibt, sodass für alle $w \in \Sigma_1^*$ gilt: $w \in L_1$ g.d.w. $f(w) \in L_2$.
Die Funktion f nennt man Reduktion.

Definition von Reduktion

Definition

Seien $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ Sprachen.
Dann sagen wir L_1 ist auf L_2 reduzierbar (geschrieben $L_1 \leq L_2$), falls es eine totale berechenbare Funktion $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ gibt, sodass für alle $w \in \Sigma_1^*$ gilt: $w \in L_1$ g.d.w. $f(w) \in L_2$.
Die Funktion f nennt man Reduktion.

Eselsbrücke:

$$\underbrace{L_1}_{\text{„kleines“ Problem}} \leq \underbrace{L_2}_{\text{„großes“ Problem}}$$

Definition von Reduktion

Definition

Seien $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ Sprachen.
Dann sagen wir L_1 ist auf L_2 reduzierbar (geschrieben $L_1 \leq L_2$), falls es eine totale berechenbare Funktion $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ gibt, sodass für alle $w \in \Sigma_1^*$ gilt: $w \in L_1$ g.d.w. $f(w) \in L_2$.
Die Funktion f nennt man Reduktion.

Eselsbrücke:

$$\underbrace{L_1}_{\text{„kleines" Problem}} \leq \underbrace{L_2}_{\text{„großes" Problem}}$$

- $\leq$ sagt die Wahrheit.
- „Reduktion" täuscht.
  Man reduziert das „kleine" Problem auf das „große".

Nachweis der (Semi-)Entscheidbarkeit

Satz

Wenn $L_1 \leq L_2$ und L_2 entscheidbar ist, dann ist auch L_1 entscheidbar.

Nachweis der (Semi-)Entscheidbarkeit

Satz

Wenn $L_1 \leq L_2$ und L_2 entscheidbar ist, dann ist auch L_1 entscheidbar.

Beweis Sei f die $L_1 \leq L_2$ bezeugende Funktion. Da L_2 entscheidbar ist, ist χ_{L_2} berechenbar. Es gilt

$$\chi_{L_1}(w) = 1 \text{ g.d.w. } w \in L_1 \text{ g.d.w. } f(w) \in L_2 \text{ g.d.w. } \chi_{L_2}(f(w)) = 1$$

Damit ist $\chi_{L_1}(w) = \chi_{L_2}(f(w))$ berechenbar. □

Nachweis der (Semi-)Entscheidbarkeit

Satz

Wenn $L_1 \leq L_2$ und L_2 entscheidbar ist, dann ist auch L_1 entscheidbar.

Beweis Sei f die $L_1 \leq L_2$ bezeugende Funktion. Da L_2 entscheidbar ist, ist χ_{L_2} berechenbar. Es gilt

$$\chi_{L_1}(w) = 1 \text{ g.d.w. } w \in L_1 \text{ g.d.w. } f(w) \in L_2 \text{ g.d.w. } \chi_{L_2}(f(w)) = 1$$

Damit ist $\chi_{L_1}(w) = \chi_{L_2}(f(w))$ berechenbar. $\square$

Satz

Wenn $L_1 \leq L_2$ und L_2 semi-entscheidbar ist, dann ist auch L_1 semi-entscheidbar.

Nachweis der (Semi-)Entscheidbarkeit

Satz

Wenn $L_1 \leq L_2$ und L_2 entscheidbar ist, dann ist auch L_1 entscheidbar.

Beweis Sei f die $L_1 \leq L_2$ bezeugende Funktion. Da L_2 entscheidbar ist, ist χ_{L_2} berechenbar. Es gilt

$$\chi_{L_1}(w) = 1 \text{ g.d.w. } w \in L_1 \text{ g.d.w. } f(w) \in L_2 \text{ g.d.w. } \chi_{L_2}(f(w)) = 1$$

Damit ist $\chi_{L_1}(w) = \chi_{L_2}(f(w))$ berechenbar. □

Satz

Wenn $L_1 \leq L_2$ und L_2 semi-entscheidbar ist, dann ist auch L_1 semi-entscheidbar.

