7c
Turingmaschinen

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 4. April 2024
Basiert auf Folien von PD Dr. David Sabel

Wiederholung: Typ 1- und Typ 0-Grammatiken

- Im Gegensatz zu Typ 2 ist die Linke Seite von Typ 0- und Typ 1-Produktionen $\ell \in (V \cup \Sigma)^+$.
- Mit Typ 1-Grammatiken gilt $|\ell| \leq |r|$ für alle Produktionen $\ell \to r$.
- Typ 1-Grammatiken nennen wir auch kontextsensitive Grammatiken.

Hintergrund zu Turingmaschinen

Nun führen wir ein Maschinenmodell ein, das zu Typ 1 und zu Typ 0 passt:
die Turingmaschinen (für Typ 1: mit Einschränkungen).

Hintergrund zu Turingmaschinen

Nun führen wir ein Maschinenmodell ein, das zu Typ 1 und zu Typ 0 passt:
die Turingmaschinen (für Typ 1: mit Einschränkungen).

Einschränkungen der Kellerautomaten:

- PDAs erkennen genau die kontextfreien Sprachen,
  daher müssen Automaten für Typ 1- und Typ 0-Sprachen „mehr können“.
- Wesentliche Beschränkung bei PDAs:
  Der Zugriff auf den Speicher ist nur von oben möglich.

Hintergrund zu Turingmaschinen

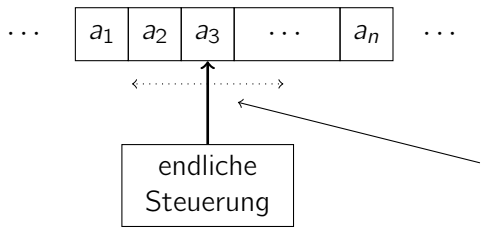
Nun führen wir ein Maschinenmodell ein, das zu Typ 1 und zu Typ 0 passt:
die Turingmaschinen (für Typ 1: mit Einschränkungen).

Einschränkungen der Kellerautomaten:

- PDAs erkennen genau die kontextfreien Sprachen,
  daher müssen Automaten für Typ 1- und Typ 0-Sprachen „mehr können“.
- Wesentliche Beschränkung bei PDAs:
  Der Zugriff auf den Speicher ist nur von oben möglich.
- Z.B. kann man $\{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}_{>0}\}$ nicht mit einem PDA erkennen,
  da man die Anzahl i
  - beim Lesen der a's im Keller speichert
  - beim Lesen der b's vergleichen muss und das geht nur durch sukzessives Entnehmen aus dem Keller
  - beim Lesen der c's nicht mehr hat.

  Mit beliebigem Lesen des Speichers wäre es kein Problem, $a^i b^i c^i$ zu erkennen.

Illustration einer Turingmaschine



Band mit Feldern
(nach links und rechts unbeschränkt)

Schreib-Lesekopf
(Bewegung nach links/rechts möglich)

Definition einer Turingmaschine

Definition

Eine Turingmaschine (TM) ist ein 7-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$, wobei:

- Z ist eine endliche Menge von Zuständen
- Σ ist das (endliche) Eingabealphabet
- $\Gamma \supset \Sigma$ ist das (endliche) Bandalphabet
- δ ist die Überführungsfunktion
  - für deterministische TM (DTM): $\delta : (Z \setminus E) \times \Gamma \rightharpoonup Z \times \Gamma \times \{L, R, N\}$
  - für nichtdeterministische TM (NTM): $\delta : (Z \setminus E) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Z \times \Gamma \times \{L, R, N\})$
- $z_0 \in Z$ ist der Startzustand
- $\square \in \Gamma \setminus \Sigma$ ist das Blank-Symbol
- $E \subseteq Z$ ist die Menge der Endzustände.

Zustandsübergang

Für deterministische Turingmaschinen:

- Ein Eintrag $\delta(z, a) = (z', b, x)$ bedeutet: Falls die TM im Zustand z ist und das Zeichen a an der aktuellen Position des Schreib-Lesekopfs ist, dann
  1. Wechsle in Zustand z'.
  2. Ersetze a durch b auf dem Band.
  3. Falls $x = L$: Verschiebe den Schreib-Lesekopf ein Position nach links.
  4. Falls $x = R$: Verschiebe den Schreib-Lesekopf ein Position nach rechts.
  5. Falls $x = N$: Lasse Schreib-Lesekopf unverändert (Neutral).

Zustandsübergang

Für deterministische Turingmaschinen:

- Ein Eintrag $\delta(z, a) = (z', b, x)$ bedeutet: Falls die TM im Zustand z ist und das Zeichen a an der aktuellen Position des Schreib-Lesekopfs ist, dann
  1. Wechsle in Zustand z'.
  2. Ersetze a durch b auf dem Band.
  3. Falls $x = L$: Verschiebe den Schreib-Lesekopf ein Position nach links.
  4. Falls $x = R$: Verschiebe den Schreib-Lesekopf ein Position nach rechts.
  5. Falls $x = N$: Lasse Schreib-Lesekopf unverändert (Neutral).

Für nichtdeterministische Turingmaschinen:

- $\delta(z, a)$ ist eine Menge solcher möglichen Schritte und die NTM macht in einem Lauf irgendeinen davon (nichtdeterministisch).

