7a
Äquivalenz von kontextfreien Sprachen und von Kellerautomaten

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 10. Mai 2024
Basiert auf Folien von PD Dr. David Sabel

Wiederholung: PDAs

Definition

Ein (nichtdeterministischer) Kellerautomat (pushdown automaton, PDA) ist ein 6-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$, wobei:

- Z ist eine endliche Menge von Zuständen
- Σ ist das (endliche) Eingabealphabet
- Γ ist das (endliche) Kelleralphabet
- $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}_e(Z \times \Gamma^*)$ ist die Überführungsfunktion
- $z_0 \in Z$ ist der Startzustand
- $\# \in \Gamma$ ist das Startsymbol im Keller.

Kontextfreie Sprachen werden von PDAs akzeptiert

Satz

Für jede kontextfreie Sprache L gibt es einen PDA M mit $L(M) = L$.

Beweis Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$ eine kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform.

Kontextfreie Sprachen werden von PDAs akzeptiert

Satz

Für jede kontextfreie Sprache L gibt es einen PDA M mit $L(M) = L$.

Beweis Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$ eine kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform.

Grundgedanke:

- Wir definieren M, sodass er eine Linksableitung $S \Rightarrow^* a_1 \cdots a_n$ simuliert.
- Da G in Greibach-Normalform ist, ist eine Linksableitung nach i Schritten immer von der Form $S \Rightarrow^i a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_j$.
- Beginne Simulation mit Eingabe $a_1 \cdots a_n$ und S auf dem Keller.
- Nach i Schritten ist $a_1 \cdots a_i$ verarbeitet und $B_1 \cdots B_j$ auf dem Keller.
- Insbesondere ist nach n Schritten $a_1 \cdots a_n$ verarbeitet und ε auf dem Keller.

Kontextfreie Sprachen werden von PDAs akzeptiert

Beweis (Fortsetzung) Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$ eine kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform.

Sei $M = (\{z_0\}, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$ ein PDA, sodass

$$\delta(z_0, a, A) := \{(z_0, B_1 \cdots B_n) \mid (A \to aB_1 \cdots B_n) \in P\}$$

$$\delta(z_0, \varepsilon, A) := \begin{cases} \{(z_0, \varepsilon)\} & \text{falls } \varepsilon \in L \text{ und } A = S \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir werden $L(M) = L$ zeigen.

Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \to aB,\ B \to b \mid aBC,\ C \to b\}, S)$$

Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \to aB,\ B \to b \mid aBC,\ C \to b\}, S)$$

PDA zu G: $M = (\{z_0\}, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$ mit

$$\delta(z_0, a, S) := \{(z_0, B)\} \quad \delta(z_0, b, B) := \{(z_0, \varepsilon)\} \quad \delta(z_0, a, B) := \{(z_0, BC)\}$$
$$\delta(z_0, b, C) := \{(z_0, \varepsilon)\} \quad \delta(z_0, c, A) := \emptyset \text{ sonst, für } c \in \Sigma \cup \{\varepsilon\},\ A \in V$$

Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \to aB,\ B \to b \mid aBC,\ C \to b\}, S)$$

PDA zu G: $M = (\{z_0\}, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$ mit

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a, S) := \{(z_0, B)\} & \delta(z_0, b, B) := \{(z_0, \varepsilon)\} & \delta(z_0, a, B) := \{(z_0, BC)\} \\ \delta(z_0, b, C) := \{(z_0, \varepsilon)\} & \multicolumn{2}{l}{\delta(z_0, c, A) := \emptyset \text{ sonst, für } c \in \Sigma \cup \{\varepsilon\},\ A \in V} \end{array}$$

Eine Konfigurationsfolge von M für die Eingabe $aaabbb$ ist

$$(z_0, aaabbb, S)$$

Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \to aB,\ B \to b \mid aBC,\ C \to b\}, S)$$

PDA zu G: $M = (\{z_0\}, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$ mit

$$\delta(z_0, a, S) := \{(z_0, B)\} \quad \delta(z_0, b, B) := \{(z_0, \varepsilon)\} \quad \delta(z_0, a, B) := \{(z_0, BC)\}$$
$$\delta(z_0, b, C) := \{(z_0, \varepsilon)\} \quad \delta(z_0, c, A) := \emptyset \text{ sonst, für } c \in \Sigma \cup \{\varepsilon\},\ A \in V$$

Eine Konfigurationsfolge von M für die Eingabe $aaabbb$ ist

$$(z_0, aaabbb, S) \vdash (z_0, aabbb, B)$$

Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \to aB,\ B \to b \mid aBC,\ C \to b\}, S)$$

PDA zu G: $M = (\{z_0\}, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$ mit

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a, S) := \{(z_0, B)\} & \delta(z_0, b, B) := \{(z_0, \varepsilon)\} & \delta(z_0, a, B) := \{(z_0, BC)\} \\ \delta(z_0, b, C) := \{(z_0, \varepsilon)\} & \multicolumn{2}{l}{\delta(z_0, c, A) := \emptyset \text{ sonst, für } c \in \Sigma \cup \{\varepsilon\},\ A \in V} \end{array}$$

Eine Konfigurationsfolge von M für die Eingabe $aaabbb$ ist

$$(z_0, aaabbb, S) \vdash (z_0, aabbb, B) \vdash (z_0, abbb, BC)$$

Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \to aB,\ B \to b \mid aBC,\ C \to b\}, S)$$

PDA zu G: $M = (\{z_0\}, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$ mit

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a, S) := \{(z_0, B)\} & \delta(z_0, b, B) := \{(z_0, \varepsilon)\} & \delta(z_0, a, B) := \{(z_0, BC)\} \\ \delta(z_0, b, C) := \{(z_0, \varepsilon)\} & \multicolumn{2}{l}{\delta(z_0, c, A) := \emptyset \text{ sonst, für } c \in \Sigma \cup \{\varepsilon\},\ A \in V} \end{array}$$

Eine Konfigurationsfolge von M für die Eingabe $aaabbb$ ist

$$\begin{aligned} &(z_0, aaabbb, S) \vdash (z_0, aabbb, B) \vdash (z_0, abbb, BC) \\ \vdash\ &(z_0, bbb, BCC) \end{aligned}$$

Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \to aB,\ B \to b \mid aBC,\ C \to b\}, S)$$

PDA zu G: $M = (\{z_0\}, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$ mit

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a, S) := \{(z_0, B)\} & \delta(z_0, b, B) := \{(z_0, \varepsilon)\} & \delta(z_0, a, B) := \{(z_0, BC)\} \\ \delta(z_0, b, C) := \{(z_0, \varepsilon)\} & \delta(z_0, c, A) := \emptyset \text{ sonst, für } c \in \Sigma \cup \{\varepsilon\},\ A \in V & \end{array}$$

Eine Konfigurationsfolge von M für die Eingabe $aaabbb$ ist

$$\begin{aligned} & (z_0, aaabbb, S) \vdash (z_0, aabbb, B) \vdash (z_0, abbb, BC) \\ \vdash\ & (z_0, bbb, BCC) \vdash (z_0, bb, CC) \end{aligned}$$

Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \to aB,\ B \to b \mid aBC,\ C \to b\}, S)$$

PDA zu G: $M = (\{z_0\}, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$ mit

$$\delta(z_0, a, S) := \{(z_0, B)\} \quad \delta(z_0, b, B) := \{(z_0, \varepsilon)\} \quad \delta(z_0, a, B) := \{(z_0, BC)\}$$
$$\delta(z_0, b, C) := \{(z_0, \varepsilon)\} \quad \delta(z_0, c, A) := \emptyset \text{ sonst, für } c \in \Sigma \cup \{\varepsilon\},\ A \in V$$