Beweis Analog. □

Nachweis der Unentscheidbarkeit

Mit Kontraposition folgt:

Lemma

Wenn $L_1 \leq L_2$ und L_1 unentscheidbar ist, dann ist auch L_2 unentscheidbar.

Das ist die Richtung, die wir meistens brauchen:

1. L_1 sei eine bekannt unentscheidbare Sprache (z.B. K).
2. Reduziere L_1 auf L_2 durch Angabe einer totalen berechenbaren Funktion f mit $w \in L_1$ g.d.w. $f(w) \in L_2$.
3. Damit folgt, dass L_2 unentscheidbar ist.

Halteproblem

Definition

Das (allgemeine) Halteproblem ist die Sprache
$H := \{w\#x \mid \text{TM } M_w \text{ hält für Eingabe } x\}$.

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Satz

Das allgemeine Halteproblem ist unentscheidbar.

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Satz

Das allgemeine Halteproblem ist unentscheidbar.

Beweis Wir reduzieren das spezielle Halteproblem auf das allgemeine Halteproblem, und zeigen daher $K \leq H$. Sei $f(w) = w\#w$.

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Satz

Das allgemeine Halteproblem ist unentscheidbar.

Beweis Wir reduzieren das spezielle Halteproblem auf das allgemeine Halteproblem, und zeigen daher $K \leq H$. Sei $f(w) = w\#w$.

Dann gilt

$$w \in K$$

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Satz

Das allgemeine Halteproblem ist unentscheidbar.

Beweis Wir reduzieren das spezielle Halteproblem auf das allgemeine Halteproblem, und zeigen daher $K \leq H$. Sei $f(w) = w\#w$.

Dann gilt

$$w \in K$$

$$\text{g.d.w. } M_w \text{ hält für Eingabe } w$$

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Satz

Das allgemeine Halteproblem ist unentscheidbar.

Beweis Wir reduzieren das spezielle Halteproblem auf das allgemeine Halteproblem, und zeigen daher $K \leq H$. Sei $f(w) = w\#w$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} & w \in K \\ \text{g.d.w. } & M_w \text{ hält für Eingabe } w \end{aligned}$$

$$f(w) \in H$$

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Satz

Das allgemeine Halteproblem ist unentscheidbar.

Beweis Wir reduzieren das spezielle Halteproblem auf das allgemeine Halteproblem, und zeigen daher $K \leq H$. Sei $f(w) = w\#w$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} & w \in K \\ \text{g.d.w. } & M_w \text{ hält für Eingabe } w \\ & w\#w \in H \\ \text{g.d.w. } & f(w) \in H \end{aligned}$$

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Satz

Das allgemeine Halteproblem ist unentscheidbar.

Beweis Wir reduzieren das spezielle Halteproblem auf das allgemeine Halteproblem, und zeigen daher $K \leq H$. Sei $f(w) = w\#w$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} & w \in K \\ \text{g.d.w. } & M_w \text{ hält für Eingabe } w \\ \text{g.d.w. } & w\#w \in H \\ \text{g.d.w. } & f(w) \in H \end{aligned}$$

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Satz

Das allgemeine Halteproblem ist unentscheidbar.

Beweis Wir reduzieren das spezielle Halteproblem auf das allgemeine Halteproblem, und zeigen daher $K \leq H$. Sei $f(w) = w\#w$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} & w \in K \\ \text{g.d.w. } & M_w \text{ hält für Eingabe } w \\ \text{g.d.w. } & w\#w \in H \\ \text{g.d.w. } & f(w) \in H \end{aligned}$$

f kann durch eine TM berechnet werden. Daher gilt $K \leq H$. Da K unentscheidbar ist, ist H unentscheidbar. □

Halteproblem auf leerem Band

Definition

Das Halteproblem auf leerem Band ist die Sprache
$H_0 := \{w \mid M_w \text{ hält für die leere Eingabe}\}$.

Unentscheidbarkeit des Halteproblems auf leerem Band

Satz

Das Halteproblem auf leerem Band ist unentscheidbar.

