

## 5c

**Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen**

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für  
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 14. Mai 2024

Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel

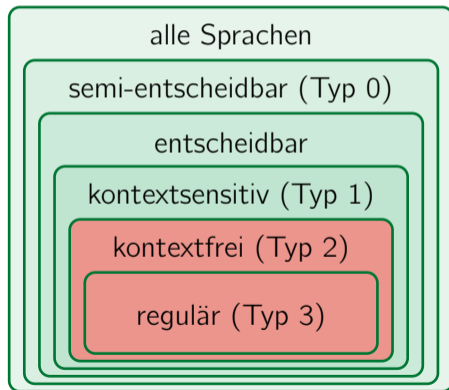


# Hintergrund zum Pumping-Lemma

Wir lernen eine Methode kennen zum Widerlegen der Kontextfreiheit:  
das **Pumping-Lemma** für kontextfreie Sprachen.

Es gibt allgemeinere Formulierungen, z.B.

- ▶ Ogdens Lemma (ist im Skript, aber kein Prüfungstoff)
- ▶ das Interchange-Lemma.



# Pumping-Lemmas im Vergleich

---

- ▶ Pumping-Lemma für reguläre Sprachen:  
Jede reguläre Sprache erfüllt die Pumping-Eigenschaft für reguläre Sprachen.

# Pumping-Lemmas im Vergleich

---

- ▶ Pumping-Lemma für **reguläre** Sprachen:  
Jede **reguläre** Sprache erfüllt die Pumping-Eigenschaft für **reguläre** Sprachen.
- ▶ Pumping-Lemma für **kontextfreie** Sprachen:  
Jede **kontextfreie** Sprache erfüllt die Pumping-Eigenschaft für **kontextfreie** Sprachen.

# Pumping-Lemmas im Vergleich

---

- ▶ Pumping-Lemma für **reguläre** Sprachen:  
Jede **reguläre** Sprache erfüllt die Pumping-Eigenschaft für **reguläre** Sprachen.
- ▶ Pumping-Lemma für **kontextfreie** Sprachen:  
Jede **kontextfreie** Sprache erfüllt die Pumping-Eigenschaft für **kontextfreie** Sprachen.
- ▶ Pumping-Eigenschaft für **reguläre** Sprachen, informell:  
Man kann Wörter an **einer** Stelle aufpumpen  
und in der Sprache verbleiben ( $uv^i w \in L$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ ).

# Pumping-Lemmas im Vergleich

- ▶ Pumping-Lemma für **reguläre** Sprachen:  
Jede **reguläre** Sprache erfüllt die Pumping-Eigenschaft für **reguläre** Sprachen.
- ▶ Pumping-Lemma für **kontextfreie** Sprachen:  
Jede **kontextfreie** Sprache erfüllt die Pumping-Eigenschaft für **kontextfreie** Sprachen.
- ▶ Pumping-Eigenschaft für **reguläre** Sprachen, informell:  
Man kann Wörter an **einer** Stelle aufpumpen  
und in der Sprache verbleiben ( $uv^i w \in L$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ ).
- ▶ Pumping-Eigenschaft für **kontextfreie** Sprachen, informell:  
Man kann Wörter an **zwei** Stellen gleichzeitig aufpumpen  
und in der Sprache verbleiben ( $uv^i wx^i y \in L$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ ).

# Die Pumping-Eigenschaft für kontextfreie Sprachen

## Definition

Eine Sprache  $L$  hat die **Pumping-Eigenschaft** (für kontextfreie Sprachen), wenn gilt:  
Es gibt eine Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ , sodass jedes Wort  $z \in L$ , welches Mindestlänge  $n$  hat (d.h.  $|z| \geq n$ ), als  $z = uvwxy$  geschrieben werden kann, sodass gilt:

1.  $|vx| \geq 1$
2.  $|vwx| \leq n$
3. für alle  $i \in \mathbb{N}$ :  $uv^iwx^iy \in L$ .

# Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

---

## **Lemma (Pumping-Lemma)**

Jede kontextfreie Sprache hat die [Pumping-Eigenschaft](#).



# Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

---

## Lemma (Pumping-Lemma)

Jede kontextfreie Sprache hat die [Pumping-Eigenschaft](#).

**Beweis** Sei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  eine CFG in Chomsky-Normalform mit  $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$ .

# Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

## Lemma (Pumping-Lemma)

Jede kontextfreie Sprache hat die [Pumping-Eigenschaft](#).

**Beweis** Sei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  eine CFG in Chomsky-Normalform mit  $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$ .  
Wir wählen  $n = 2^{|V|}$ .

# Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

## Lemma (Pumping-Lemma)

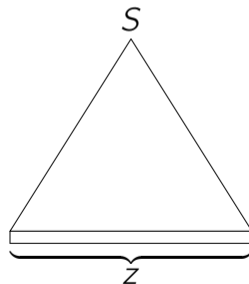
Jede kontextfreie Sprache hat die [Pumping-Eigenschaft](#).

**Beweis** Sei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  eine CFG in Chomsky-Normalform mit  $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$ .