Eine Konfigurationsfolge von M für die Eingabe $aaabbb$ ist

$$(z_0, aaabbb, S) \vdash (z_0, aabbb, B) \vdash (z_0, abbb, BC)$$
$$\vdash (z_0, bbb, BCC) \vdash (z_0, bb, CC) \vdash (z_0, b, C)$$

Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \to aB,\ B \to b \mid aBC,\ C \to b\}, S)$$

PDA zu G: $M = (\{z_0\}, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$ mit

$$\delta(z_0, a, S) := \{(z_0, B)\} \quad \delta(z_0, b, B) := \{(z_0, \varepsilon)\} \quad \delta(z_0, a, B) := \{(z_0, BC)\}$$
$$\delta(z_0, b, C) := \{(z_0, \varepsilon)\} \quad \delta(z_0, c, A) := \emptyset \text{ sonst, für } c \in \Sigma \cup \{\varepsilon\},\ A \in V$$

Eine Konfigurationsfolge von M für die Eingabe $aaabbb$ ist

$$(z_0, aaabbb, S) \vdash (z_0, aabbb, B) \vdash (z_0, abbb, BC)$$
$$\vdash (z_0, bbb, BCC) \vdash (z_0, bb, CC) \vdash (z_0, b, C) \vdash (z_0, \varepsilon, \varepsilon)$$

Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \to aB,\ B \to b \mid aBC,\ C \to b\}, S)$$

Eine Konfigurationsfolge von M für die Eingabe $aaabbb$ ist

Die entsprechende Linksableitung von G ist

Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aB,\ B \rightarrow b \mid aBC,\ C \rightarrow b\}, S)$$

Eine Konfigurationsfolge von M für die Eingabe $aaabbb$ ist

$$(z_0, aaabbb, S)$$

Die entsprechende Linksableitung von G ist

$$S$$

Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \to aB,\ B \to b \mid aBC,\ C \to b\}, S)$$

Eine Konfigurationsfolge von M für die Eingabe $aaabbb$ ist

$$(z_0, aaabbb, S) \vdash (z_0, aabbb, B)$$

Die entsprechende Linksableitung von G ist

$$S \Rightarrow aB$$

Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \to aB, B \to b \mid aBC, C \to b\}, S)$$

Eine Konfigurationsfolge von M für die Eingabe $aaabbb$ ist

$$(z_0, aaabbb, S) \vdash (z_0, aabbb, B) \vdash (z_0, abbb, BC)$$

Die entsprechende Linksableitung von G ist

$$S \Rightarrow aB \Rightarrow aaBC$$

Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \to aB,\ B \to b \mid aBC,\ C \to b\}, S)$$

Eine Konfigurationsfolge von M für die Eingabe $aaabbb$ ist

$$\begin{aligned} &(z_0, aaabbb, S) \vdash (z_0, aabbb, B) \vdash (z_0, abbb, BC) \\ \vdash\ &(z_0, bbb, BCC) \end{aligned}$$

Die entsprechende Linksableitung von G ist

$$S \Rightarrow aB \Rightarrow aaBC \Rightarrow aaaBCC$$

Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \to aB, B \to b \mid aBC, C \to b\}, S)$$

Eine Konfigurationsfolge von M für die Eingabe $aaabbb$ ist

$$\begin{aligned} &(z_0, aaabbb, S) \vdash (z_0, aabbb, B) \vdash (z_0, abbb, BC) \\ \vdash\ &(z_0, bbb, BCC) \vdash (z_0, bb, CC) \end{aligned}$$

Die entsprechende Linksableitung von G ist

$$S \Rightarrow aB \Rightarrow aaBC \Rightarrow aaaBCC \Rightarrow aaabCC$$

Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \to aB,\ B \to b \mid aBC,\ C \to b\}, S)$$

Eine Konfigurationsfolge von M für die Eingabe $aaabbb$ ist

$$\begin{aligned} &(z_0, aaabbb, S) \vdash (z_0, aabbb, B) \vdash (z_0, abbb, BC) \\ \vdash\ &(z_0, bbb, BCC) \vdash (z_0, bb, CC) \vdash (z_0, b, C) \end{aligned}$$

Die entsprechende Linksableitung von G ist

$$S \Rightarrow aB \Rightarrow aaBC \Rightarrow aaaBCC \Rightarrow aaabCC \Rightarrow aaabbC$$

Beispiel für die Konstruktion eines PDA aus einer Grammatik

Kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform

$$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \to aB,\ B \to b \mid aBC,\ C \to b\}, S)$$

Eine Konfigurationsfolge von M für die Eingabe $aaabbb$ ist

$$(z_0, aaabbb, S) \vdash (z_0, aabbb, B) \vdash (z_0, abbb, BC)$$
$$\vdash (z_0, bbb, BCC) \vdash (z_0, bb, CC) \vdash (z_0, b, C) \vdash (z_0, \varepsilon, \varepsilon)$$

Die entsprechende Linksableitung von G ist

$$S \Rightarrow aB \Rightarrow aaBC \Rightarrow aaaBCC \Rightarrow aaabCC \Rightarrow aaabbC \Rightarrow aaabbb$$

Kontextfreie Sprachen werden von PDAs akzeptiert

Satz

Für jede kontextfreie Sprache L gibt es einen PDA M mit $L(M) = L$.

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen $L(M) = L$, indem wir zeigen: $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L$.

Kontextfreie Sprachen werden von PDAs akzeptiert

Satz

Für jede kontextfreie Sprache L gibt es einen PDA M mit $L(M) = L$.

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen $L(M) = L$, indem wir zeigen: $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L$.

- Fall $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L$ g.d.w. $(z_0, \varepsilon, S) \vdash^* (z_0, \varepsilon, \varepsilon)$ g.d.w. $\varepsilon \in L(M)$.

Kontextfreie Sprachen werden von PDAs akzeptiert

Satz

Für jede kontextfreie Sprache L gibt es einen PDA M mit $L(M) = L$.

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen $L(M) = L$, indem wir zeigen: $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L$.

- Fall $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L$ g.d.w. $(z_0, \varepsilon, S) \vdash^* (z_0, \varepsilon, \varepsilon)$ g.d.w. $\varepsilon \in L(M)$.
- Fall $w = a_1 \cdots a_n$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$: Wir werden folgende Verallgemeinerung zeigen: $S \Rightarrow_G^i a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_m$ mit einer Linksableitung g.d.w. $(z_0, a_1 \cdots a_i u, S) \vdash^i (z_0, u, B_1 \cdots B_m)$ für jedes $u \in \Sigma^*$.

Kontextfreie Sprachen werden von PDAs akzeptiert

Satz

Für jede kontextfreie Sprache L gibt es einen PDA M mit $L(M) = L$.

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen $L(M) = L$, indem wir zeigen: $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L$.

- Fall $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L$ g.d.w. $(z_0, \varepsilon, S) \vdash^* (z_0, \varepsilon, \varepsilon)$ g.d.w. $\varepsilon \in L(M)$.
- Fall $w = a_1 \cdots a_n$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$: Wir werden folgende Verallgemeinerung zeigen:
  $S \Rightarrow_G^i a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_m$ mit einer Linksableitung
  g.d.w. $(z_0, a_1 \cdots a_i u, S) \vdash^i (z_0, u, B_1 \cdots B_m)$ für jedes $u \in \Sigma^*$.