Konfigurationen

Definition

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine Turingmaschine.
Eine Konfiguration von M ist ein Wort $wzw' \in \Gamma^* Z \Gamma^*$, wobei:

- z ist der aktuelle Zustand von M
- $\cdots \square\square ww' \square\square \cdots$ steht auf dem Band
- der Schreib-Lesekopf steht auf dem ersten Symbol von w'.

Konfigurationen

Definition

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine Turingmaschine.
Eine Konfiguration von M ist ein Wort $wzw' \in \Gamma^* Z \Gamma^*$, wobei:

- z ist der aktuelle Zustand von M
- $\cdots \square\square ww' \square\square \cdots$ steht auf dem Band
- der Schreib-Lesekopf steht auf dem ersten Symbol von w'.

Definition

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine Turingmaschine.
Für ein Eingabewort w ist die Startkonfiguration $Start_M(w)$ von M das Wort $z_0 w$.
Im Spezialfall $w = \varepsilon$ ist die Startkonfiguration $z_0 \square$.

D.h. am Anfang steht der Schreib-Lesekopf auf dem ersten Symbol der Eingabe.

Übergangsrelation einer deterministische Turingmaschine

Definition

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine deterministische Turingmaschine.
Die Relation $\vdash_M \subseteq \Gamma^* Z \Gamma^* \times \Gamma^* Z \Gamma^*$ ist definiert durch

- $b_1 \cdots b_m z a_1 \cdots a_n \vdash_M b_1 \cdots b_m z' c a_2 \cdots a_n$,
  wenn $\delta(z, a_1) = (z', c, N)$, $m \geq 0$, $n \geq 1$ und $z \notin E$
- $b_1 \cdots b_m z a_1 \cdots a_n \vdash_M b_1 \cdots b_{m-1} z' b_m c a_2 \cdots a_n$,
  wenn $\delta(z, a_1) = (z', c, L)$, $m \geq 1$, $n \geq 1$ und $z \notin E$
- $b_1 \cdots b_m z a_1 \cdots a_n \vdash_M b_1 \cdots b_m c z' a_2 \cdots a_n$,
  wenn $\delta(z, a_1) = (z', c, R)$, $m \geq 0$, $n \geq 2$ und $z \notin E$
- $b_1 \cdots b_m z a_1 \vdash_M b_1 \cdots b_m c z' \square$, wenn $\delta(z, a_1) = (z', c, R)$, $m \geq 0$ und $z \notin E$
- $z a_1 \cdots a_n \vdash_M z' \square c a_2 \cdots a_n$, wenn $\delta(z, a_1) = (z', c, L)$, $n \geq 1$ und $z \notin E$.

Übergangsrelation einer nichtdeterministische Turingmaschine

Definition

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine nichtdeterministische Turingmaschine.
Die Relation $\vdash_M \subseteq \Gamma^* Z \Gamma^* \times \Gamma^* Z \Gamma^*$ ist definiert durch

- $b_1 \cdots b_m z a_1 \cdots a_n \vdash_M b_1 \cdots b_m z' c a_2 \cdots a_n$,
  wenn $(z', c, N) \in \delta(z, a_1)$, $m \geq 0$, $n \geq 1$ und $z \notin E$
- $b_1 \cdots b_m z a_1 \cdots a_n \vdash_M b_1 \cdots b_{m-1} z' b_m c a_2 \cdots a_n$,
  wenn $(z', c, L) \in \delta(z, a_1)$, $m \geq 1$, $n \geq 1$ und $z \notin E$
- $b_1 \cdots b_m z a_1 \cdots a_n \vdash_M b_1 \cdots b_m c z' a_2 \cdots a_n$,
  wenn $(z', c, R) \in \delta(z, a_1)$, $m \geq 0$, $n \geq 2$ und $z \notin E$
- $b_1 \cdots b_m z a_1 \vdash_M b_1 \cdots b_m c z' \square$, wenn $(z', c, R) \in \delta(z, a_1)$, $m \geq 0$ und $z \notin E$
- $z a_1 \cdots a_n \vdash_M z' \square c a_2 \cdots a_n$, wenn $(z', c, L) \in \delta(z, a_1)$, $n \geq 1$ und $z \notin E$.

Übergangsrelation einer Turingmaschine

Weitere Notationen:

- $\vdash_M^*$ ist die reflexiv-transitive Hülle von $\vdash_M$.
- $\vdash_M^i$ ist die i-fache Anwendung von $\vdash_M$.
- Wenn M eindeutig ist, schreiben wir $\vdash$ statt $\vdash_M$.

Übergangsrelation einer Turingmaschine

Weitere Notationen:

- $\vdash_M^*$ ist die reflexiv-transitive Hülle von $\vdash_M$.
- $\vdash_M^i$ ist die i-fache Anwendung von $\vdash_M$.
- Wenn M eindeutig ist, schreiben wir $\vdash$ statt $\vdash_M$.

Bemerkung:

- Mit unserer Definition hält die Turingmaschine an, sobald sie einen Endzustand erreicht hat.
  (Das Buch von Schöning erlaubt weiterrechnen.)