Unentscheidbarkeit des Halteproblems auf leerem Band

Satz

Das Halteproblem auf leerem Band ist unentscheidbar.

Beweis Wir reduzieren H auf H_0: Sei $f(w_M\#x) = w_{M_x}$, wobei die DTM M_x erst x auf das Band schreibt, sich dann wie M verhält.

Unentscheidbarkeit des Halteproblems auf leerem Band

Satz

Das Halteproblem auf leerem Band ist unentscheidbar.

Beweis Wir reduzieren H auf H_0: Sei $f(w_M\#x) = w_{M_x}$, wobei die DTM M_x erst x auf das Band schreibt, sich dann wie M verhält.

Dann gilt

$$w_M\#x \in H$$

Unentscheidbarkeit des Halteproblems auf leerem Band

Satz

Das Halteproblem auf leerem Band ist unentscheidbar.

Beweis Wir reduzieren H auf H_0: Sei $f(w_M\#x) = w_{M_x}$, wobei die DTM M_x erst x auf das Band schreibt, sich dann wie M verhält.

Dann gilt

$$\begin{aligned} & w_M\#x \in H \\ \text{g.d.w. } & M \text{ hält für Eingabe } x \end{aligned}$$

Unentscheidbarkeit des Halteproblems auf leerem Band

Satz

Das Halteproblem auf leerem Band ist unentscheidbar.

Beweis Wir reduzieren H auf H_0: Sei $f(w_M\#x) = w_{M_x}$, wobei die DTM M_x erst x auf das Band schreibt, sich dann wie M verhält.

Dann gilt

$$w_M\#x \in H$$

g.d.w. M hält für Eingabe x

$$f(w_M\#x) \in H_0$$

Unentscheidbarkeit des Halteproblems auf leerem Band

Satz

Das Halteproblem auf leerem Band ist unentscheidbar.

Beweis Wir reduzieren H auf H_0: Sei $f(w_M\#x) = w_{M_x}$, wobei die DTM M_x erst x auf das Band schreibt, sich dann wie M verhält.

Dann gilt

$$w_M\#x \in H$$
g.d.w. M hält für Eingabe x

$$w_{M_x} \in H_0$$
g.d.w. $f(w_M\#x) \in H_0$

Unentscheidbarkeit des Halteproblems auf leerem Band

Satz

Das Halteproblem auf leerem Band ist unentscheidbar.

Beweis Wir reduzieren H auf H_0: Sei $f(w_M\#x) = w_{M_x}$, wobei die DTM M_x erst x auf das Band schreibt, sich dann wie M verhält.

Dann gilt

$$\begin{aligned} & w_M\#x \in H \\ \text{g.d.w. } & M \text{ hält für Eingabe } x \\ & M_x \text{ hält für die leere Eingabe} \\ \text{g.d.w. } & w_{M_x} \in H_0 \\ \text{g.d.w. } & f(w_M\#x) \in H_0 \end{aligned}$$

Unentscheidbarkeit des Halteproblems auf leerem Band

Satz

Das Halteproblem auf leerem Band ist unentscheidbar.

Beweis Wir reduzieren H auf H_0: Sei $f(w_M\#x) = w_{M_x}$, wobei die DTM M_x erst x auf das Band schreibt, sich dann wie M verhält.

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
& w_M\#x \in H \\
\text{g.d.w. } & M \text{ hält für Eingabe } x \\
\text{g.d.w. } & M_x \text{ hält für die leere Eingabe} \\
\text{g.d.w. } & w_{M_x} \in H_0 \\
\text{g.d.w. } & f(w_M\#x) \in H_0
\end{aligned}
$$

Unentscheidbarkeit des Halteproblems auf leerem Band

Satz

Das Halteproblem auf leerem Band ist unentscheidbar.

Beweis Wir reduzieren H auf H_0: Sei $f(w_M\#x) = w_{M_x}$, wobei die DTM M_x erst x auf das Band schreibt, sich dann wie M verhält.