  Daher $w \in L$ g.d.w. $S \Rightarrow_G^* w$ g.d.w. $S \Rightarrow_G^n w$
  g.d.w. $S \Rightarrow_G^n w$ mit einer Linksableitung g.d.w. $(z_0, w, S) \vdash^n (z_0, \varepsilon, \varepsilon)$
  g.d.w. $(z_0, w, S) \vdash^* (z_0, \varepsilon, \varepsilon)$ g.d.w. $w \in L(M)$.

Kontextfreie Sprachen werden von PDAs akzeptiert

Beweis (Fortsetzung)

Wir zeigen folgende Verallgemeinerung durch Induktion über i:
$S \Rightarrow_G^i a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_m$ mit einer Linksableitung
g.d.w. $(z_0, a_1 \cdots a_i u, S) \vdash^i (z_0, u, B_1 \cdots B_m)$ für jedes $u \in \Sigma^*$.

Kontextfreie Sprachen werden von PDAs akzeptiert

Beweis (Fortsetzung)

Wir zeigen folgende Verallgemeinerung durch Induktion über i:
$S \Rightarrow_G^i a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_m$ mit einer Linksableitung
g.d.w. $(z_0, a_1 \cdots a_i u, S) \vdash^i (z_0, u, B_1 \cdots B_m)$ für jedes $u \in \Sigma^*$.

- Fall $i = 0$: Wir haben $S \Rightarrow_G^0 S$ und $(z_0, w, S) \vdash^0 (z_0, w, S)$.

Kontextfreie Sprachen werden von PDAs akzeptiert

Beweis (Fortsetzung)

Wir zeigen folgende Verallgemeinerung durch Induktion über i:
$S \Rightarrow_G^i a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_m$ mit einer Linksableitung
g.d.w. $(z_0, a_1 \cdots a_i u, S) \vdash^i (z_0, u, B_1 \cdots B_m)$ für jedes $u \in \Sigma^*$.

- Fall $i = 0$: Wir haben $S \Rightarrow_G^0 S$ und $(z_0, w, S) \vdash^0 (z_0, w, S)$.
- Fall $i > 0$: Wir konzentrieren uns auf die $\Longrightarrow$-Richtung.
  Die andere Richtung ist ähnlich (siehe Skript).

Kontextfreie Sprachen werden von PDAs akzeptiert

Beweis (Fortsetzung)

Wir zeigen folgende Verallgemeinerung durch Induktion über i:
$S \Rightarrow_G^i a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_m$ mit einer Linksableitung
g.d.w. $(z_0, a_1 \cdots a_i u, S) \vdash^i (z_0, u, B_1 \cdots B_m)$ für jedes $u \in \Sigma^*$.

- Fall $i = 0$: Wir haben $S \Rightarrow_G^0 S$ und $(z_0, w, S) \vdash^0 (z_0, w, S)$.
- Fall $i > 0$: Wir konzentrieren uns auf die $\Longrightarrow$-Richtung.
  Die andere Richtung ist ähnlich (siehe Skript).

  Sei $S \Rightarrow_G^i a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_m$ eine Linksableitung.

Kontextfreie Sprachen werden von PDAs akzeptiert

Beweis (Fortsetzung)

Wir zeigen folgende Verallgemeinerung durch Induktion über i:
$S \Rightarrow_G^i a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_m$ mit einer Linksableitung
g.d.w. $(z_0, a_1 \cdots a_i u, S) \vdash^i (z_0, u, B_1 \cdots B_m)$ für jedes $u \in \Sigma^*$.

- Fall $i = 0$: Wir haben $S \Rightarrow_G^0 S$ und $(z_0, w, S) \vdash^0 (z_0, w, S)$.
- Fall $i > 0$: Wir konzentrieren uns auf die $\Longrightarrow$-Richtung.
  Die andere Richtung ist ähnlich (siehe Skript).

  Sei $S \Rightarrow_G^i a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_m$ eine Linksableitung.

  Da G in Greibach-Normalform ist, kann diese geschrieben werden als
  $S \Rightarrow_G^{i-1} a_1 \cdots a_{i-1} B_x B_{j+1} \cdots B_m \Rightarrow_G a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_m$,
  wobei $B_x \to a_i B_1 \cdots B_j \in P$ als letzte Produktion angewendet wurde.

Kontextfreie Sprachen werden von PDAs akzeptiert

Beweis (Fortsetzung)

Wir zeigen folgende Verallgemeinerung durch Induktion über i:
$S \Rightarrow_G^i a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_m$ mit einer Linksableitung
g.d.w. $(z_0, a_1 \cdots a_i u, S) \vdash^i (z_0, u, B_1 \cdots B_m)$ für jedes $u \in \Sigma^*$.

- Fall $i = 0$: Wir haben $S \Rightarrow_G^0 S$ und $(z_0, w, S) \vdash^0 (z_0, w, S)$.
- Fall $i > 0$: Wir konzentrieren uns auf die $\Longrightarrow$-Richtung.
  Die andere Richtung ist ähnlich (siehe Skript).

  Sei $S \Rightarrow_G^i a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_m$ eine Linksableitung.

  Da G in Greibach-Normalform ist, kann diese geschrieben werden als
  $S \Rightarrow_G^{i-1} a_1 \cdots a_{i-1} B_x B_{j+1} \cdots B_m \Rightarrow_G a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_m$,
  wobei $B_x \to a_i B_1 \cdots B_j \in P$ als letzte Produktion angewendet wurde.

  Die Induktionshypothese liefert: $S \Rightarrow_G^{i-1} a_1 \cdots a_{i-1} B_x B_{j+1} \cdots B_m$
  g.d.w. $(z_0, a_1 \cdots a_{i-1} u, S) \vdash^{i-1} (z_0, u, B_x B_{j+1} \cdots B_k)$ für jedes $u \in \Sigma^*$.

Kontextfreie Sprachen werden von PDAs akzeptiert

Beweis (Fortsetzung)

Wir zeigen folgende Verallgemeinerung durch Induktion über i:
$S \Rightarrow_G^i a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_m$ mit einer Linksableitung
g.d.w. $(z_0, a_1 \cdots a_i u, S) \vdash^i (z_0, u, B_1 \cdots B_m)$ für jedes $u \in \Sigma^*$.

- Fall $i = 0$: Wir haben $S \Rightarrow_G^0 S$ und $(z_0, w, S) \vdash^0 (z_0, w, S)$.
- Fall $i > 0$: Wir konzentrieren uns auf die $\Longrightarrow$-Richtung.
  Die andere Richtung ist ähnlich (siehe Skript).

  Sei $S \Rightarrow_G^i a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_m$ eine Linksableitung.

  Da G in Greibach-Normalform ist, kann diese geschrieben werden als
  $S \Rightarrow_G^{i-1} a_1 \cdots a_{i-1} B_x B_{j+1} \cdots B_m \Rightarrow_G a_1 \cdots a_i B_1 \cdots B_m$,
  wobei $B_x \to a_i B_1 \cdots B_j \in P$ als letzte Produktion angewendet wurde.

  Die Induktionshypothese liefert: $S \Rightarrow_G^{i-1} a_1 \cdots a_{i-1} B_x B_{j+1} \cdots B_m$
  g.d.w. $(z_0, a_1 \cdots a_{i-1} u, S) \vdash^{i-1} (z_0, u, B_x B_{j+1} \cdots B_k)$ für jedes $u \in \Sigma^*$.

