7b
Deterministische Kellerautomaten

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 4. April 2024
Basiert auf Folien von PD Dr. David Sabel

DPDAs und deterministisch kontextfreie Sprachen

- Definiert durch deterministische Kellerautomaten mit Akzeptanz durch Endzustände.
  (Akzeptanz durch leeren Keller wäre schwächer.)
- ε-Übergänge sind erlaubt, aber nur wenn es keinen anderen Übergang (mit demselben Kellersymbol und einem beliebigen Terminalzeichen) gibt.

DPDAs und deterministisch kontextfreie Sprachen

- Definiert durch deterministische Kellerautomaten mit Akzeptanz durch Endzustände.
  (Akzeptanz durch leeren Keller wäre schwächer.)
- ε-Übergänge sind erlaubt, aber nur wenn es keinen anderen Übergang (mit demselben Kellersymbol und einem beliebigen Terminalzeichen) gibt.

Definition

Ein Kellerautomat mit Endzuständen $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$ ist deterministisch (ein DPDA) wenn für alle $(z, a, A) \in Z \times \Sigma \times \Gamma$ gilt

$$|\delta(z, a, A)| + |\delta(z, \varepsilon, A)| \leq 1$$

Die von DPDAs akzeptierten Sprachen heißen deterministisch kontextfrei.

Beispiel für einen DPDA

Satz

Die Sprache $\{w\$\overline{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}$ ist deterministisch kontextfrei.

Beispiel für einen DPDA

Satz

Die Sprache $\{w\$\overline{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}$ ist deterministisch kontextfrei.

Beweis Betrachte den DPDA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b, \$\}, \{\#, A, B\}, \delta, z_0, \#, \{z_2\})$ mit

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl}
\delta(z_0, a, \#) &=& \{(z_0, A\#)\} & \delta(z_0, \$, \#) &=& \{(z_1, \#)\} \\
\delta(z_0, b, \#) &=& \{(z_0, B\#)\} & \delta(z_0, \$, A) &=& \{(z_1, A)\} \\
\delta(z_0, a, A) &=& \{(z_0, AA)\} & \delta(z_0, \$, B) &=& \{(z_1, B)\} \\
\delta(z_0, b, A) &=& \{(z_0, BA)\} & \delta(z_1, a, A) &=& \{(z_1, \varepsilon)\} \\
\delta(z_0, a, B) &=& \{(z_0, AB)\} & \delta(z_1, b, B) &=& \{(z_1, \varepsilon)\} \\
\delta(z_0, b, B) &=& \{(z_0, BB)\} & \delta(z_1, \varepsilon, \#) &=& \{(z_2, \varepsilon)\}
\end{array}
$$

und $\delta(z_i, c, C) = \emptyset$ sonst (für $c \in \{a, b, \$, \varepsilon\}$). $\square$

Beispiel für einen DPDA

Satz

Die Sprache $\{w\$\overline{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}$ ist deterministisch kontextfrei.

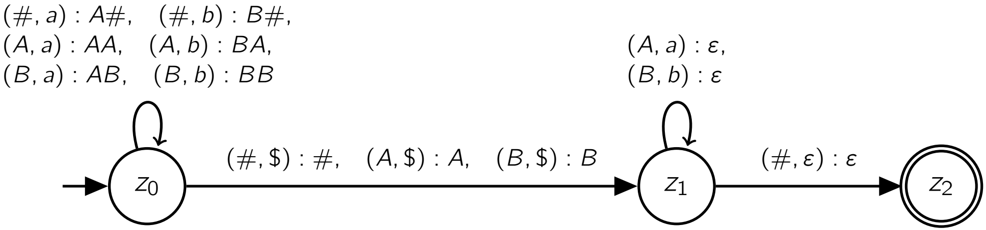
Beweis Betrachte den DPDA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b, \$\}, \{\#, A, B\}, \delta, z_0, \#, \{z_2\})$ mit

$$
\begin{aligned}
\delta(z_0, a, \#) &= \{(z_0, A\#)\} & \delta(z_0, \$, \#) &= \{(z_1, \#)\} \\
\delta(z_0, b, \#) &= \{(z_0, B\#)\} & \delta(z_0, \$, A) &= \{(z_1, A)\} \\
\delta(z_0, a, A) &= \{(z_0, AA)\} & \delta(z_0, \$, B) &= \{(z_1, B)\} \\
\delta(z_0, b, A) &= \{(z_0, BA)\} & \delta(z_1, a, A) &= \{(z_1, \varepsilon)\} \\
\delta(z_0, a, B) &= \{(z_0, AB)\} & \delta(z_1, b, B) &= \{(z_1, \varepsilon)\} \\
\delta(z_0, b, B) &= \{(z_0, BB)\} & \delta(z_1, \varepsilon, \#) &= \{(z_2, \varepsilon)\}
\end{aligned}
$$

und $\delta(z_i, c, C) = \emptyset$ sonst (für $c \in \{a, b, \$, \varepsilon\}$). $\square$

Beachte: $\{w\overline{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}$ ist nicht deterministisch kontextfrei aber kontextfrei.