Dann gilt

$$\begin{aligned} & w_M\#x \in H \\ \text{g.d.w. } & M \text{ hält für Eingabe } x \\ \text{g.d.w. } & M_x \text{ hält für die leere Eingabe} \\ \text{g.d.w. } & w_{M_x} \in H_0 \\ \text{g.d.w. } & f(w_M\#x) \in H_0 \end{aligned}$$

f kann durch eine Turingmaschine berechnet werden. Daher gilt $H \leq H_0$.
Da H unentscheidbar ist, ist H_0 unentscheidbar. □

Der Satz von Rice

Satz von Rice

Sei $\mathcal{R}$ die Klasse aller turingberechenbaren Funktionen. Sei $\mathcal{S}$ eine beliebige Teilmenge, sodass $\emptyset \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{R}$. Dann ist folgende Sprache unentscheidbar:

$$C(\mathcal{S}) = \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$$

Der Satz von Rice

Satz von Rice

Sei $\mathcal{R}$ die Klasse aller turingberechenbaren Funktionen. Sei $\mathcal{S}$ eine beliebige Teilmenge, sodass $\emptyset \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{R}$. Dann ist folgende Sprache unentscheidbar:

$$C(\mathcal{S}) = \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$$

Der Satz wurde von Henry Gordon Rice 1953 veröffentlicht. Er zeigt:

- Fast alle interessanten Eigenschaften von Turingmaschinen sind algorithmisch nicht entscheidbar.
- Z.B. folgt, dass die Sprache $L = \{w \mid M_w \text{ berechnet eine konstante Funktion}\}$ nicht entscheidbar ist.

Der Satz von Rice

Satz von Rice

Sei $\mathcal{R}$ die Klasse aller turingberechenbaren Funktionen. Sei $\mathcal{S}$ eine beliebige Teilmenge, sodass $\emptyset \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{R}$. Dann ist folgende Sprache unentscheidbar:

$$C(\mathcal{S}) = \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$$

Beweis Sei $\Omega(x) =$ undefiniert für alle x.

Der Satz von Rice

Satz von Rice

Sei $\mathcal{R}$ die Klasse aller turingberechenbaren Funktionen. Sei $\mathcal{S}$ eine beliebige Teilmenge, sodass $\emptyset \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{R}$. Dann ist folgende Sprache unentscheidbar:

$$C(\mathcal{S}) = \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$$

Beweis Sei $\Omega(x) =$ undefiniert für alle x.

Zeige:

1. $H_0 \leq C(\mathcal{S})$ falls $\Omega \notin \mathcal{S}$.
2. $H_0 \leq C(\mathcal{S})$ falls $\Omega \in \mathcal{S}$.

Der Satz von Rice

Satz von Rice

Sei $\mathcal{R}$ die Klasse aller turingberechenbaren Funktionen. Sei $\mathcal{S}$ eine beliebige Teilmenge, sodass $\emptyset \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{R}$. Dann ist folgende Sprache unentscheidbar:

$$C(\mathcal{S}) = \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$$

Beweis Sei $\Omega(x) =$ undefiniert für alle x.

Zeige:

1. $H_0 \leq C(\mathcal{S})$ falls $\Omega \notin \mathcal{S}$.
2. $H_0 \leq C(\mathcal{S})$ falls $\Omega \in \mathcal{S}$.

Wir beweisen nur Punkt 1, da Punkt 2 analog geht (siehe Skript).

Der Satz von Rice

- Fall $\Omega \notin \mathcal{S}$: Da $\emptyset \subset \mathcal{S}$, gibt es eine Funktion $q \in \mathcal{S}$, die von einer DTM Q berechnet wird.

Der Satz von Rice

- Fall $\Omega \notin \mathcal{S}$: Da $\emptyset \subset \mathcal{S}$, gibt es eine Funktion $q \in \mathcal{S}$, die von einer DTM Q berechnet wird.

  Wir konstruieren eine DTM M^*. Für DTM M und Eingabe y:

  1. M^* simuliert M auf leerer Eingabe.
  2. Wenn M anhält, dann simuliert M^* die DTM Q mit Eingabe y.

Der Satz von Rice

- Fall $\Omega \notin \mathcal{S}$: Da $\emptyset \subset \mathcal{S}$, gibt es eine Funktion $q \in \mathcal{S}$, die von einer DTM Q berechnet wird.