Wir wählen  $n = 2^{|V|}$ .

Sei  $z \in L$  ein beliebiges Wort mit  $|z| \geq n$ .

Betrachte den Syntaxbaum von  $z$ .



# Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

## Lemma (Pumping-Lemma)

Jede kontextfreie Sprache hat die [Pumping-Eigenschaft](#).

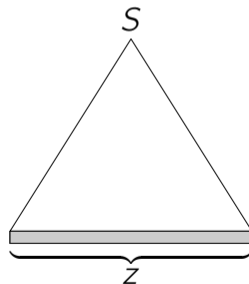
**Beweis** Sei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  eine CFG in Chomsky-Normalform mit  $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$ .

Wir wählen  $n = 2^{|V|}$ .

Sei  $z \in L$  ein beliebiges Wort mit  $|z| \geq n$ .

Betrachte den Syntaxbaum von  $z$ .

Da  $G$  in Chomsky-Normalform, ist der Syntaxbaum binär, bis auf die letzte Schicht, die Produktionen  $A \rightarrow a$  anwendet.



# Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

## Lemma (Pumping-Lemma)

Jede kontextfreie Sprache hat die [Pumping-Eigenschaft](#).

**Beweis** Sei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  eine CFG in Chomsky-Normalform mit  $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$ .

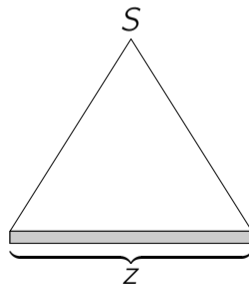
Wir wählen  $n = 2^{|V|}$ .

Sei  $z \in L$  ein beliebiges Wort mit  $|z| \geq n$ .

Betrachte den Syntaxbaum von  $z$ .

Da  $G$  in Chomsky-Normalform, ist der Syntaxbaum binär, bis auf die letzte Schicht, die Produktionen  $A \rightarrow a$  anwendet.

Der Baum ohne letzte Schicht hat  $|z| \geq n = 2^{|V|}$  Blätter.



# Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

## Lemma (Pumping-Lemma)

Jede kontextfreie Sprache hat die [Pumping-Eigenschaft](#).

**Beweis** Sei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  eine CFG in Chomsky-Normalform mit  $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$ .

Wir wählen  $n = 2^{|V|}$ .

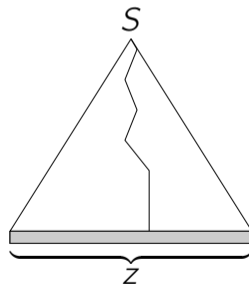
Sei  $z \in L$  ein beliebiges Wort mit  $|z| \geq n$ .

Betrachte den Syntaxbaum von  $z$ .

Da  $G$  in Chomsky-Normalform, ist der Syntaxbaum binär, bis auf die letzte Schicht, die Produktionen  $A \rightarrow a$  anwendet.

Der Baum ohne letzte Schicht hat  $|z| \geq n = 2^{|V|}$  Blätter.

Daher hat der längste Pfad von der Wurzel zum Blatt eine Länge  $\geq |V|$  (siehe Lemma). Dieser besteht aus  $\geq |V| + 1$  Knoten und jeder Knoten ist mit einer Variablen markiert.



# Lemma über Binärbäume

---

## Lemma

Sei  $B$  ein Binärbaum mit  $\geq 2^k$  Blättern. Dann hat  $B$  einen Pfad der Länge  $\geq k$ .

# Lemma über Binärbäume

---

## Lemma

Sei  $B$  ein Binärbaum mit  $\geq 2^k$  Blättern. Dann hat  $B$  einen Pfad der Länge  $\geq k$ .

**Beweis** Durch Induktion über  $k$ .



# Lemma über Binärbäume

---

## Lemma

Sei  $B$  ein Binärbaum mit  $\geq 2^k$  Blättern. Dann hat  $B$  einen Pfad der Länge  $\geq k$ .

**Beweis** Durch Induktion über  $k$ .

- ▶ **Fall  $k = 0$ :** Ein Baum mit  $2^k = 2^0 = 1$  Blatt besteht genau aus diesem Blatt und hat einen Pfad der Länge  $0 \geq 0$ .

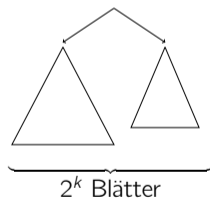
# Lemma über Binärbäume

## Lemma

Sei  $B$  ein Binärbaum mit  $\geq 2^k$  Blättern. Dann hat  $B$  einen Pfad der Länge  $\geq k$ .

**Beweis** Durch Induktion über  $k$ .

- ▶ **Fall  $k = 0$ :** Ein Baum mit  $2^k = 2^0 = 1$  Blatt besteht genau aus diesem Blatt und hat einen Pfad der Länge  $0 \geq 0$ .
- ▶ **Fall  $k > 0$ :** Einer der beiden Teilbäume unter der Wurzel hat  $\geq 2^{k-1}$  Blätter.