  Mit $u := a_i u'$ und $(z_0, B_1 \cdots B_j) \in \delta(z_0, a_i, B_x)$ gilt
  $(z_0, a_1 \cdots a_i u', S) \vdash^i (z_0, u', B_1 \cdots B_k)$ für jedes $u' \in \Sigma^*$. $\square$

Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$ ein PDA. Dann ist $L(M)$ kontextfrei.

Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$ ein PDA. Dann ist $L(M)$ kontextfrei.

Beweis Grundgedanke:

- Nehme o.B.d.A. an, dass M maximal 2 Kellersymbole erzeugt.
- Definiere Grammatik mit der sogenannten Tripelkonstruktion:
  - Die Variablen der Grammatik sind Tripel $\langle z', A, z \rangle$, die alle Wörter w erzeugt, die den PDA von z' mit Kellerinhalt A und Wort w zu z und leeren Keller führen.

Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$ ein PDA. Dann ist $L(M)$ kontextfrei.

Beweis (Fortsetzung)

- Die Produktionen sind (für $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$)

$\langle z', A, z\rangle \to a$, wenn $z' \xrightarrow{(A, a) : \varepsilon} z$

$\langle z', A, z\rangle \to a\langle z'', B, z\rangle$, wenn $z' \xrightarrow{(A, a) : B} z''$

$\langle z', A, z\rangle \to a\langle z'', B, z'''\rangle\langle z''', C, z\rangle$, wenn $z' \xrightarrow{(A, a) : BC} z''$, $z''' \in Z$

Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$ ein PDA. Dann ist $L(M)$ kontextfrei.

Beweis (Fortsetzung) Nehme o.B.d.A. an, dass M ein PDA mit $k \leq 2$ für alle $(z', B_1 \cdots B_k) \in \delta(z, a, A)$ (und $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$) ist.

Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, V, \delta, z_0, S)$ ein PDA. Dann ist $L(M)$ kontextfrei.

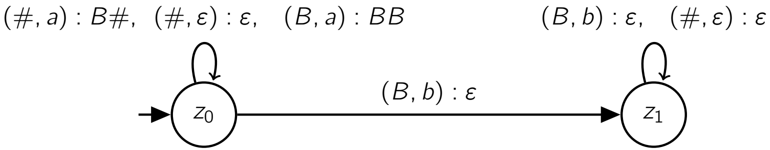
Beweis (Fortsetzung) Nehme o.B.d.A. an, dass M ein PDA mit $k \leq 2$ für alle $(z', B_1 \cdots B_k) \in \delta(z, a, A)$ (und $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$) ist.

Konstruiere $G = (V, \Sigma, P, S)$ (mit 2. Sonderregel), wobei S ein neues Symbol ist und

$$
\begin{aligned}
V &:= \{S\} \cup \{\langle z_i, A, z_j\rangle \mid z_i, z_j \in Z, A \in \Gamma\} \\
P &:= \{S \to \langle z_0, \#, z\rangle \mid z \in Z\} \\
&\quad \cup \{\langle z', A, z\rangle \to a \\
&\qquad \mid (z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A),\ a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, A \in \Gamma\} \\
&\quad \cup \{\langle z', A, z\rangle \to a\langle z'', B, z\rangle \\
&\qquad \mid (z'', B) \in \delta(z', a, A),\ z \in Z,\ a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, A \in \Gamma\} \\
&\quad \cup \{\langle z', A, z\rangle \to a\langle z'', B, z'''\rangle\langle z''', C, z\rangle \\
&\qquad \mid (z'', BC) \in \delta(z', a, A),\ z, z''' \in Z,\ a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\},\ A \in \Gamma\}
\end{aligned}
$$

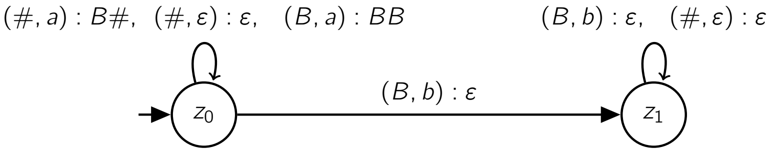
Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA M:



Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA M:

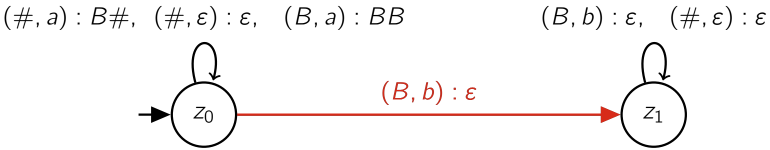


Grammatik zu M: $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$
\begin{aligned}
V = \{&S, \langle z_0, B, z_0\rangle, \langle z_0, B, z_1\rangle, \langle z_1, B, z_0\rangle, \langle z_1, B, z_1\rangle,\\
&\langle z_0, \#, z_0\rangle, \langle z_0, \#, z_1\rangle, \langle z_1, \#, z_0\rangle, \langle z_1, \#, z_1\rangle\}\\
P = \{&S \to \langle z_0, \#, z_0\rangle, S \to \langle z_0, \#, z_1\rangle\}\\
&\cup \{\langle z_0, B, z_1\rangle \to b,\ \langle z_1, B, z_1\rangle \to b,\ \langle z_0, \#, z_0\rangle \to \varepsilon,\ \langle z_1, \#, z_1\rangle \to \varepsilon\}\\
&\cup \{\langle z_0, \#, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, \#, z_0\rangle,\ \langle z_0, \#, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, \#, z_0\rangle,\\
&\quad \langle z_0, \#, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, \#, z_1\rangle,\ \langle z_0, \#, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, \#, z_1\rangle,\\
&\quad \langle z_0, B, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, B, z_0\rangle,\ \langle z_0, B, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, B, z_1\rangle,\\
&\quad \langle z_0, B, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, B, z_0\rangle,\ \langle z_0, B, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, B, z_1\rangle\}
\end{aligned}
$$

Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA M:

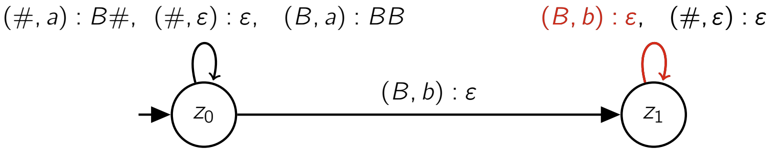


Grammatik zu M: $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$
\begin{aligned}
V = \{&S, \langle z_0, B, z_0\rangle, \langle z_0, B, z_1\rangle, \langle z_1, B, z_0\rangle, \langle z_1, B, z_1\rangle,\\
&\langle z_0, \#, z_0\rangle, \langle z_0, \#, z_1\rangle, \langle z_1, \#, z_0\rangle, \langle z_1, \#, z_1\rangle\}\\
P = \{&S \to \langle z_0, \#, z_0\rangle, S \to \langle z_0, \#, z_1\rangle\}\\
&\cup \{\langle z_0, B, z_1\rangle \to b,\ \langle z_1, B, z_1\rangle \to b,\ \langle z_0, \#, z_0\rangle \to \varepsilon,\ \langle z_1, \#, z_1\rangle \to \varepsilon\}\\
&\cup \{\langle z_0, \#, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, \#, z_0\rangle,\ \langle z_0, \#, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, \#, z_0\rangle,\\
&\quad \langle z_0, \#, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, \#, z_1\rangle,\ \langle z_0, \#, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, \#, z_1\rangle,\\
&\quad \langle z_0, B, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, B, z_0\rangle,\ \langle z_0, B, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, B, z_1\rangle,\\
&\quad \langle z_0, B, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, B, z_0\rangle,\ \langle z_0, B, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, B, z_1\rangle\}
\end{aligned}
$$

Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA M:



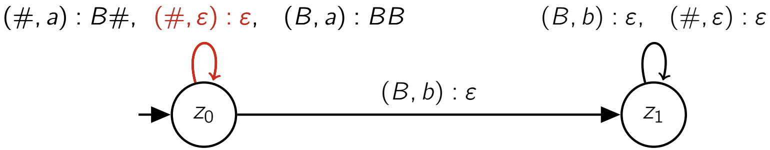
Grammatik zu M: $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$\begin{aligned}
V = \{&S, \langle z_0, B, z_0\rangle, \langle z_0, B, z_1\rangle, \langle z_1, B, z_0\rangle, \langle z_1, B, z_1\rangle,\\
&\langle z_0, \#, z_0\rangle, \langle z_0, \#, z_1\rangle, \langle z_1, \#, z_0\rangle, \langle z_1, \#, z_1\rangle\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P = \{&S \to \langle z_0, \#, z_0\rangle, S \to \langle z_0, \#, z_1\rangle\}\\
\cup \{&\langle z_0, B, z_1\rangle \to b,\ \langle z_1, B, z_1\rangle \to b,\ \langle z_0, \#, z_0\rangle \to \varepsilon,\ \langle z_1, \#, z_1\rangle \to \varepsilon\}\\
\cup \{&\langle z_0, \#, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, \#, z_0\rangle,\ \langle z_0, \#, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, \#, z_0\rangle,\\
&\langle z_0, \#, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, \#, z_1\rangle,\ \langle z_0, \#, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, \#, z_1\rangle,\\
&\langle z_0, B, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, B, z_0\rangle,\ \langle z_0, B, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, B, z_1\rangle,\\
&\langle z_0, B, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, B, z_0\rangle,\ \langle z_0, B, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, B, z_1\rangle\}
\end{aligned}$$

Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA M:



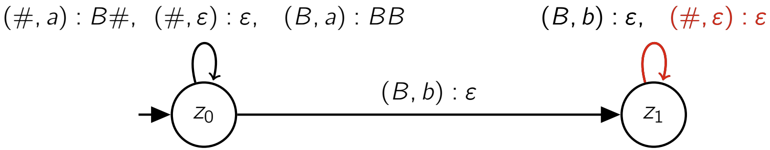
Grammatik zu M: $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$
\begin{aligned}
V = \{ & S, \langle z_0, B, z_0\rangle, \langle z_0, B, z_1\rangle, \langle z_1, B, z_0\rangle, \langle z_1, B, z_1\rangle, \\
& \langle z_0, \#, z_0\rangle, \langle z_0, \#, z_1\rangle, \langle z_1, \#, z_0\rangle, \langle z_1, \#, z_1\rangle\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P = \{ & S \to \langle z_0, \#, z_0\rangle, S \to \langle z_0, \#, z_1\rangle\} \\
\cup \{ & \langle z_0, B, z_1\rangle \to b, \ \langle z_1, B, z_1\rangle \to b, \ \langle z_0, \#, z_0\rangle \to \varepsilon, \ \langle z_1, \#, z_1\rangle \to \varepsilon\} \\
\cup \{ & \langle z_0, \#, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, \#, z_0\rangle, \ \langle z_0, \#, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, \#, z_0\rangle, \\
& \langle z_0, \#, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, \#, z_1\rangle, \ \langle z_0, \#, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, \#, z_1\rangle, \\
& \langle z_0, B, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, B, z_0\rangle, \ \langle z_0, B, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, B, z_1\rangle, \\
& \langle z_0, B, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, B, z_0\rangle, \ \langle z_0, B, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, B, z_1\rangle\}
\end{aligned}
$$

Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA M:

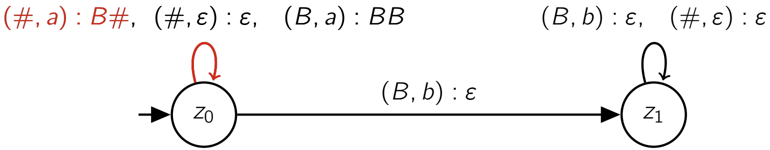


Grammatik zu M: $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$
\begin{aligned}
V = \{&S, \langle z_0, B, z_0\rangle, \langle z_0, B, z_1\rangle, \langle z_1, B, z_0\rangle, \langle z_1, B, z_1\rangle,\\
&\langle z_0, \#, z_0\rangle, \langle z_0, \#, z_1\rangle, \langle z_1, \#, z_0\rangle, \langle z_1, \#, z_1\rangle\}\\
P = \{&S \to \langle z_0, \#, z_0\rangle, S \to \langle z_0, \#, z_1\rangle\}\\
\cup\ \{&\langle z_0, B, z_1\rangle \to b,\ \langle z_1, B, z_1\rangle \to b,\ \langle z_0, \#, z_0\rangle \to \varepsilon,\ \langle z_1, \#, z_1\rangle \to \varepsilon\}\\
\cup\ \{&\langle z_0, \#, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, \#, z_0\rangle,\ \langle z_0, \#, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, \#, z_0\rangle,\\
&\langle z_0, \#, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, \#, z_1\rangle,\ \langle z_0, \#, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, \#, z_1\rangle,\\
&\langle z_0, B, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, B, z_0\rangle,\ \langle z_0, B, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, B, z_1\rangle,\\
&\langle z_0, B, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, B, z_0\rangle,\ \langle z_0, B, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, B, z_1\rangle\}
\end{aligned}
$$

Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA M:

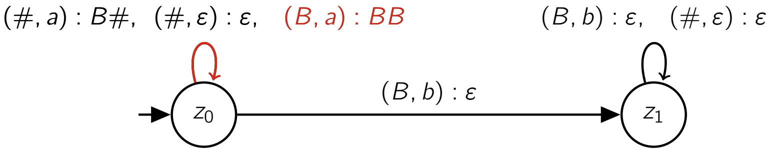


Grammatik zu M: $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$
\begin{aligned}
V = \{&S, \langle z_0, B, z_0\rangle, \langle z_0, B, z_1\rangle, \langle z_1, B, z_0\rangle, \langle z_1, B, z_1\rangle,\\
&\langle z_0, \#, z_0\rangle, \langle z_0, \#, z_1\rangle, \langle z_1, \#, z_0\rangle, \langle z_1, \#, z_1\rangle\}\\
P = \{&S \to \langle z_0, \#, z_0\rangle, S \to \langle z_0, \#, z_1\rangle\}\\
&\cup \{\langle z_0, B, z_1\rangle \to b,\ \langle z_1, B, z_1\rangle \to b,\ \langle z_0, \#, z_0\rangle \to \varepsilon,\ \langle z_1, \#, z_1\rangle \to \varepsilon\}\\
&\cup \{\langle z_0, \#, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, \#, z_0\rangle,\ \langle z_0, \#, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, \#, z_0\rangle,\\
&\quad \langle z_0, \#, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, \#, z_1\rangle,\ \langle z_0, \#, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, \#, z_1\rangle,\\
&\quad \langle z_0, B, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, B, z_0\rangle,\ \langle z_0, B, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, B, z_1\rangle,\\
&\quad \langle z_0, B, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, B, z_0\rangle,\ \langle z_0, B, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, B, z_1\rangle\}
\end{aligned}
$$

Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA M:

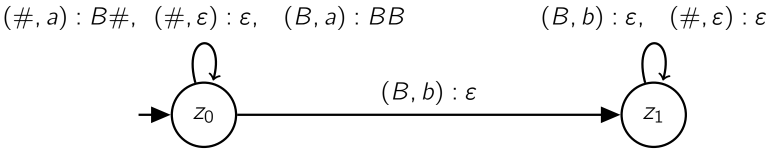


Grammatik zu M: $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$
\begin{aligned}
V = \{&S, \langle z_0, B, z_0\rangle, \langle z_0, B, z_1\rangle, \langle z_1, B, z_0\rangle, \langle z_1, B, z_1\rangle,\\
&\langle z_0, \#, z_0\rangle, \langle z_0, \#, z_1\rangle, \langle z_1, \#, z_0\rangle, \langle z_1, \#, z_1\rangle\}\\
P = \{&S \to \langle z_0, \#, z_0\rangle, S \to \langle z_0, \#, z_1\rangle\}\\
&\cup \{\langle z_0, B, z_1\rangle \to b,\ \langle z_1, B, z_1\rangle \to b,\ \langle z_0, \#, z_0\rangle \to \varepsilon,\ \langle z_1, \#, z_1\rangle \to \varepsilon\}\\
&\cup \{\langle z_0, \#, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, \#, z_0\rangle,\ \langle z_0, \#, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, \#, z_0\rangle,\\
&\quad \langle z_0, \#, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, \#, z_1\rangle,\ \langle z_0, \#, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, \#, z_1\rangle,\\
&\quad \langle z_0, B, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, B, z_0\rangle,\ \langle z_0, B, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_0\rangle\langle z_0, B, z_1\rangle,\\
&\quad \langle z_0, B, z_0\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, B, z_0\rangle,\ \langle z_0, B, z_1\rangle \to a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, B, z_1\rangle\}
\end{aligned}
$$

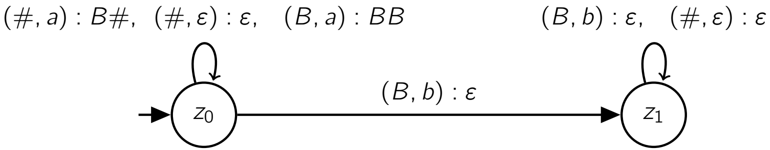
Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA M:



Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA M:



Eine Konfigurationsfolge von M für die Eingabe $aabb$ ist

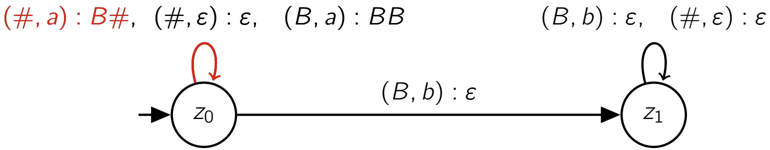
$(z_0, aabb, \#)$

Die entsprechende Linksableitung von G ist

$$S \Rightarrow \langle z_0, \#, z_1 \rangle$$

Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA M:



Eine Konfigurationsfolge von M für die Eingabe $aabb$ ist

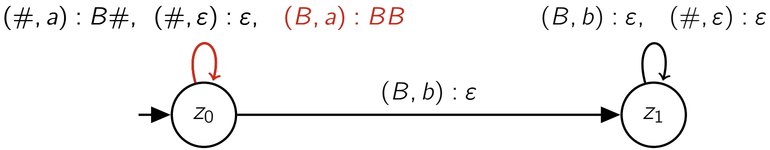
$$(z_0, aabb, \#) \vdash (z_0, abb, B\#)$$

Die entsprechende Linksableitung von G ist

$$S \Rightarrow \langle z_0, \#, z_1 \rangle \Rightarrow a\langle z_0, B, z_1 \rangle \langle z_1, \#, z_1 \rangle$$

Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA M:



Eine Konfigurationsfolge von M für die Eingabe $aabb$ ist

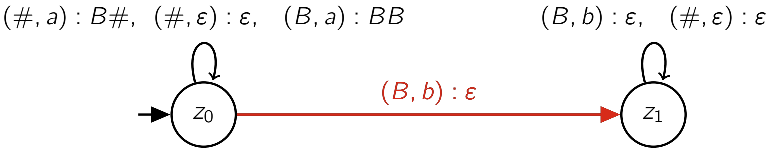
$$(z_0, aabb, \#) \vdash (z_0, abb, B\#) \vdash (z_0, bb, BB\#)$$

Die entsprechende Linksableitung von G ist

$$S \Rightarrow \langle z_0, \#, z_1 \rangle \Rightarrow a\langle z_0, B, z_1 \rangle\langle z_1, \#, z_1 \rangle \Rightarrow aa\langle z_0, B, z_1 \rangle\langle z_1, B, z_1 \rangle\langle z_1, \#, z_1 \rangle$$

Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA M:



Eine Konfigurationsfolge von M für die Eingabe $aabb$ ist

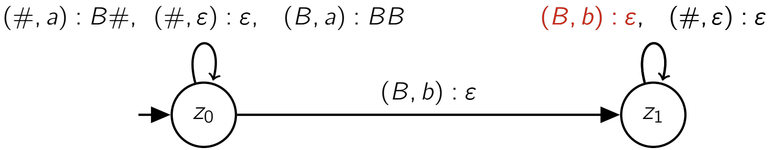
$$(z_0, aabb, \#) \vdash (z_0, abb, B\#) \vdash (z_0, bb, BB\#) \vdash (z_1, b, B\#)$$

Die entsprechende Linksableitung von G ist

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \langle z_0, \#, z_1\rangle \Rightarrow a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, \#, z_1\rangle \Rightarrow aa\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, B, z_1\rangle\langle z_1, \#, z_1\rangle \\ &\Rightarrow aab\langle z_1, B, z_1\rangle\langle z_1, \#, z_1\rangle \end{aligned}$$

Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA M:



Eine Konfigurationsfolge von M für die Eingabe $aabb$ ist

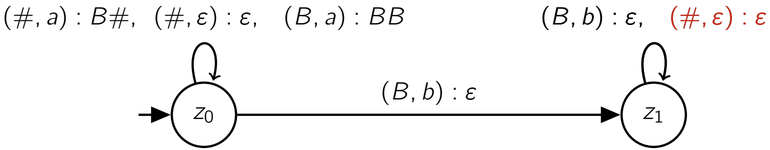
$$(z_0, aabb, \#) \vdash (z_0, abb, B\#) \vdash (z_0, bb, BB\#) \vdash (z_1, b, B\#) \vdash (z_1, \varepsilon, \#)$$

Die entsprechende Linksableitung von G ist

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \langle z_0, \#, z_1 \rangle \Rightarrow a\langle z_0, B, z_1 \rangle\langle z_1, \#, z_1 \rangle \Rightarrow aa\langle z_0, B, z_1 \rangle\langle z_1, B, z_1 \rangle\langle z_1, \#, z_1 \rangle \\ &\Rightarrow aab\langle z_1, B, z_1 \rangle\langle z_1, \#, z_1 \rangle \Rightarrow aabb\langle z_1, \#, z_1 \rangle \end{aligned}$$

Beispiel für die Tripelkonstruktion

PDA M:



Eine Konfigurationsfolge von M für die Eingabe $aabb$ ist

$$(z_0, aabb, \#) \vdash (z_0, abb, B\#) \vdash (z_0, bb, BB\#) \vdash (z_1, b, B\#) \vdash (z_1, \varepsilon, \#) \vdash (z_1, \varepsilon, \varepsilon)$$

Die entsprechende Linksableitung von G ist

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \langle z_0, \#, z_1\rangle \Rightarrow a\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, \#, z_1\rangle \Rightarrow aa\langle z_0, B, z_1\rangle\langle z_1, B, z_1\rangle\langle z_1, \#, z_1\rangle \\ &\Rightarrow aab\langle z_1, B, z_1\rangle\langle z_1, \#, z_1\rangle \Rightarrow aabb\langle z_1, \#, z_1\rangle \Rightarrow aabb \end{aligned}$$

Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen die Verallgemeinerung:
$\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G^* w$ g.d.w. $(z', w, A) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$.