  Wir konstruieren eine DTM M^*. Für DTM M und Eingabe y:

  1. M^* simuliert M auf leerer Eingabe.
  2. Wenn M anhält, dann simuliert M^* die DTM Q mit Eingabe y.

  Sei f die Funktion, die aus der Beschreibung w für DTM M_w die Beschreibung $f(w)$ von M_w^* erstellt. Diese Funktion ist total und berechenbar.

Der Satz von Rice

- Fall $\Omega \notin \mathcal{S}$: Da $\emptyset \subset \mathcal{S}$, gibt es eine Funktion $q \in \mathcal{S}$, die von einer DTM Q berechnet wird.

  Wir konstruieren eine DTM M^*. Für DTM M und Eingabe y:

  1. M^* simuliert M auf leerer Eingabe.
  2. Wenn M anhält, dann simuliert M^* die DTM Q mit Eingabe y.

  Sei f die Funktion, die aus der Beschreibung w für DTM M_w die Beschreibung $f(w)$ von M_w^* erstellt. Diese Funktion ist total und berechenbar.

  Wir müssen noch zeigen, dass $w \in H_0$ g.d.w. $f(w) \in C(\mathcal{S})$.

Der Satz von Rice

$\Longrightarrow$ Dann gilt

$$w \in H_0$$

Der Satz von Rice

$\Longrightarrow$ Dann gilt

$$w \in H_0 \Longrightarrow M_w \text{ hält auf leerer Eingabe}$$

Der Satz von Rice

$\Longrightarrow$ Dann gilt

$$\begin{aligned} w \in H_0 &\Longrightarrow M_w \text{ hält auf leerer Eingabe} \\ &\Longrightarrow M_w^* \text{ berechnet } q \end{aligned}$$

Der Satz von Rice

$\Longrightarrow$ Dann gilt

$$\begin{aligned} w \in H_0 &\Longrightarrow M_w \text{ hält auf leerer Eingabe} \\ &\Longrightarrow M_w^* \text{ berechnet } q \\ &\Longrightarrow \text{die von } M_w^* \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S} \end{aligned}$$

Der Satz von Rice

$\Longrightarrow$ Dann gilt

$$\begin{aligned} w \in H_0 &\Longrightarrow M_w \text{ hält auf leerer Eingabe} \\ &\Longrightarrow M_w^* \text{ berechnet } q \\ &\Longrightarrow \text{die von } M_w^* \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S} \\ &\Longrightarrow f(w) \in C(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

Der Satz von Rice

$\Longrightarrow$ Dann gilt

$$
\begin{aligned}
w \in H_0 &\Longrightarrow M_w \text{ hält auf leerer Eingabe}\\
&\Longrightarrow M_w^* \text{ berechnet } q\\
&\Longrightarrow \text{die von } M_w^* \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\\
&\Longrightarrow f(w) \in C(\mathcal{S})
\end{aligned}
$$

$\Longleftarrow$ Statt $f(w) \in C(\mathcal{S}) \Longrightarrow w \in H_0$ beweisen wir die Kontraposition $w \notin H_0 \Longrightarrow f(w) \notin C(\mathcal{S})$.

Der Satz von Rice

$\Longrightarrow$ Dann gilt

$$\begin{aligned} w \in H_0 &\Longrightarrow M_w \text{ hält auf leerer Eingabe} \\ &\Longrightarrow M_w^* \text{ berechnet } q \\ &\Longrightarrow \text{die von } M_w^* \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S} \\ &\Longrightarrow f(w) \in C(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ Statt $f(w) \in C(\mathcal{S}) \Longrightarrow w \in H_0$ beweisen wir die Kontraposition $w \notin H_0 \Longrightarrow f(w) \notin C(\mathcal{S})$.