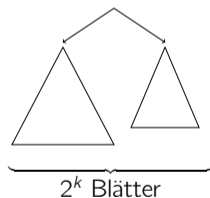
# Lemma über Binärbäume

## Lemma

Sei  $B$  ein Binärbaum mit  $\geq 2^k$  Blättern. Dann hat  $B$  einen Pfad der Länge  $\geq k$ .

**Beweis** Durch Induktion über  $k$ .

- ▶ **Fall  $k = 0$ :** Ein Baum mit  $2^k = 2^0 = 1$  Blatt besteht genau aus diesem Blatt und hat einen Pfad der Länge  $0 \geq 0$ .
- ▶ **Fall  $k > 0$ :** Einer der beiden Teilbäume unter der Wurzel hat  $\geq 2^{k-1}$  Blätter. Per Induktionshypothese hat dieser einen Pfad der Länge  $\geq k - 1$ .



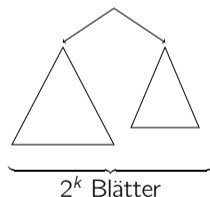
# Lemma über Binärbäume

## Lemma

Sei  $B$  ein Binärbaum mit  $\geq 2^k$  Blättern. Dann hat  $B$  einen Pfad der Länge  $\geq k$ .

**Beweis** Durch Induktion über  $k$ .

- ▶ **Fall  $k = 0$ :** Ein Baum mit  $2^k = 2^0 = 1$  Blatt besteht genau aus diesem Blatt und hat einen Pfad der Länge  $0 \geq 0$ .
- ▶ **Fall  $k > 0$ :** Einer der beiden Teilbäume unter der Wurzel hat  $\geq 2^{k-1}$  Blätter. Per Induktionshypothese hat dieser einen Pfad der Länge  $\geq k - 1$ . Daher hat der gesamte Baum einen Pfad der Länge  $\geq k$ . □

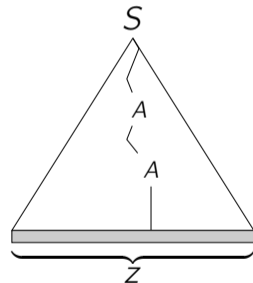


# Das Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen

## Lemma (Pumping-Lemma)

Jede kontextfreie Sprache hat die [Pumping-Eigenschaft](#).

**Beweis** (Fortsetzung) Wir erinnern uns, dass der längste Pfad von der Wurzel aus  $\geq |V| + 1$  Knoten besteht und dass jeder Knoten mit einer Variablen markiert ist.



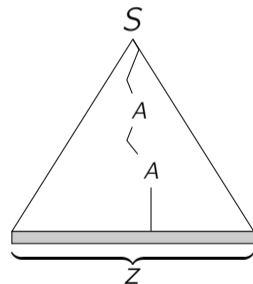
# Das Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen

## Lemma (Pumping-Lemma)

Jede kontextfreie Sprache hat die [Pumping-Eigenschaft](#).

**Beweis** (Fortsetzung) Wir erinnern uns, dass der längste Pfad von der Wurzel aus  $\geq |V| + 1$  Knoten besteht und dass jeder Knoten mit einer Variablen markiert ist.

Da es nur  $|V|$  Variablen gibt, kommt mindestens eine Variable mehrfach auf diesem Pfad vor.



# Das Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen

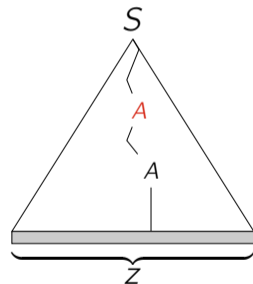
## Lemma (Pumping-Lemma)

Jede kontextfreie Sprache hat die [Pumping-Eigenschaft](#).

**Beweis** (Fortsetzung) Wir erinnern uns, dass der längste Pfad von der Wurzel aus  $\geq |V| + 1$  Knoten besteht und dass jeder Knoten mit einer Variablen markiert ist.

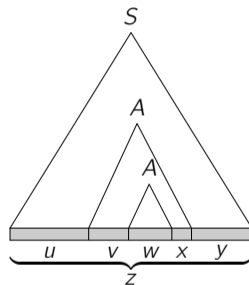
Da es nur  $|V|$  Variablen gibt, kommt mindestens eine Variable mehrfach auf diesem Pfad vor.

Wähle die Vorkommen der Variablen so, dass das obere Vorkommen am tiefsten ist. Sei  $A$  die Variable.



# Das Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen

**Beweis** (Fortsetzung) Betrachte die Teilbäume, die jeweils  $A$  als Wurzel haben.

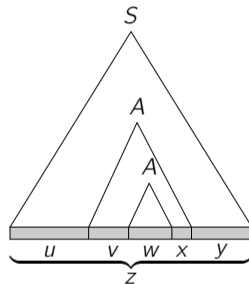




# Das Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen

**Beweis** (Fortsetzung) Betrachte die Teilbäume, die jeweils  $A$  als Wurzel haben.

Sie entsprechen Ableitungen von Teilwörtern von  $z$ .