Akzeptierte Sprache einer Turingmaschine

Definition

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine Turingmaschine.
Die von M akzeptierte Sprache $L(M)$ ist definiert als

$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid Start_M(w) \vdash_M^* uzv \text{ für } u, v \in \Gamma^*, z \in E\}$$

Akzeptierte Sprache einer Turingmaschine

Definition

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine Turingmaschine.
Die von M akzeptierte Sprache $L(M)$ ist definiert als

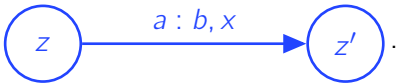
$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid Start_M(w) \vdash_M^* uzv \text{ für } u, v \in \Gamma^*, z \in E\}$$

Weitere Begriffe:

- Die TM akzeptiert heißt, die TM erreicht einen Endzustand.
- Die TM verwirft heißt, die TM erreicht keinen Endzustand.

Notation als Zustandsgraph

- Die Darstellung ist ähnlich der von DFAs, NFAs und PDAs.
- Für $\delta(z, a) = (z', b, x)$ bzw. $(z', b, x) \in \delta(z, a)$ zeichnen wir



.

- Beachte, dass das Blank-Symbol bekannt sein muss (üblicherweise $\square$).

Beispiel für eine deterministische Turingmaschine

DTM $M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \square\}, \delta, z_0, \square, \{z_3\})$ mit

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, 0) = (z_0, 0, R) & \delta(z_0, 1) = (z_0, 1, R) & \delta(z_0, \square) = (z_1, \square, L) \\ \delta(z_1, 0) = (z_2, 1, L) & \delta(z_1, 1) = (z_1, 0, L) & \delta(z_1, \square) = (z_3, 1, N) \\ \delta(z_2, 0) = (z_2, 0, L) & \delta(z_2, 1) = (z_2, 1, L) & \delta(z_2, \square) = (z_3, \square, R) \end{array}$$

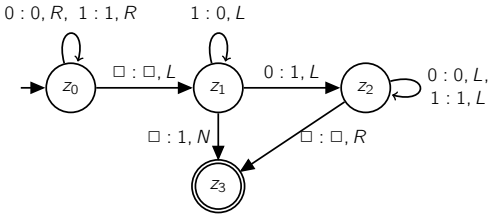
turingmachinesimulator.com/shared/istktezldr

Beispiel für eine deterministische Turingmaschine

DTM $M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \square\}, \delta, z_0, \square, \{z_3\})$ mit

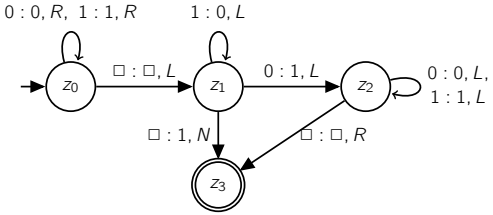
$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, 0) = (z_0, 0, R) & \delta(z_0, 1) = (z_0, 1, R) & \delta(z_0, \square) = (z_1, \square, L) \\ \delta(z_1, 0) = (z_2, 1, L) & \delta(z_1, 1) = (z_1, 0, L) & \delta(z_1, \square) = (z_3, 1, N) \\ \delta(z_2, 0) = (z_2, 0, L) & \delta(z_2, 1) = (z_2, 1, L) & \delta(z_2, \square) = (z_3, \square, R) \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



turingmachinesimulator.com/shared/istktezldr

Beispiel für eine deterministische Turingmaschine



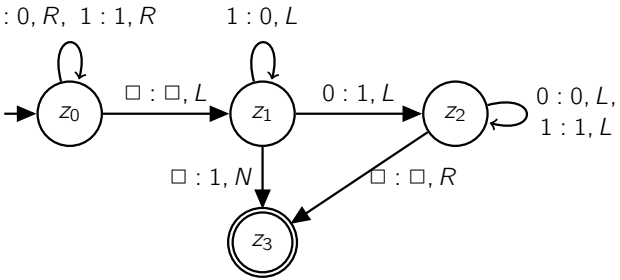
M interpretiert die Eingabe $w \in \{0,1\}^*$ als Binärzahl und addiert 1:

- In z_0 wird das rechte Ende gesucht, dann in z_1 gewechselt.
- In z_1 wird versucht 1 zur aktuellen Ziffer hinzu zu addieren:
  Gelingt das ohne Übertrag, dann wird in z_2 gewechselt.
  Bei Übertrag: Weitermachen in z_1 und $+1$ zur nächsten Ziffer links.
- In z_2 wird bis zum Anfang links gelaufen, dann in z_3 gewechselt.
- In z_3 wird akzeptiert.