Beispiel für einen DPDA



Weiteres Beispiel für einen DPDA

Satz

Die Sprache $\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist deterministisch kontextfrei.

Weiteres Beispiel für einen DPDA

Satz

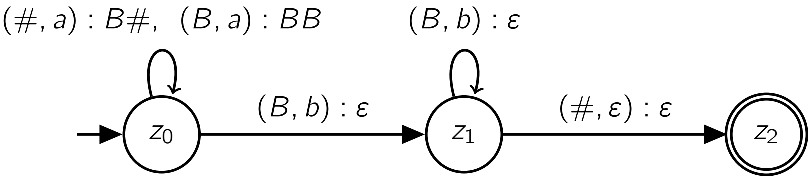
Die Sprache $\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist deterministisch kontextfrei.

Beweis: Betrachte den DPDA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \{\#, B\}, \delta, z_0, \#, \{z_2\})$ mit

$$
\begin{aligned}
\delta(z_0, a, \#) &= \{(z_0, B\#)\}\\
\delta(z_0, a, B) &= \{(z_0, BB)\}\\
\delta(z_0, b, B) &= \{(z_1, \varepsilon)\}\\
\delta(z_1, b, B) &= \{(z_1, \varepsilon)\}\\
\delta(z_1, \varepsilon, \#) &= \{(z_2, \varepsilon)\}
\end{aligned}
$$

und $\delta(z_i, c, A) = \emptyset$ sonst (für $c \in \{a, b, \varepsilon\}$). $\square$

Weiteres Beispiel für einen DPDA



Eigenschaften determinischer kontextfreier Sprachen

Theorem

1. Das Wortproblem für deterministisch kontextfreie Grammatiken kann in Linearzeit entschieden werden.
2. Für deterministisch kontextfreie Sprachen gibt es eindeutige Grammatiken.
3. Deterministisch kontextfreie Sprachen sind unter Komplementbildung abgeschlossen.

Eigenschaften determinischer kontextfreier Sprachen

Theorem

1. Das Wortproblem für deterministisch kontextfreie Grammatiken kann in Linearzeit entschieden werden.
2. Für deterministisch kontextfreie Sprachen gibt es eindeutige Grammatiken.
3. Deterministisch kontextfreie Sprachen sind unter Komplementbildung abgeschlossen.

Beweis Siehe Literatur. $\square$

Weitere Eigenschaften determinischer kontextfreier Sprachen

Satz

Die deterministischen kontextfreien Sprachen sind nicht abgeschlossen bezüglich Vereinigung und Schnitt.

Beweis

- Schnitt: Die Sprachen $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}_{>0}\}$ und $L_2 = \{a^n b^m c^m \mid n, m \in \mathbb{N}_{>0}\}$ sind deterministisch kontextfrei.

Weitere Eigenschaften determinischer kontextfreier Sprachen

Satz

Die deterministischen kontextfreien Sprachen sind nicht abgeschlossen bezüglich Vereinigung und Schnitt.

Beweis

- Schnitt: Die Sprachen $L_1 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}_{>0}\}$ und $L_2 = \{a^n b^m c^m \mid n, m \in \mathbb{N}_{>0}\}$ sind deterministisch kontextfrei.

  $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist nicht kontextfrei.

Weitere Eigenschaften determinischer kontextfreier Sprachen

Satz

Die deterministischen kontextfreien Sprachen sind nicht abgeschlossen bezüglich Vereinigung und Schnitt.

Beweis

- Vereinigung: Durch Widerspruch. Nehme an, die deterministischen kontextfreien Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Vereinigung.

Weitere Eigenschaften determinischer kontextfreier Sprachen

Satz

Die deterministischen kontextfreien Sprachen sind nicht abgeschlossen bezüglich Vereinigung und Schnitt.

Beweis

- Vereinigung: Durch Widerspruch. Nehme an, die deterministischen kontextfreien Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Vereinigung.

  Da die deterministischen kontextfreien Sprachen auch abgeschlossen bezüglich Komplement sind, folgt aus $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$, dass die deterministischen kontextfreien Sprachen abgeschlossen bezüglich Schnitt sind. Widerspruch. $\square$

Weitere Eigenschaften determinischer kontextfreier Sprachen

Satz

Der Schnitt einer kontextfreien Sprachen L mit einer regulären Sprache L' ist kontextfrei. Wenn L deterministisch kontextfrei ist, dann ist der Schnitt das auch.

Weitere Eigenschaften determinischer kontextfreier Sprachen

Satz

Der Schnitt einer kontextfreien Sprachen L mit einer regulären Sprache L' ist kontextfrei. Wenn L deterministisch kontextfrei ist, dann ist der Schnitt das auch.

Beweis Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$ ein PDA mit Endzuständen mit $L(M) = L$ und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ ein DFA mit $L(M') = L'$. Konstruiere PDA mit Endzuständen: $M'' = (Z \times Z', \Sigma, \delta'', (z_0, z_0'), \#, E \times E')$ mit

- $((z_k, z_k'), B_1 \cdots B_m) \in \delta''((z_i, z_i'), a, A)$ falls $(z_k, B_1 \cdots B_m) \in \delta(z_i, a, A)$ und $\delta'(z_i', a) = z_k'$
- $((z_k, z_i'), B_1 \cdots B_m) \in \delta''((z_i, z_i'), \varepsilon, A)$ falls $(z_k, B_1 \cdots B_m) \in \delta(z_i, \varepsilon, A)$.