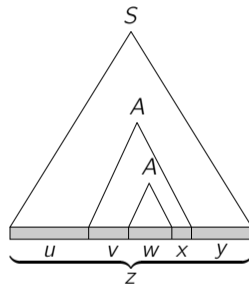


# Das Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen

**Beweis** (Fortsetzung) Betrachte die Teilbäume, die jeweils  $A$  als Wurzel haben.

Sie entsprechen Ableitungen von Teilwörtern von  $z$ .

Der Teilbaum mit dem unteren  $A$  als Wurzel erzeugt ein Teilwort des Teilbaums mit dem oberen  $A$  als Wurzel.



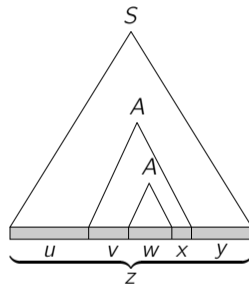
# Das Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen

**Beweis** (Fortsetzung) Betrachte die Teilbäume, die jeweils  $A$  als Wurzel haben.

Sie entsprechen Ableitungen von Teilwörtern von  $z$ .

Der Teilbaum mit dem unteren  $A$  als Wurzel erzeugt ein Teilwort des Teilbaums mit dem oberen  $A$  als Wurzel.

Wir wählen die Zerlegung  $z = uvwxy$ , wobei  $vw$  vom oberen  $A$  und  $w$  vom unteren  $A$  erzeugt wird.

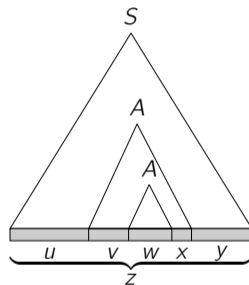


# Das Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen

**Beweis** (Fortsetzung) Wir zeigen nun die drei geforderten Eigenschaften der Zerlegung.

- ▶  $|vx| \geq 1$ : Es gilt  $|w| \geq 1$ , da Variablen einer Grammatik in Chomsky-Normalform nur Wörter mit Länge  $\geq 1$  ableiten.

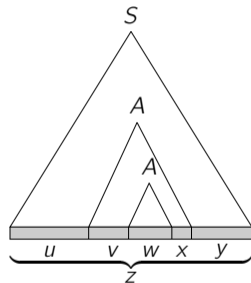
$vwx$  muss echt länger sein als  $w$ , da das obere  $A$  über dem unteren  $A$  steht. Daher folgt  $|v| \geq 1$  oder  $|x| \geq 1$ , d.h.  $|vx| \geq 1$ .



# Das Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen

## Beweis (Fortsetzung)

- ▶  $|vwx| \leq n$ : Da wir das tiefste Vorkommen der wiederholten Variable gewählt haben, kann der Pfad vom oberen  $A$  bis zur Blattebene nur aus  $\leq |V| + 1$  Knoten bestehen und die Länge  $\leq |V|$  haben.

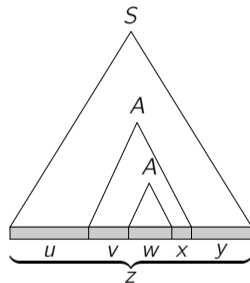


# Das Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen

## Beweis (Fortsetzung)

- ▶  $|vwx| \leq n$ : Da wir das tiefste Vorkommen der wiederholten Variable gewählt haben, kann der Pfad vom oberen  $A$  bis zur Blattebene nur aus  $\leq |V| + 1$  Knoten bestehen und die Länge  $\leq |V|$  haben.

Da der Pfad von der Wurzel maximaler Länge ist, müssen andere Pfade vom oberen  $A$  bis zur Blattebene kürzer oder gleich lang sein.



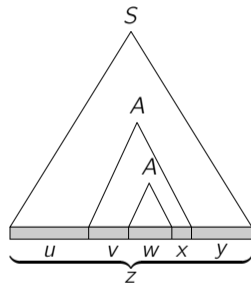
# Das Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen

## Beweis (Fortsetzung)

- ▶  $|vwx| \leq n$ : Da wir das tiefste Vorkommen der wiederholten Variable gewählt haben, kann der Pfad vom oberen  $A$  bis zur Blattebene nur aus  $\leq |V| + 1$  Knoten bestehen und die Länge  $\leq |V|$  haben.

Da der Pfad von der Wurzel maximaler Länge ist, müssen andere Pfade vom oberen  $A$  bis zur Blattebene kürzer oder gleich lang sein.

Daraus folgt:  $|vwx| \leq 2^{|V|} = n$  (siehe Lemma).



# Lemma über Binärbäume

---

## Lemma

Sei  $B$  ein Binärbaum von dem alle Pfade eine Länge  $\leq k$  haben.  
Dann hat  $B \leq 2^k$  Blätter.



# Lemma über Binärbäume

---

## Lemma

Sei  $B$  ein Binärbaum von dem alle Pfade eine Länge  $\leq k$  haben.  
Dann hat  $B \leq 2^k$  Blätter.