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf

DTM M:

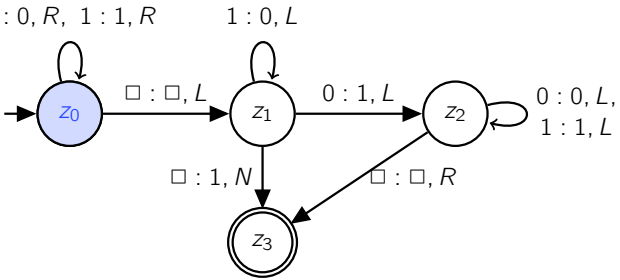
Eingabe: 0011



Beispiel für einen akzeptierenden Lauf

DTM M:

Eingabe: 0011

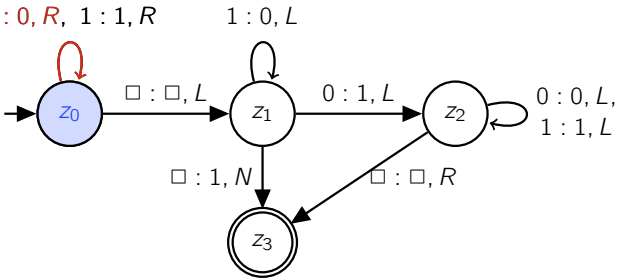


$z_0 0011$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf

DTM M:

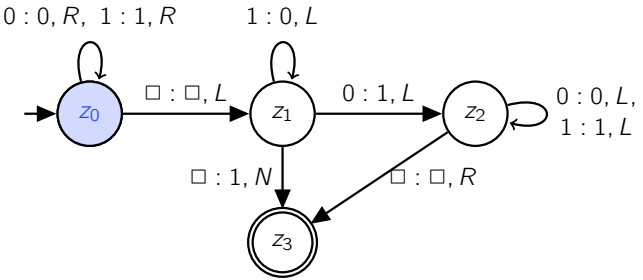
Eingabe: 0011



$z_0 0011$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf

DTM M:

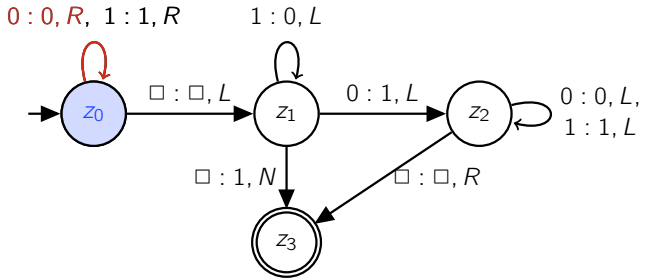


Eingabe: 0011

$z_0 0011$
$\vdash 0 z_0 011$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf

DTM M:

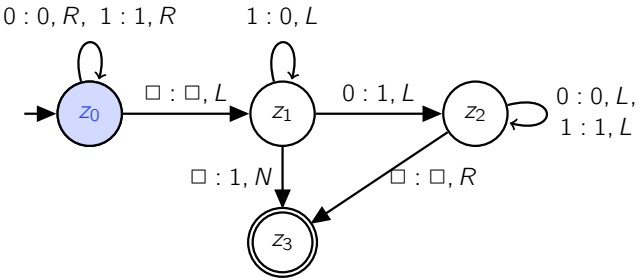


Eingabe: 0011

$z_0 0011$
$\vdash 0 z_0 011$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf

DTM M:

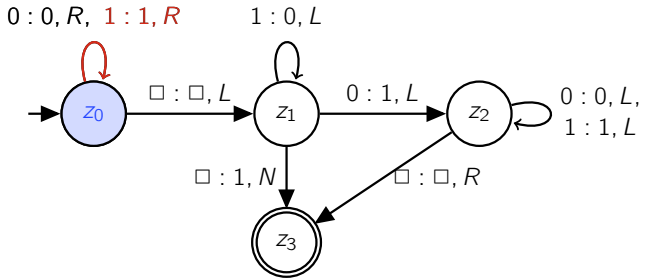


Eingabe: 0011

$z_0 0011$
$\vdash 0 z_0 011$
$\vdash 00 z_0 11$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf

DTM M:

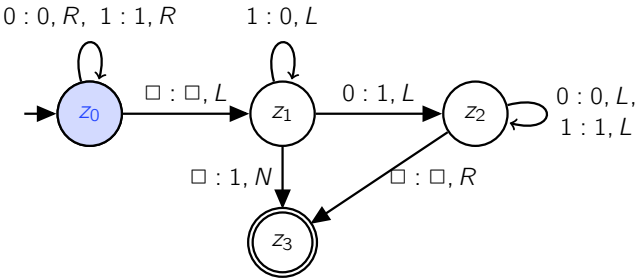


Eingabe: 0011

$z_0 0011$
$\vdash 0 z_0 011$
$\vdash 00 z_0 11$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf

DTM M:

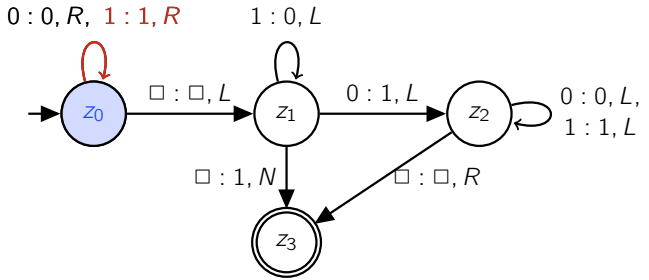


Eingabe: 0011

$z_0 0011$
$\vdash 0 z_0 011$
$\vdash 00 z_0 11$
$\vdash 001 z_0 1$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf

DTM M:

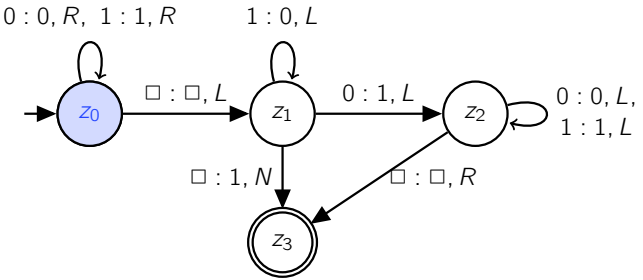


Eingabe: 0011

$z_0 0011$
$\vdash 0 z_0 011$
$\vdash 00 z_0 11$
$\vdash 001 z_0 1$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf

DTM M:

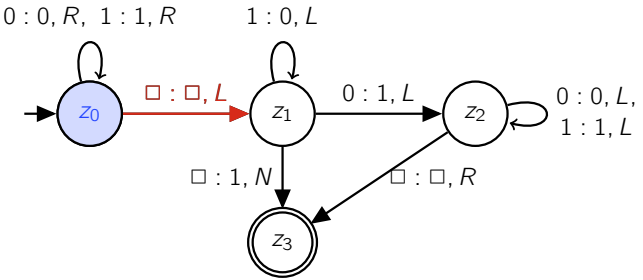


Eingabe: 0011

$z_0 0011$
$\vdash 0 z_0 011$
$\vdash 00 z_0 11$
$\vdash 001 z_0 1$
$\vdash 0011 z_0 \square$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf

DTM M:

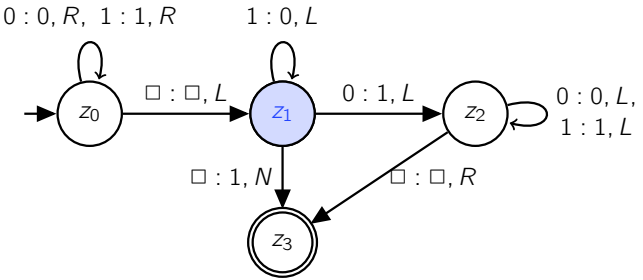


Eingabe: 0011

$z_0 0011$
$\vdash 0 z_0 011$
$\vdash 00 z_0 11$
$\vdash 001 z_0 1$
$\vdash 0011 z_0 \square$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf

DTM M:

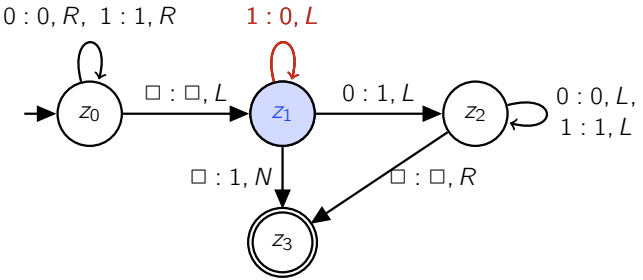


Eingabe: 0011

$z_0 0011$
$\vdash 0 z_0 011$
$\vdash 00 z_0 11$
$\vdash 001 z_0 1$
$\vdash 0011 z_0 \square$
$\vdash 001 z_1 1 \square$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf

DTM M:

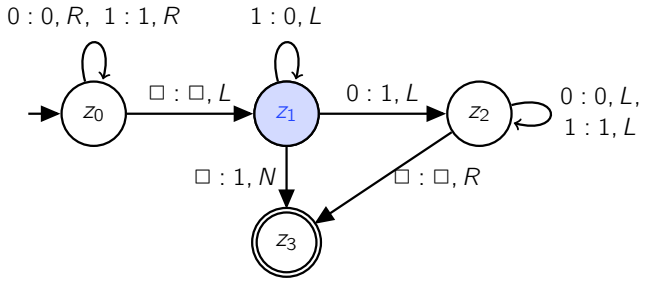


Eingabe: 0011

$z_0 0011$
$\vdash 0 z_0 011$
$\vdash 00 z_0 11$
$\vdash 001 z_0 1$
$\vdash 0011 z_0 \square$
$\vdash 001 z_1 1 \square$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf

DTM M:

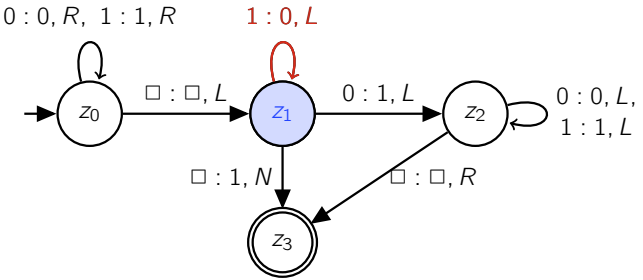


Eingabe: 0011

$z_0 0011$
$\vdash 0 z_0 011$
$\vdash 00 z_0 11$
$\vdash 001 z_0 1$
$\vdash 0011 z_0 □$
$\vdash 001 z_1 1 □$
$\vdash 00 z_1 10 □$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf

DTM M:

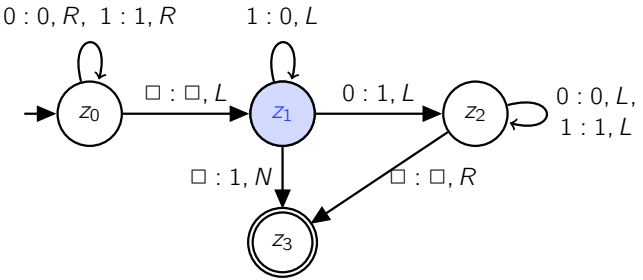


Eingabe: 0011

$z_0 0011$
$\vdash 0 z_0 011$
$\vdash 00 z_0 11$
$\vdash 001 z_0 1$
$\vdash 0011 z_0 \square$
$\vdash 001 z_1 1 \square$
$\vdash 00 z_1 10 \square$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf

DTM M:

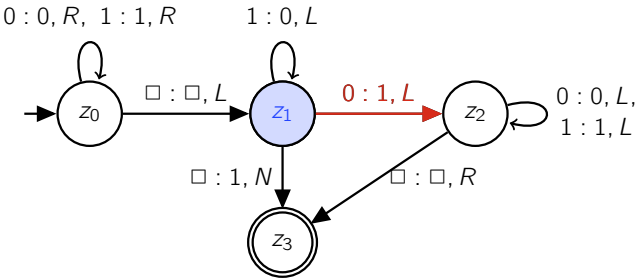


Eingabe: 0011

$z_0 0011$
$\vdash 0 z_0 011$
$\vdash 00 z_0 11$
$\vdash 001 z_0 1$
$\vdash 0011 z_0 □$
$\vdash 001 z_1 1 □$
$\vdash 00 z_1 10 □$
$\vdash 0 z_1 000 □$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf

DTM M:

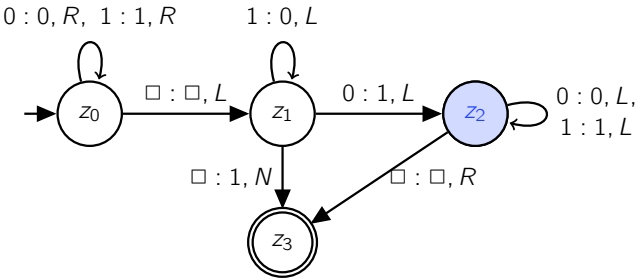


Eingabe: 0011

$z_0 0011$
$\vdash 0 z_0 011$
$\vdash 00 z_0 11$
$\vdash 001 z_0 1$
$\vdash 0011 z_0 \square$
$\vdash 001 z_1 1 \square$
$\vdash 00 z_1 10 \square$
$\vdash 0 z_1 000 \square$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf

DTM M:

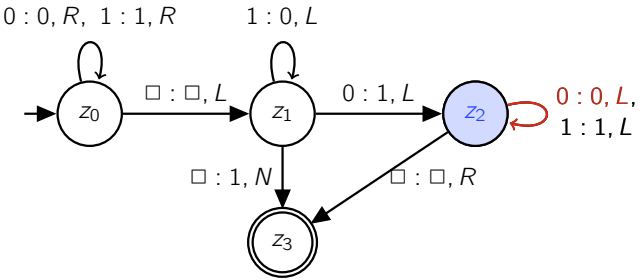


Eingabe: 0011

$z_0 0011$
$\vdash 0 z_0 011$
$\vdash 00 z_0 11$
$\vdash 001 z_0 1$
$\vdash 0011 z_0 \square$
$\vdash 001 z_1 1 \square$
$\vdash 00 z_1 10 \square$
$\vdash 0 z_1 000 \square$
$\vdash z_2 0100 \square$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf

DTM M:

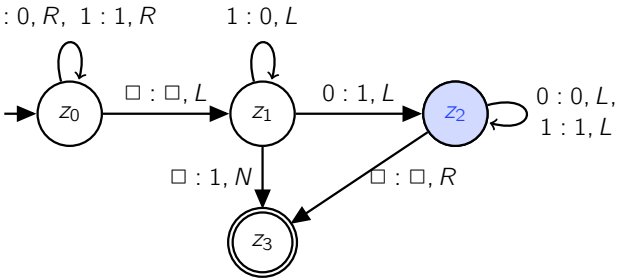


Eingabe: 0011

$z_0 0011$
$\vdash 0 z_0 011$
$\vdash 00 z_0 11$
$\vdash 001 z_0 1$
$\vdash 0011 z_0 □$
$\vdash 001 z_1 1 □$
$\vdash 00 z_1 10 □$
$\vdash 0 z_1 000 □$
$\vdash z_2 0100 □$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf

DTM M:

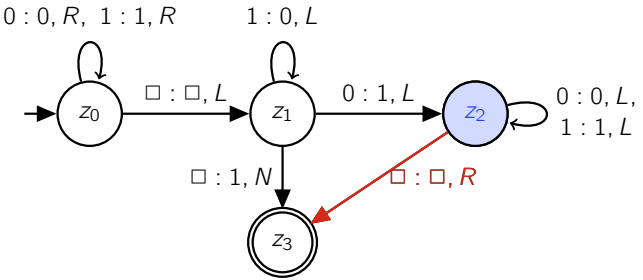


Eingabe: 0011

$z_0 0011$
$\vdash 0 z_0 011$
$\vdash 00 z_0 11$
$\vdash 001 z_0 1$
$\vdash 0011 z_0 □$
$\vdash 001 z_1 1 □$
$\vdash 00 z_1 10 □$
$\vdash 0 z_1 000 □$
$\vdash z_2 0100 □$
$\vdash z_2 □ 0100 □$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf

DTM M:

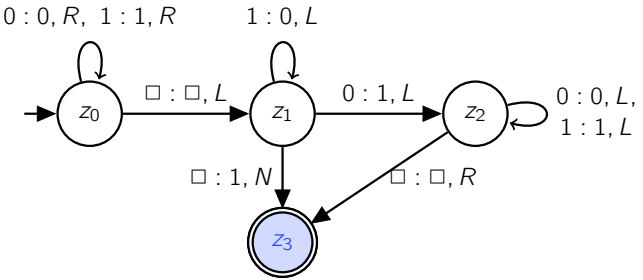


Eingabe: 0011

$z_0 0011$
$\vdash 0 z_0 011$
$\vdash 00 z_0 11$
$\vdash 001 z_0 1$
$\vdash 0011 z_0 □$
$\vdash 001 z_1 1 □$
$\vdash 00 z_1 10 □$
$\vdash 0 z_1 000 □$
$\vdash z_2 0100 □$
$\vdash z_2 □ 0100 □$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf

DTM M:

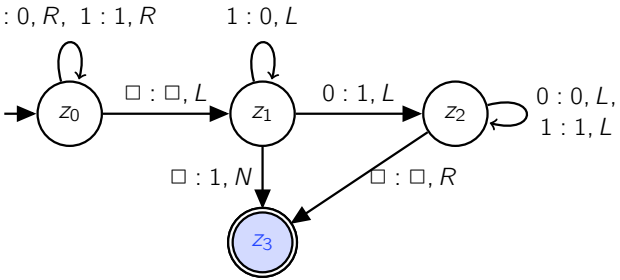


Eingabe: 0011

$z_0 0011$
$\vdash 0 z_0 011$
$\vdash 00 z_0 11$
$\vdash 001 z_0 1$
$\vdash 0011 z_0 \square$
$\vdash 001 z_1 1 \square$
$\vdash 00 z_1 10 \square$
$\vdash 0 z_1 000 \square$
$\vdash z_2 0100 \square$
$\vdash z_2 \square 0100 \square$
$\vdash \square z_3 0100 \square$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf

DTM M:



Eingabe: 0011
$\in L(M)$

$z_0 0011$
$\vdash 0 z_0 011$
$\vdash 00 z_0 11$
$\vdash 001 z_0 1$
$\vdash 0011 z_0 \square$
$\vdash 001 z_1 1 \square$
$\vdash 00 z_1 10 \square$
$\vdash 0 z_1 000 \square$
$\vdash z_2 0100 \square$
$\vdash z_2 \square 0100 \square$
$\vdash \square z_3 0100 \square$

Linear beschränkte Turingmaschinen

Grundgedanke:

- Linear beschränkte Turingmaschinen (*linear bounded automata*, LBAs) sind spezielle Turingmaschinen.
- Der Schreib-Lesekopf darf den Bereich der Eingabe auf dem Band nicht verlassen.
- Zum Erkennen des Anfangs und des Endes wird die Eingabe in spitzen Klammern gesetzt: Statt w ist die Eingabe nun $\langle w \rangle$.

Definition eines LBA

Definition

Eine linear beschränkte Turingmaschine (*linear bounded automaton*, LBA) ist ein 8-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \langle, \rangle, E)$, wobei:

- Z, Σ, Γ, δ, z_0 und E sind wie bei nichtdeterministischen Turingmaschinen
- $\langle, \rangle \in \Sigma$ sind Start- bzw. Endmarker
- δ überschreibt keinen der Marker
- bei $\langle$ gibt δ nie L aus und bei $\rangle$ gibt δ nie R aus.

Definition eines LBA

Definition

Eine linear beschränkte Turingmaschine (*linear bounded automaton*, LBA) ist ein 8-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \langle, \rangle, E)$, wobei:

- Z, Σ, Γ, δ, z_0 und E sind wie bei nichtdeterministischen Turingmaschinen
- $\langle, \rangle \in \Sigma$ sind Start- bzw. Endmarker
- δ überschreibt keinen der Marker
- bei $\langle$ gibt δ nie L aus und bei $\rangle$ gibt δ nie R aus.

Definition

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \langle, \rangle, E)$ ein LBA.
Die von M akzeptierte Sprache $L(M)$ ist definiert als

$$L(M) := \{w \in (\Sigma - \{\langle, \rangle\})^* \mid z_0\langle w\rangle \vdash_M^* uzv \text{ für } u, v \in \Gamma^*, z \in E\}$$

Satz von Kuroda

Theorem (Satz von Kuroda)

Die LBAs akzeptieren genau die kontextsensitiven Sprachen.