Weitere Eigenschaften determinischer kontextfreier Sprachen

Satz

Der Schnitt einer kontextfreien Sprachen L mit einer regulären Sprache L' ist kontextfrei. Wenn L deterministisch kontextfrei ist, dann ist der Schnitt das auch.

Beweis Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$ ein PDA mit Endzuständen mit $L(M) = L$ und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ ein DFA mit $L(M') = L'$. Konstruiere PDA mit Endzuständen: $M'' = (Z \times Z', \Sigma, \delta'', (z_0, z_0'), \#, E \times E')$ mit

- $((z_k, z_k'), B_1 \cdots B_m) \in \delta''((z_i, z_i'), a, A)$ falls $(z_k, B_1 \cdots B_m) \in \delta(z_i, a, A)$ und $\delta'(z_i', a) = z_k'$
- $((z_k, z_i'), B_1 \cdots B_m) \in \delta''((z_i, z_i'), \varepsilon, A)$ falls $(z_k, B_1 \cdots B_m) \in \delta(z_i, \varepsilon, A)$.

1. $L(M'') = L(M) \cap L(M')$, denn M'' simuliert M und M' gleichzeitig, und akzeptiert nur, wenn beide Automaten akzeptieren.

Weitere Eigenschaften determinischer kontextfreier Sprachen

Satz

Der Schnitt einer kontextfreien Sprachen L mit einer regulären Sprache L' ist kontextfrei. Wenn L deterministisch kontextfrei ist, dann ist der Schnitt das auch.

Beweis Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$ ein PDA mit Endzuständen mit $L(M) = L$ und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ ein DFA mit $L(M') = L'$. Konstruiere PDA mit Endzuständen: $M'' = (Z \times Z', \Sigma, \delta'', (z_0, z_0'), \#, E \times E')$ mit

- $((z_k, z_k'), B_1 \cdots B_m) \in \delta''((z_i, z_i'), a, A)$ falls $(z_k, B_1 \cdots B_m) \in \delta(z_i, a, A)$ und $\delta'(z_i', a) = z_k'$
- $((z_k, z_i'), B_1 \cdots B_m) \in \delta''((z_i, z_i'), \varepsilon, A)$ falls $(z_k, B_1 \cdots B_m) \in \delta(z_i, \varepsilon, A)$.

1. $L(M'') = L(M) \cap L(M')$, denn M'' simuliert M und M' gleichzeitig, und akzeptiert nur, wenn beide Automaten akzeptieren.
2. M'' ist deterministisch, wenn M deterministisch ist. $\square$

Entscheidbarkeitsproblem determinischer kontextfreier Sprachen

Satz

Das Problem, ob eine deterministisch kontextfreie Sprache äquivalent zu einer regulären Sprache ist, ist entscheidbar.

Entscheidbarkeitsproblem determinischer kontextfreier Sprachen

Satz

Das Problem, ob eine deterministisch kontextfreie Sprache äquivalent zu einer regulären Sprache ist, ist entscheidbar.

Beweis Sei L_1 durch einen DPDA und L_2 durch einen DFA gegeben. Um zu zeigen, dass $L_1 = L_2$, reicht es zu zeigen, dass $L_1 \subseteq L_2$ und $L_2 \subseteq L_1$.

Entscheidbarkeitsproblem determinischer kontextfreier Sprachen

Satz

Das Problem, ob eine deterministisch kontextfreie Sprache äquivalent zu einer regulären Sprache ist, ist entscheidbar.

Beweis Sei L_1 durch einen DPDA und L_2 durch einen DFA gegeben. Um zu zeigen, dass $L_1 = L_2$, reicht es zu zeigen, dass $L_1 \subseteq L_2$ und $L_2 \subseteq L_1$.

Dies entspricht $L_1 \cap \overline{L_2} = \emptyset$ und $\overline{L_1} \cap L_2 = \emptyset$.

Entscheidbarkeitsproblem determinischer kontextfreier Sprachen

Satz

Das Problem, ob eine deterministisch kontextfreie Sprache äquivalent zu einer regulären Sprache ist, ist entscheidbar.

Beweis Sei L_1 durch einen DPDA und L_2 durch einen DFA gegeben. Um zu zeigen, dass $L_1 = L_2$, reicht es zu zeigen, dass $L_1 \subseteq L_2$ und $L_2 \subseteq L_1$.

Dies entspricht $L_1 \cap \overline{L_2} = \emptyset$ und $\overline{L_1} \cap L_2 = \emptyset$.

Beides ist entscheidbar, da

- DPDAs und DFAs abgeschlossen unter Komplementbildung sind
- die Schnittbildung zwischen einem DPDA und einem DFA durch einen DPDA konstruierbar ist
- das Leerheitsproblem für kontextfreie Grammatiken entscheidbar ist. □