**Beweis** Durch Induktion über  $k$ .

# Lemma über Binärbäume

---

## Lemma

Sei  $B$  ein Binärbaum von dem alle Pfade eine Länge  $\leq k$  haben.  
Dann hat  $B \leq 2^k$  Blätter.

**Beweis** Durch Induktion über  $k$ .

- ▶ Fall  $k = 0$ :  $B$  besteht nur aus  $2^0 = 1$  Blatt.

# Lemma über Binärbäume

---

## Lemma

Sei  $B$  ein Binärbaum von dem alle Pfade eine Länge  $\leq k$  haben.  
Dann hat  $B \leq 2^k$  Blätter.

**Beweis** Durch Induktion über  $k$ .

- ▶ Fall  $k = 0$ :  $B$  besteht nur aus  $2^0 = 1$  Blatt.
- ▶ Fall  $k > 0$ :  $B$  hat zwei Teilbäume unter der Wurzel, von denen alle Pfade eine Länge  $\leq k - 1$  haben.

# Lemma über Binärbäume

## Lemma

Sei  $B$  ein Binärbaum von dem alle Pfade eine Länge  $\leq k$  haben.  
Dann hat  $B \leq 2^k$  Blätter.

**Beweis** Durch Induktion über  $k$ .

- ▶ Fall  $k = 0$ :  $B$  besteht nur aus  $2^0 = 1$  Blatt.
- ▶ Fall  $k > 0$ :  $B$  hat zwei Teilbäume unter der Wurzel, von denen alle Pfade eine Länge  $\leq k - 1$  haben.

Durch die Induktionshypothese haben die beiden Teilbäume jeweils  $\leq 2^{k-1}$  Blätter.

# Lemma über Binärbäume

## Lemma

Sei  $B$  ein Binärbaum von dem alle Pfade eine Länge  $\leq k$  haben.  
Dann hat  $B \leq 2^k$  Blätter.

**Beweis** Durch Induktion über  $k$ .

- ▶ Fall  $k = 0$ :  $B$  besteht nur aus  $2^0 = 1$  Blatt.
- ▶ Fall  $k > 0$ :  $B$  hat zwei Teilbäume unter der Wurzel, von denen alle Pfade eine Länge  $\leq k - 1$  haben.

Durch die Induktionshypothese haben die beiden Teilbäume jeweils  $\leq 2^{k-1}$  Blätter.

$B$  als Ganzes hat dann  $\leq 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$  Blätter. □

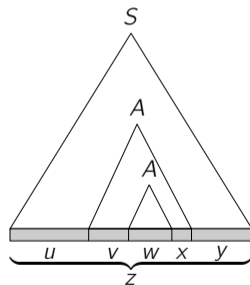
# Das Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen

## Lemma (Pumping-Lemma)

Jede kontextfreie Sprache hat die **Pumping-Eigenschaft**.

### Beweis (Fortsetzung)

- für alle  $i \in \mathbb{N}$ :  $uv^iwx^iy \in L$ : Aus dem Baum folgt:  
 $A \Rightarrow^* w$  und  $A \Rightarrow^* vAx$  und daher kann man auch  
 $A \Rightarrow^* v^iwx^i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  ableiten.



# Das Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen

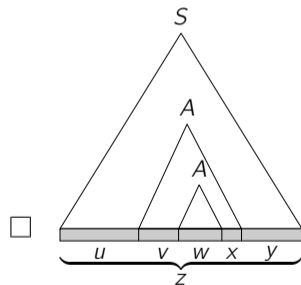
## Lemma (Pumping-Lemma)

Jede kontextfreie Sprache hat die [Pumping-Eigenschaft](#).

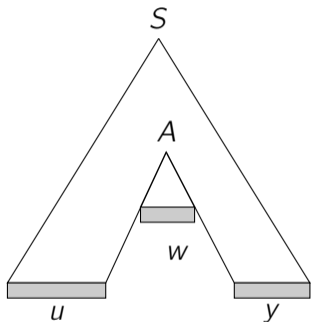
### Beweis (Fortsetzung)

- für alle  $i \in \mathbb{N}$ :  $uv^iwx^iy \in L$ : Aus dem Baum folgt:  
 $A \Rightarrow^* w$  und  $A \Rightarrow^* vAx$  und daher kann man auch  
 $A \Rightarrow^* v^iwx^i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  ableiten.

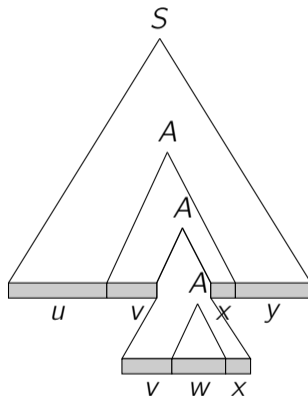
Schließlich folgt daraus  $S \Rightarrow^* uv^iwx^iy$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .  $\square$



# Illustration des Aufpumpens



$$uv^0wx^0y$$



$$uv^2wx^2y$$



# Anwendung des Pumping-Lemmas

---

Sei  $L$  eine Sprache, die wir als nicht kontextfrei beweisen wollen.