$$w \notin H_0$$

Der Satz von Rice

$\Longrightarrow$ Dann gilt

$$\begin{aligned} w \in H_0 &\Longrightarrow M_w \text{ hält auf leerer Eingabe} \\ &\Longrightarrow M_w^* \text{ berechnet } q \\ &\Longrightarrow \text{die von } M_w^* \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S} \\ &\Longrightarrow f(w) \in C(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ Statt $f(w) \in C(\mathcal{S}) \Longrightarrow w \in H_0$ beweisen wir die Kontraposition $w \notin H_0 \Longrightarrow f(w) \notin C(\mathcal{S})$.

$$w \notin H_0 \Longrightarrow M_w \text{ hält nicht auf leerer Eingabe}$$

Der Satz von Rice

$\Longrightarrow$ Dann gilt

$$\begin{aligned} w \in H_0 &\Longrightarrow M_w \text{ hält auf leerer Eingabe} \\ &\Longrightarrow M_w^* \text{ berechnet } q \\ &\Longrightarrow \text{die von } M_w^* \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S} \\ &\Longrightarrow f(w) \in C(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ Statt $f(w) \in C(\mathcal{S}) \Longrightarrow w \in H_0$ beweisen wir die Kontraposition $w \notin H_0 \Longrightarrow f(w) \notin C(\mathcal{S})$.

$$\begin{aligned} w \notin H_0 &\Longrightarrow M_w \text{ hält nicht auf leerer Eingabe} \\ &\Longrightarrow M_w^* \text{ berechnet } \Omega \end{aligned}$$

Der Satz von Rice

$\Longrightarrow$ Dann gilt

$$\begin{aligned} w \in H_0 &\Longrightarrow M_w \text{ hält auf leerer Eingabe} \\ &\Longrightarrow M_w^* \text{ berechnet } q \\ &\Longrightarrow \text{die von } M_w^* \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S} \\ &\Longrightarrow f(w) \in C(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ Statt $f(w) \in C(\mathcal{S}) \Longrightarrow w \in H_0$ beweisen wir die Kontraposition $w \notin H_0 \Longrightarrow f(w) \notin C(\mathcal{S})$.

$$\begin{aligned} w \notin H_0 &\Longrightarrow M_w \text{ hält nicht auf leerer Eingabe} \\ &\Longrightarrow M_w^* \text{ berechnet } \Omega \\ &\Longrightarrow \text{die von } M_w^* \text{ berechnete Funktion liegt nicht in } \mathcal{S} \end{aligned}$$

Der Satz von Rice

$\implies$ Dann gilt

$$\begin{aligned} w \in H_0 &\implies M_w \text{ hält auf leerer Eingabe} \\ &\implies M_w^* \text{ berechnet } q \\ &\implies \text{die von } M_w^* \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S} \\ &\implies f(w) \in C(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

$\impliedby$ Statt $f(w) \in C(\mathcal{S}) \implies w \in H_0$ beweisen wir die Kontraposition $w \notin H_0 \implies f(w) \notin C(\mathcal{S})$.

$$\begin{aligned} w \notin H_0 &\implies M_w \text{ hält nicht auf leerer Eingabe} \\ &\implies M_w^* \text{ berechnet } \Omega \\ &\implies \text{die von } M_w^* \text{ berechnete Funktion liegt nicht in } \mathcal{S} \\ &\implies f(w) \notin C(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

Der Satz von Rice

$\Longrightarrow$ Dann gilt

$$\begin{aligned} w \in H_0 &\Longrightarrow M_w \text{ hält auf leerer Eingabe} \\ &\Longrightarrow M_w^* \text{ berechnet } q \\ &\Longrightarrow \text{die von } M_w^* \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S} \\ &\Longrightarrow f(w) \in C(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ Statt $f(w) \in C(\mathcal{S}) \Longrightarrow w \in H_0$ beweisen wir die Kontraposition $w \notin H_0 \Longrightarrow f(w) \notin C(\mathcal{S})$.

$$\begin{aligned} w \notin H_0 &\Longrightarrow M_w \text{ hält nicht auf leerer Eingabe} \\ &\Longrightarrow M_w^* \text{ berechnet } \Omega \\ &\Longrightarrow \text{die von } M_w^* \text{ berechnete Funktion liegt nicht in } \mathcal{S} \\ &\Longrightarrow f(w) \notin C(\mathcal{S}) \end{aligned}$$

Daher $H_0 \leq C(\mathcal{S})$. Da H_0 unentscheidbar ist, ist damit auch $C(\mathcal{S})$ unentscheidbar. $\square$

Anwendung des Satzes von Rice

Sei L eine Sprache, die als unentscheidbar zu beweisen ist.