Satz

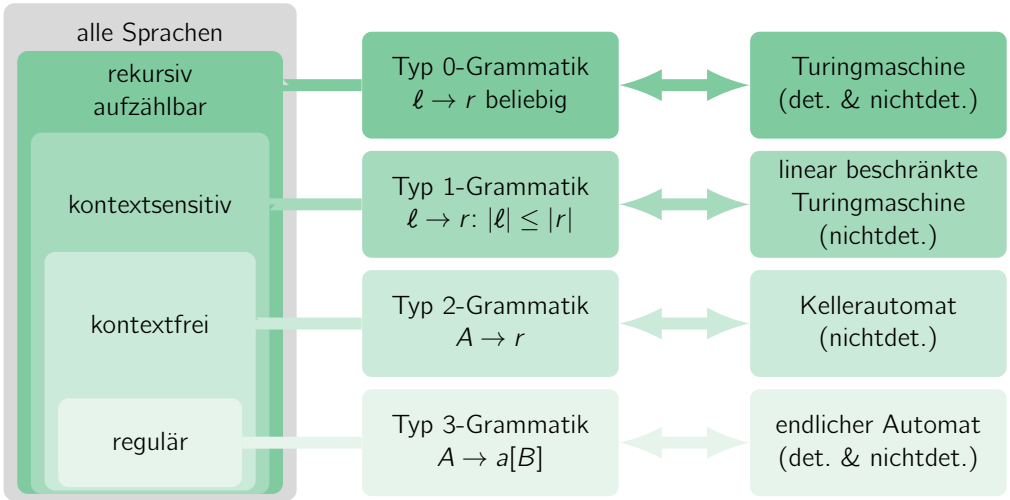
Die nichtdeterministischen Turingmaschinen akzeptierten genau die Typ 0-Sprachen.

Beweise Nächste Vorlesung (nur FSK). □

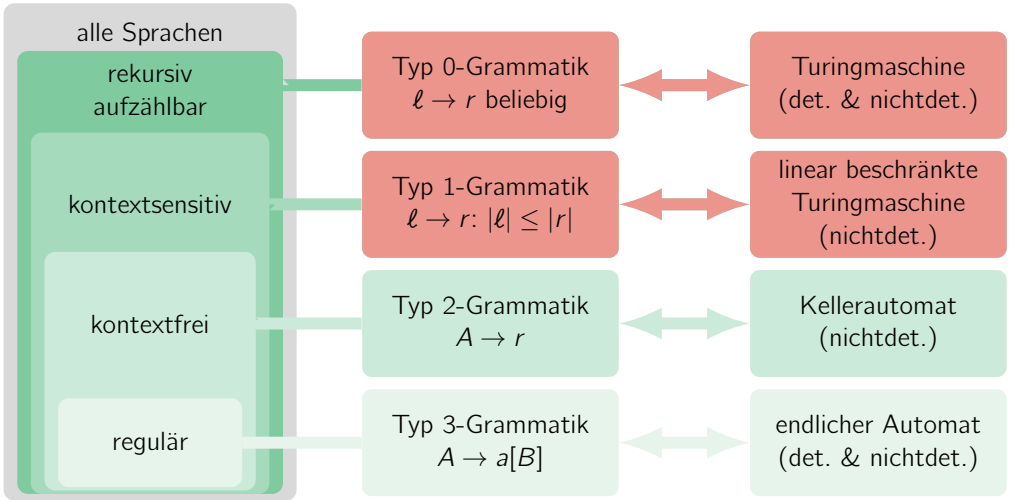
Deterministische vs. nichtdeterministische Turingmaschinen

- Nichtdeterministische Turingmaschinen können durch deterministische Turingmaschinen simuliert werden (mithilfe von Dovetailing).
- Daher gilt der letzte Satz auch für deterministische Turingmaschinen.
- Der Unterschied zwischen NTMs und DTMs kommt erst zum Tragen, wenn wir das Laufzeitverhalten betrachten (im Kursteil zur Komplexitätstheorie).

Überblick über Grammatiken und Maschinenmodelle



Überblick über Grammatiken und Maschinenmodelle



Trennende Beispiele

- Die Sprache $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist vom Typ 2 aber nicht vom Typ 3.
- Die Sprache $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist vom Typ 1 aber nicht vom Typ 2.
- Die Sprache

$$H = \{M\#w \mid \text{die durch } M \text{ beschriebene Turingmaschine hält bei Eingabe } w\}$$

  ist vom Typ 0 aber nicht vom Typ 1.
  (Die Sprache H ist das Halteproblem, welches wir später noch genauer betrachten und erläutern.)
- Das Komplement von H ist nicht vom Typ 0.

Deterministisch vs. nichtdeterministisch

Deterministischer Automat	Nichtdeterministischer Automat	Äquivalent?
DFA	NFA	ja
DPDA	PDA	nein
DLBA	LBA	unbekannt
DTM	NTM	ja

Abschlusseigenschaften

Sprachklasse	Schnitt	Vereinigung	Komplement	Produkt	Kleenescher Abschluss
Typ 3	ja	ja	ja	ja	ja
Det. kontextfrei	nein	nein	ja	nein	nein
Typ 2	nein	ja	nein	ja	ja
Typ 1	ja	ja	ja	ja	ja
Typ 0	ja	ja	nein	ja	ja

Entscheidbarkeiten

Sprachklasse	Wortproblem	Leerheits-problem	Äquivalenz-problem	Schnittproblem
Typ 3	ja	ja	ja	ja
Det. kontextfrei	ja	ja	ja	nein
Typ 2	ja	ja	nein	nein
Typ 1	ja	nein	nein	nein
Typ 0	nein	nein	nein	nein

Komplexität des Wortproblems

Sprachklasse	Komplexität
Typ 3, DFA gegeben	lineare Komplexität
deterministisch kontextfrei, DPDA gegeben	lineare Komplexität
Typ 2, Chomsky-Normalform gegeben	$O(n^3)$
Typ 1	exponentiell (nächste Vorlesung, FSK)
Typ 0	unlösbar