# Anwendung des Pumping-Lemmas

---

Sei  $L$  eine Sprache, die wir als nicht kontextfrei beweisen wollen.

Pumping-Lemma:

$L$  ist kontextfrei  $\implies L$  hat die Pumping-Eigenschaft

# Anwendung des Pumping-Lemmas

---

Sei  $L$  eine Sprache, die wir als nicht kontextfrei beweisen wollen.

Pumping-Lemma:

$L$  ist kontextfrei  $\implies L$  hat die Pumping-Eigenschaft

Kontraposition:

$L$  hat **nicht** die Pumping-Eigenschaft  $\implies L$  ist **nicht** kontextfrei

# Anwendung des Pumping-Lemmas

Sei  $L$  eine Sprache, die wir als nicht kontextfrei beweisen wollen.

Pumping-Lemma:

$L$  ist kontextfrei  $\implies L$  hat die Pumping-Eigenschaft

Kontraposition:

$L$  hat **nicht** die Pumping-Eigenschaft  $\implies L$  ist **nicht** kontextfrei

Beweisstrategie für die Aussage „ $L$  ist **nicht** kontextfrei“:

1. Durch die Kontraposition reicht es zu zeigen, dass  $L$  die Pumping-Eigenschaft **nicht** hat.
2. Zeige dies durch Widerspruch: Nehme an, dass  $L$  die Pumping-Eigenschaft hat.
3. Leite einen Widerspruch her.
4. D.h.  $L$  ist **nicht** kontextfrei.

# Nichtkontextfreiheit zeigen mit dem Pumping-Lemma

---

## Satz

Die Sprache  $L = \{a^j b^j c^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht kontextfrei.

# Nichtkontextfreiheit zeigen mit dem Pumping-Lemma

## Satz

Die Sprache  $L = \{a^j b^j c^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht kontextfrei.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma.

# Nichtkontextfreiheit zeigen mit dem Pumping-Lemma

## Satz

Die Sprache  $L = \{a^j b^j c^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht kontextfrei.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma.

Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.

# Nichtkontextfreiheit zeigen mit dem Pumping-Lemma

## Satz

Die Sprache  $L = \{a^j b^j c^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht kontextfrei.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma.

Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.

Wir wählen  $z \in L$  als  $z = a^n b^n c^n$  mit  $|z| \geq n$ .



# Nichtkontextfreiheit zeigen mit dem Pumping-Lemma

## Satz

Die Sprache  $L = \{a^j b^j c^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht kontextfrei.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma.

Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.

Wir wählen  $z \in L$  als  $z = a^n b^n c^n$  mit  $|z| \geq n$ .

Sei  $z = uvwxy$  eine beliebige Zerlegung von  $z$ , sodass  $|vx| \geq 1$ ,  $|vwx| \leq n$  und  $uv^i wx^i y \in L$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$ . Wir wählen  $i = 0$ .

# Nichtkontextfreiheit zeigen mit dem Pumping-Lemma

## Satz

Die Sprache  $L = \{a^j b^j c^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht kontextfrei.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma.

Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.

Wir wählen  $z \in L$  als  $z = a^n b^n c^n$  mit  $|z| \geq n$ .

Sei  $z = uvwxy$  eine beliebige Zerlegung von  $z$ , sodass  $|vx| \geq 1$ ,  $|vwx| \leq n$  und  $uv^i wx^i y \in L$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$ . Wir wählen  $i = 0$ .

- ▶ **Fall 1:**  $vwx$  ist von der Form  $a^i b^j$ ,  $i + j \leq n$ . Da  $|vx| \geq 1$ , gilt  $\#_a(vx) \geq 1$  oder  $\#_b(vx) \geq 1$ , aber  $\#_c(vx) = 0$ . Damit folgt  $uv^0 wx^0 y \notin L$ . Widerspruch.
- ▶ **Fall 2:**  $vwx$  ist von der Form  $b^i c^j$ ,  $i + j \leq n$ . Da  $|vx| \geq 1$ , gilt  $\#_b(vx) \geq 1$  oder  $\#_c(vx) \geq 1$ , aber  $\#_a(vx) = 0$ . Damit folgt  $uv^0 wx^0 y \notin L$ . Widerspruch.

Andere Fälle sind nicht möglich. □

# Das Pumping-Lemma als Spiel

---

Sei  $L$  die Sprache.

Schritte:

1. Der **Gegner** wählt die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ .
2. **Wir** wählen das Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$ .
3. Der **Gegner** wählt die Zerlegung  $z = uvwxy$  mit  $|vx| \geq 1$  und  $|vwx| \leq n$ .
4. **Wir** gewinnen das Spiel, wenn wir ein  $i \in \mathbb{N}$  angeben können, sodass  $uv^iwx^iy \notin L$ .

# Das Pumping-Lemma als Spiel

Sei  $L$  die Sprache.