Schritte:

1. Definiere Menge S von Funktionen.
2. Zeige Nichttrivialität von S.
3. Begründe, dass S richtig gewählt, d.h. $C(S) = L$.
4. Der Satz von Rice zeigt dann das Resultat.

Erstes Beispiel für die Anwendung des Satzes von Rice

Satz

Es ist unentscheidbar, ob eine Turingmaschine für jede Eingabe $i \in \mathbb{N}$ die Zahl $i + 1 \in \mathbb{N}$ berechnet.

Beweis Sei $succ(i) = i + 1$. Sei $\mathcal{S} := \{succ\}$.

Erstes Beispiel für die Anwendung des Satzes von Rice

Satz

Es ist unentscheidbar, ob eine Turingmaschine für jede Eingabe $i \in \mathbb{N}$ die Zahl $i + 1 \in \mathbb{N}$ berechnet.

Beweis Sei $succ(i) = i + 1$. Sei $\mathcal{S} := \{succ\}$.

$\mathcal{S}$ ist nicht trivial:

- $\emptyset \subset \mathcal{S}$: klar
- $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$: f mit $f(i) = i + 2$ ist berechenbar, aber $f \notin \mathcal{S}$.

Erstes Beispiel für die Anwendung des Satzes von Rice

Satz

Es ist unentscheidbar, ob eine Turingmaschine für jede Eingabe $i \in \mathbb{N}$ die Zahl $i + 1 \in \mathbb{N}$ berechnet.

Beweis Sei $succ(i) = i + 1$. Sei $\mathcal{S} := \{succ\}$.

$\mathcal{S}$ ist nicht trivial:

- $\emptyset \subset \mathcal{S}$: klar
- $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$: f mit $f(i) = i + 2$ ist berechenbar, aber $f \notin \mathcal{S}$.

Mit Satz von Rice:

$$C(\mathcal{S}) = \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion ist } succ\}$$

ist nicht entscheidbar. $\square$

Zweites Beispiel für die Anwendung des Satzes von Rice

Satz

Es ist unentscheidbar, ob für die Turingmaschine M gilt, dass $L(M) = \emptyset$.

Beweis Sei $\mathcal{S} := \{\Omega\}$.

Zweites Beispiel für die Anwendung des Satzes von Rice

Satz

Es ist unentscheidbar, ob für die Turingmaschine M gilt, dass $L(M) = \emptyset$.

Beweis Sei $\mathcal{S} := \{\Omega\}$.

$\mathcal{S}$ ist nicht trivial:

- $\emptyset \subset \mathcal{S}$: klar
- $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$: f mit $f(x) = x$ ist berechenbar, aber $f \notin \mathcal{S}$.

Zweites Beispiel für die Anwendung des Satzes von Rice

Satz

Es ist unentscheidbar, ob für die Turingmaschine M gilt, dass $L(M) = \emptyset$.

Beweis Sei $\mathcal{S} := \{\Omega\}$.

$\mathcal{S}$ ist nicht trivial:

- $\emptyset \subset \mathcal{S}$: klar
- $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$: f mit $f(x) = x$ ist berechenbar, aber $f \notin \mathcal{S}$.

Mit Satz von Rice:

$$\begin{aligned} C(\mathcal{S}) &= \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\} \\ &= \{w \mid M_w \text{ akzeptiert nie}\} \\ &= \{w \mid L(M_w) = \emptyset\} \end{aligned}$$

ist nicht entscheidbar. $\square$

Drittes Beispiel für die Anwendung des Satzes von Rice

Satz

Es ist unentscheidbar, ob für die Turingmaschine M gilt, dass M für alle Eingaben hält.