Da $S \to \langle z_0, \#, z\rangle \in P$ folgt: $w \in L(G)$ g.d.w. $w \in L(M)$, d.h. $L(G) = L(M)$.

$\Longrightarrow$ Sei $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G^i w$ eine Linksableitung. Wir verwenden Induktion über i.

Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen die Verallgemeinerung:
$\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G^* w$ g.d.w. $(z', w, A) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$.

Da $S \to \langle z_0, \#, z\rangle \in P$ folgt: $w \in L(G)$ g.d.w. $w \in L(M)$, d.h. $L(G) = L(M)$.

$\Longrightarrow$ Sei $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G^i w$ eine Linksableitung. Wir verwenden Induktion über i.

- Fall $i = 0$: Unmöglich.

Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen die Verallgemeinerung:
$\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G^* w$ g.d.w. $(z', w, A) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$.

Da $S \to \langle z_0, \#, z\rangle \in P$ folgt: $w \in L(G)$ g.d.w. $w \in L(M)$, d.h. $L(G) = L(M)$.

$\Longrightarrow$ Sei $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G^i w$ eine Linksableitung. Wir verwenden Induktion über i.

- Fall $i = 0$: Unmöglich.
- Fall $i = 1$: Sei $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G w$. Die verwendete Produktion muss $\langle z', A, z\rangle \to a$ sein. Dann muss $(z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A)$ gelten und damit gilt: $(z', a, A) \vdash (z, \varepsilon, \varepsilon)$.

Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen die Verallgemeinerung:
$\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G^* w$ g.d.w. $(z', w, A) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$.

Da $S \to \langle z_0, \#, z\rangle \in P$ folgt: $w \in L(G)$ g.d.w. $w \in L(M)$, d.h. $L(G) = L(M)$.

$\Longrightarrow$ Sei $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G^i w$ eine Linksableitung. Wir verwenden Induktion über i.

- Fall $i = 0$: Unmöglich.
- Fall $i = 1$: Sei $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G w$. Die verwendete Produktion muss $\langle z', A, z\rangle \to a$ sein. Dann muss $(z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A)$ gelten und damit gilt: $(z', a, A) \vdash (z, \varepsilon, \varepsilon)$.
- Fall $i > 1$: Sei $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G u \Rightarrow_G^{i-1} w$ mit $i - 1 > 0$.

Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen die Verallgemeinerung:

$\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G^* w$ g.d.w. $(z', w, A) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$.

Da $S \to \langle z_0, \#, z\rangle \in P$ folgt: $w \in L(G)$ g.d.w. $w \in L(M)$, d.h. $L(G) = L(M)$.

$\Longrightarrow$ Sei $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G^i w$ eine Linksableitung. Wir verwenden Induktion über i.

- Fall $i = 0$: Unmöglich.
- Fall $i = 1$: Sei $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G w$. Die verwendete Produktion muss $\langle z', A, z\rangle \to a$ sein. Dann muss $(z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A)$ gelten und damit gilt: $(z', a, A) \vdash (z, \varepsilon, \varepsilon)$.
- Fall $i > 1$: Sei $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G u \Rightarrow_G^{i-1} w$ mit $i - 1 > 0$.
  - Wenn $u = a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, dann $u = w$. Dann kann $i - 1 > 0$ nicht gelten.

Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen die Verallgemeinerung:
$\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G^* w$ g.d.w. $(z', w, A) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$.

Da $S \to \langle z_0, \#, z\rangle \in P$ folgt: $w \in L(G)$ g.d.w. $w \in L(M)$, d.h. $L(G) = L(M)$.

$\Longrightarrow$ Sei $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G^i w$ eine Linksableitung. Wir verwenden Induktion über i.

- Fall $i = 0$: Unmöglich.
- Fall $i = 1$: Sei $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G w$. Die verwendete Produktion muss $\langle z', A, z\rangle \to a$ sein. Dann muss $(z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A)$ gelten und damit gilt: $(z', a, A) \vdash (z, \varepsilon, \varepsilon)$.
- Fall $i > 1$: Sei $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G u \Rightarrow_G^{i-1} w$ mit $i - 1 > 0$.
  - Wenn $u = a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, dann $u = w$. Dann kann $i - 1 > 0$ nicht gelten.
  - Wenn $u = a\langle z'', B, z\rangle$, dann $(z'', B) \in \delta(z', a, A)$ und $u = a\langle z'', B, z\rangle \Rightarrow^{i-1} aw' = w$.

Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen die Verallgemeinerung:
$\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G^* w$ g.d.w. $(z', w, A) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$.

Da $S \to \langle z_0, \#, z\rangle \in P$ folgt: $w \in L(G)$ g.d.w. $w \in L(M)$, d.h. $L(G) = L(M)$.

$\Longrightarrow$ Sei $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G^i w$ eine Linksableitung. Wir verwenden Induktion über i.

- Fall $i = 0$: Unmöglich.
- Fall $i = 1$: Sei $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G w$. Die verwendete Produktion muss $\langle z', A, z\rangle \to a$ sein. Dann muss $(z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A)$ gelten und damit gilt: $(z', a, A) \vdash (z, \varepsilon, \varepsilon)$.
- Fall $i > 1$: Sei $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G u \Rightarrow_G^{i-1} w$ mit $i - 1 > 0$.
  - Wenn $u = a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, dann $u = w$. Dann kann $i - 1 > 0$ nicht gelten.
  - Wenn $u = a\langle z'', B, z\rangle$, dann $(z'', B) \in \delta(z', a, A)$ und $u = a\langle z'', B, z\rangle \Rightarrow^{i-1} aw' = w$.

    Dann gilt $\langle z'', B, z\rangle \Rightarrow^{i-1} w'$ und die Induktionshypothese liefert $(z'', w', B) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$. Mit $(z'', B) \in \delta(z', a, A)$ zeigt dies $(z', \underbrace{aw'}_{w}, A) \vdash_M (z'', w', B) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$.

Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen die Verallgemeinerung:
$\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G^* w$ g.d.w. $(z', w, A) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$.

Da $S \to \langle z_0, \#, z\rangle \in P$ folgt: $w \in L(G)$ g.d.w. $w \in L(M)$, d.h. $L(G) = L(M)$.

$\Longrightarrow$ Sei $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G^i w$ eine Linksableitung. Wir verwenden Induktion über i.