Schritte:

1. Der **Gegner** wählt die Zahl  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ .
2. **Wir** wählen das Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$ .
3. Der **Gegner** wählt die Zerlegung  $z = uvwxy$  mit  $|vx| \geq 1$  und  $|vwx| \leq n$ .
4. **Wir** gewinnen das Spiel, wenn wir ein  $i \in \mathbb{N}$  angeben können, sodass  $uv^iwx^iy \notin L$ .

Wenn **wir** das Spiel **für alle Wahlmöglichkeiten des Gegners gewinnen**, dann haben wir nachgewiesen, dass  $L$  nicht kontextfrei ist.

# Das Pumping-Lemma als Spiel

## Satz

Die Sprache  $L = \{a^j b^j c^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist nicht kontextfrei.

**Beweis** Wir zeigen, dass wir das eben eingeführte Spiel stets gewinnen:

1. Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  vom **Gegner** gewählt.
2. **Wir** wählen  $z \in L$  als  $z = a^n b^n c^n$  mit  $|z| \geq n$ .
3. Der **Gegner** wählt die Zerlegung  $z = uvwxy$ , sodass  $|vx| \geq 1$  und  $|vwx| \leq n$ .
4. **Wir** wählen  $i = 0$ .
  - ▶ **Fall 1:**  $vwx$  ist von der Form  $a^i b^j$ ,  $i + j \leq n$ . Da  $|vx| \geq 1$ , gilt  $\#_a(vx) \geq 1$  oder  $\#_b(vx) \geq 1$ , aber  $\#_c(vx) = 0$ . Damit folgt  $uv^0wx^0y \notin L$ .
  - ▶ **Fall 2:**  $vwx$  ist von der Form  $b^i c^j$ ,  $i + j \leq n$ . Da  $|vx| \geq 1$ , gilt  $\#_b(vx) \geq 1$  oder  $\#_c(vx) \geq 1$ , aber  $\#_a(vx) = 0$ . Damit folgt  $uv^0wx^0y \notin L$ .

Andere Fälle sind nicht möglich. Also gewinnen wir. □

# Nichtkontextfreiheit zeigen mit dem Pumping-Lemma

---

## Satz

Die Sprache  $L = \{a^i b^j c^i d^j \mid i, j \in \mathbb{N}_{>0}\}$  ist nicht kontextfrei.

# Nichtkontextfreiheit zeigen mit dem Pumping-Lemma

## Satz

Die Sprache  $L = \{a^i b^j c^i d^j \mid i, j \in \mathbb{N}_{>0}\}$  ist nicht kontextfrei.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma.

# Nichtkontextfreiheit zeigen mit dem Pumping-Lemma

## Satz

Die Sprache  $L = \{a^i b^j c^i d^j \mid i, j \in \mathbb{N}_{>0}\}$  ist nicht kontextfrei.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma.

Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.



# Nichtkontextfreiheit zeigen mit dem Pumping-Lemma

## Satz

Die Sprache  $L = \{a^i b^j c^i d^j \mid i, j \in \mathbb{N}_{>0}\}$  ist nicht kontextfrei.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma.

Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.

Wir wählen  $z \in L$  als  $z = a^n b^n c^n d^n$  mit  $|z| \geq n$ .

# Nichtkontextfreiheit zeigen mit dem Pumping-Lemma

## Satz

Die Sprache  $L = \{a^i b^j c^i d^j \mid i, j \in \mathbb{N}_{>0}\}$  ist nicht kontextfrei.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma.

Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.

Wir wählen  $z \in L$  als  $z = a^n b^n c^n d^n$  mit  $|z| \geq n$ .

Sei  $z = uvwxy$  eine beliebige Zerlegung von  $z$ , sodass  $|vx| \geq 1$ ,  $|vwx| \leq n$  und  $uv^i wx^i y \in L$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$ . Wir wählen  $i = 0$ .

# Nichtkontextfreiheit zeigen mit dem Pumping-Lemma

## Satz

Die Sprache  $L = \{a^i b^j c^i d^j \mid i, j \in \mathbb{N}_{>0}\}$  ist nicht kontextfrei.

**Beweis** Mit dem Pumping-Lemma.

Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  beliebig.

Wir wählen  $z \in L$  als  $z = a^n b^n c^n d^n$  mit  $|z| \geq n$ .

Sei  $z = uvwxy$  eine beliebige Zerlegung von  $z$ , sodass  $|vx| \geq 1$ ,  $|vwx| \leq n$  und  $uv^i wx^i y \in L$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$ . Wir wählen  $i = 0$ .

- **Fall 1:**  $vwx = a^i b^j$  mit  $i + j \leq n$ . Da  $|vx| \geq 1$ , gilt  $\#_a(vx) + \#_b(vx) \geq 1$  und  $uv^0 wx^0 y = uwy = a^{i'} b^{j'} c^n d^n$  und  $i' < n$  oder  $j' < n$ , d.h.  $uv^0 wx^0 y \notin L$ .  
Widerspruch.