Drittes Beispiel für die Anwendung des Satzes von Rice

Satz

Es ist unentscheidbar, ob für die Turingmaschine M gilt, dass M für alle Eingaben hält.

Beweis Sei $\mathcal{S} := \{f \mid f(x) \text{ ist total und berechenbar}\}$.

Drittes Beispiel für die Anwendung des Satzes von Rice

Satz

Es ist unentscheidbar, ob für die Turingmaschine M gilt, dass M für alle Eingaben hält.

Beweis Sei $\mathcal{S} := \{f \mid f(x) \text{ ist total und berechenbar}\}$.

$\mathcal{S}$ ist nicht trivial:

- $\emptyset \subset \mathcal{S}$: Z.B. gilt $id \in \mathcal{S}$ mit $id(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{N}$.
- $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$: $f(1) =$ undefiniert und $f(x) = 0$ für $x \neq 1$, ist berechenbar und $f \notin \mathcal{S}$.

Drittes Beispiel für die Anwendung des Satzes von Rice

Satz

Es ist unentscheidbar, ob für die Turingmaschine M gilt, dass M für alle Eingaben hält.

Beweis Sei $\mathcal{S} := \{f \mid f(x) \text{ ist total und berechenbar}\}$.

$\mathcal{S}$ ist nicht trivial:

- $\emptyset \subset \mathcal{S}$: Z.B. gilt $id \in \mathcal{S}$ mit $id(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{N}$.
- $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$: $f(1) =$ undefiniert und $f(x) = 0$ für $x \neq 1$, ist berechenbar und $f \notin \mathcal{S}$.

Mit Satz von Rice:

$$\begin{aligned} C(\mathcal{S}) &= \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\} \\ &= \{w \mid M_w \text{ akzeptiert für jede Eingabe}\} \end{aligned}$$

ist nicht entscheidbar. □

Bemerkungen

Der Satz von Rice lässt sich anwenden, auf Eigenschaften von $L(M)$ bzw. der von M berechneten Funktion, aber er macht keine Aussage über Eigenschaften von M.

Bemerkungen

Der Satz von Rice lässt sich anwenden, auf Eigenschaften von $L(M)$ bzw. der von M berechneten Funktion, aber er macht keine Aussage über Eigenschaften von M.

Beispiele:

- Ist es entscheidbar, ob M höchstens 100 Zustände hat?
  ☞ Der Satz von Rice ist hier **nicht** anwendbar.
  (Das Problem ist sogar entscheidbar.)

Bemerkungen

Der Satz von Rice lässt sich anwenden, auf Eigenschaften von $L(M)$ bzw. der von M berechneten Funktion, aber er macht keine Aussage über Eigenschaften von M.

Beispiele:

- Ist es entscheidbar, ob M höchstens 100 Zustände hat?
  ☞ Der Satz von Rice ist hier **nicht** anwendbar.
  (Das Problem ist sogar entscheidbar.)
- Ist es entscheidbar, ob M für jede Eingabe nach 1000 Schritten anhält?
  ☞ Der Satz von Rice ist hier **nicht** anwendbar.
  (Das Problem ist sogar entscheidbar.)

Bemerkungen

Der Satz von Rice lässt sich anwenden, auf Eigenschaften von $L(M)$ bzw. der von M berechneten Funktion, aber er macht keine Aussage über Eigenschaften von M.

Beispiele:

- Ist es entscheidbar, ob M höchstens 100 Zustände hat?
  ☞ Der Satz von Rice ist hier **nicht** anwendbar.
  (Das Problem ist sogar entscheidbar.)
- Ist es entscheidbar, ob M für jede Eingabe nach 1000 Schritten anhält?
  ☞ Der Satz von Rice ist hier **nicht** anwendbar.
  (Das Problem ist sogar entscheidbar.)
- Ist es entscheidbar, ob M für höchstens 50 verschiedene Eingaben anhält?
  ☞ Der Satz von Rice ist anwendbar, da die Eigenschaft auch etwas über die berechnete Funktion aussagt (sie soll für höchstens 50 Eingaben definiert sein).
  (Das Problem ist dann unentscheidbar.)