- Fall $i = 0$: Unmöglich.
- Fall $i = 1$: Sei $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G w$. Die verwendete Produktion muss $\langle z', A, z\rangle \to a$ sein. Dann muss $(z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A)$ gelten und damit gilt: $(z', a, A) \vdash (z, \varepsilon, \varepsilon)$.
- Fall $i > 1$: Sei $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G u \Rightarrow_G^{i-1} w$ mit $i - 1 > 0$.
  - Wenn $u = a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, dann $u = w$. Dann kann $i - 1 > 0$ nicht gelten.
  - Wenn $u = a\langle z'', B, z\rangle$, dann $(z'', B) \in \delta(z', a, A)$ und $u = a\langle z'', B, z\rangle \Rightarrow^{i-1} aw' = w$.

    Dann gilt $\langle z'', B, z\rangle \Rightarrow^{i-1} w'$ und die Induktionshypothese liefert $(z'', w', B) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$. Mit $(z'', B) \in \delta(z', a, A)$ zeigt dies $(z', \underbrace{aw'}_{w}, A) \vdash_M (z'', w', B) \vdash_M^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$.
  - Der Fall $u = a\langle z'', B, z'''\rangle\langle z''', C, z\rangle$ ist komplizierter aber ähnlich (siehe Skript).

Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

$\Longleftarrow$ Sei $(z', w, A) \vdash_M^i (z, \varepsilon, \varepsilon)$. Wir zeigen $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G^* w$ mit Induktion über i.

Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

$\Longleftarrow$ Sei $(z', w, A) \vdash_M^i (z, \varepsilon, \varepsilon)$. Wir zeigen $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G^* w$ mit Induktion über i.

- Fall $i = 0$: Unmöglich.

Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

$\Longleftarrow$ Sei $(z', w, A) \vdash_M^i (z, \varepsilon, \varepsilon)$. Wir zeigen $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G^* w$ mit Induktion über i.

- Fall $i = 0$: Unmöglich.
- Fall $i = 1$: Dann gilt $w = a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und $(z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A)$.
  Damit gibt es $\langle z', A, z \rangle \to a \in P$ und daher $\langle z', A, z \rangle \Rightarrow_G a$.

Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

$\Longleftarrow$ Sei $(z', w, A) \vdash_M^i (z, \varepsilon, \varepsilon)$. Wir zeigen $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G^* w$ mit Induktion über i.

- Fall $i = 0$: Unmöglich.
- Fall $i = 1$: Dann gilt $w = a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und $(z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A)$.
  Damit gibt es $\langle z', A, z\rangle \to a \in P$ und daher $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G a$.
- Fall $i > 1$: Dann $w = aw'$, $(z', aw', A) \vdash (z'', w', W) \vdash_M^{i-1} (z, \varepsilon, \varepsilon)$ für $i - 1 > 0$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und $W = \varepsilon$, $W = B$ oder $W = BC$.

Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

$\Longleftarrow$ Sei $(z', w, A) \vdash_M^i (z, \varepsilon, \varepsilon)$. Wir zeigen $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G^* w$ mit Induktion über i.

- Fall $i = 0$: Unmöglich.
- Fall $i = 1$: Dann gilt $w = a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und $(z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A)$.
  Damit gibt es $\langle z', A, z\rangle \to a \in P$ und daher $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G a$.
- Fall $i > 1$: Dann $w = aw'$, $(z', aw', A) \vdash (z'', w', W) \vdash_M^{i-1} (z, \varepsilon, \varepsilon)$ für $i - 1 > 0$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und $W = \varepsilon$, $W = B$ oder $W = BC$.

  Wir betrachten alle drei Fälle für W einzeln:

  - Fall $W = \varepsilon$: Dieser Fall ist nicht möglich, da $i - 1 > 0$ nicht gelten kann.

Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

$\Longleftarrow$ Sei $(z', w, A) \vdash^i_M (z, \varepsilon, \varepsilon)$. Wir zeigen $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow^*_G w$ mit Induktion über i.

- Fall $i = 0$: Unmöglich.
- Fall $i = 1$: Dann gilt $w = a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und $(z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A)$.
  Damit gibt es $\langle z', A, z\rangle \to a \in P$ und daher $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G a$.
- Fall $i > 1$: Dann $w = aw'$, $(z', aw', A) \vdash (z'', w', W) \vdash^{i-1}_M (z, \varepsilon, \varepsilon)$ für $i - 1 > 0$,
  $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und $W = \varepsilon$, $W = B$ oder $W = BC$.

  Wir betrachten alle drei Fälle für W einzeln:

  - Fall $W = \varepsilon$: Dieser Fall ist nicht möglich, da $i - 1 > 0$ nicht gelten kann.
  - Fall $W = B$: Dann ist $\langle z', A, z\rangle \to a\langle z'', B, z\rangle \in P$.
    Da $(z'', w', B) \vdash^{i-1}_M (z, \varepsilon, \varepsilon)$, liefert die Induktionshypothese $\langle z'', B, z\rangle \Rightarrow^*_G w'$
    und daher: $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G a\langle z'', B, z\rangle \Rightarrow^*_G aw' = w$.

Die akzeptierte Sprache von PDAs ist kontextfrei

$\Longleftarrow$ Sei $(z', w, A) \vdash_M^i (z, \varepsilon, \varepsilon)$. Wir zeigen $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G^* w$ mit Induktion über i.

- Fall $i = 0$: Unmöglich.
- Fall $i = 1$: Dann gilt $w = a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und $(z, \varepsilon) \in \delta(z', a, A)$.
  Damit gibt es $\langle z', A, z\rangle \to a \in P$ und daher $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G a$.
- Fall $i > 1$: Dann $w = aw'$, $(z', aw', A) \vdash (z'', w', W) \vdash_M^{i-1} (z, \varepsilon, \varepsilon)$ für $i - 1 > 0$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und $W = \varepsilon$, $W = B$ oder $W = BC$.

  Wir betrachten alle drei Fälle für W einzeln:

  - Fall $W = \varepsilon$: Dieser Fall ist nicht möglich, da $i - 1 > 0$ nicht gelten kann.
  - Fall $W = B$: Dann ist $\langle z', A, z\rangle \to a\langle z'', B, z\rangle \in P$.
    Da $(z'', w', B) \vdash_M^{i-1} (z, \varepsilon, \varepsilon)$, liefert die Induktionshypothese $\langle z'', B, z\rangle \Rightarrow_G^* w'$
    und daher: $\langle z', A, z\rangle \Rightarrow_G a\langle z'', B, z\rangle \Rightarrow_G^* aw' = w$.
  - Fall $W = BC$: Dieser Fall ist komplizierter aber ähnlich (siehe Skript). $\square$

Äquivalenz von kontextfreien Sprachen und von Kellerautomaten

Theorem

Kellerautomaten erkennen genau die kontextfreien Sprachen.

Äquivalenz von kontextfreien Sprachen und von Kellerautomaten

Theorem

Kellerautomaten erkennen genau die kontextfreien Sprachen.

Beweis Dies folgt aus den obigen Sätzen. □

Ausdruckskraft von PDAs mit einem Zustand

Die bisherigen Beweise zeigen auch, dass man PDAs auf PDAs mit genau einem Zustand einschränken kann.

Ausdruckskraft von PDAs mit einem Zustand

Die bisherigen Beweise zeigen auch, dass man PDAs auf PDAs mit genau einem Zustand einschränken kann.

Sei M ein PDA.

1. Transformiere PDA M in Grammatik G mit $L(G) = L(M)$.
2. Transformiere Grammatik G in Grammatik G' in Greibach-Normalform (mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$).
3. Transformiere Grammatik G' in PDA M' mit $L(M') = L(G)$.

PDA M' hat nur einen Zustand.