# Nichtkontextfreiheit zeigen mit dem Pumping-Lemma

## Beweis (Fortsetzung)

- ▶ **Fall 2:**  $vwx = b^i c^j$  mit  $i + j \leq n$ . Da  $|vx| \geq 1$ , gilt  $\#_b(vx) + \#_c(vx) \geq 1$  und  $uv^0wx^0y = uwy = a^n b^{i'} c^{j'} d^n$  und  $i' < n$  oder  $j' < n$ , d.h.  $uv^0wx^0y \notin L$ .  
Widerspruch.
- ▶ **Fall 3:**  $vwx = c^i d^j$  mit  $i + j \leq n$ . Da  $|vx| \geq 1$ , gilt  $\#_c(vx) + \#_d(vx) \geq 1$  und  $uv^0wx^0y = uwy = a^n b^n c^{i'} d^{j'}$  und  $i' < n$  oder  $j' < n$ , d.h.  $uv^0wx^0y \notin L$ .  
Widerspruch.

Andere Fälle sind nicht möglich. □

## Satz

Sei  $L$  eine Sprache über einem unären Alphabet (d.h.  $|\Sigma| = 1$ ). Dann ist  $L$  genau dann regulär, wenn  $L$  kontextfrei ist.

Beweis:

- ▶ Wenn  $L$  regulär ist, dann ist  $L$  auch kontextfrei.
- ▶ Die Rückrichtung ist im Skript, aber kein Prüfungsstoff.  
(Der Beweis verwendet die Pumping-Eigenschaft für kontextfreie Sprachen.)

## Satz

Die Sprachen

$$L_1 = \{a^p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}$$

$$L_2 = \{a^n \mid n \text{ ist keine Primzahl}\}$$

$$L_3 = \{a^n \mid n \text{ ist eine Quadratzahl}\}$$

$$L_4 = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

sind allesamt nicht kontextfrei.

# Beispiele für unäre Alphabete

## Satz

Die Sprachen

$$L_1 = \{a^p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}$$

$$L_2 = \{a^n \mid n \text{ ist keine Primzahl}\}$$

$$L_3 = \{a^n \mid n \text{ ist eine Quadratzahl}\}$$

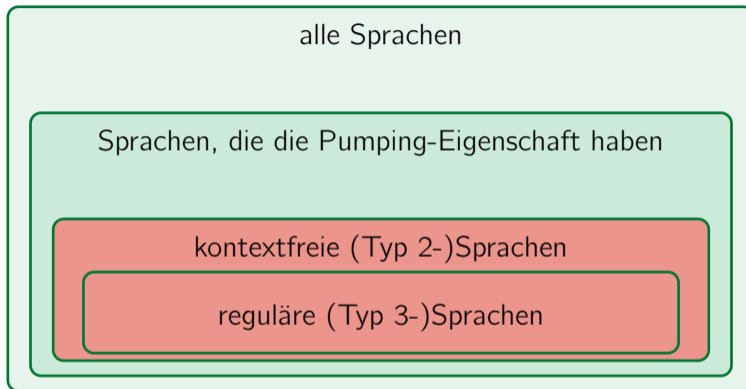
$$L_4 = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

sind allesamt nicht kontextfrei.

**Beweis** Wir haben für alle vier Sprachen gezeigt, dass sie nicht regulär sind. Da sie alle über einem unären Alphabet definiert sind, sind sie auch nicht kontextfrei.  $\square$

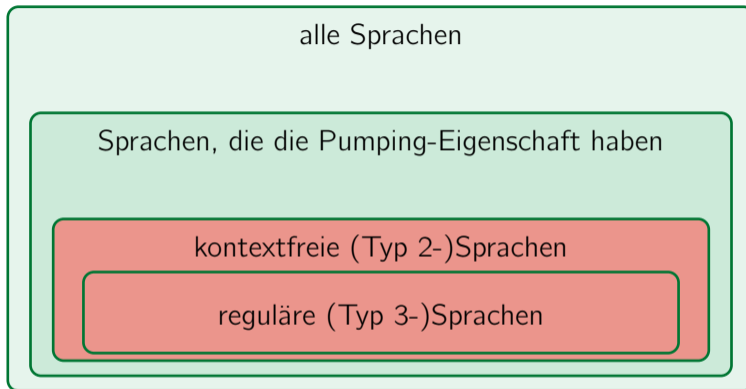
# Pumping-Eigenschaft ist nicht hinreichend

---





# Pumping-Eigenschaft ist nicht hinreichend



Wichtige Konsequenz:

- ▶ Das Pumping-Lemma kann **nicht** verwendet werden, um zu zeigen, dass eine Sprache kontextfrei ist.

# Zusammenfassung vom Pumping-Lemma

---

Bezug zu Kontextfreiheit:

- ▶ Das Pumping-Lemma gibt **eine notwendige Bedingung** für kontextfreie Sprachen. Sehr informell: *Wörter einer kontextfreien Sprache können an zwei Stellen aufgepumpt werden, wenn sie lang genug sind.*
- ▶ Das Pumping-Lemma gibt **keine hinreichende Bedingung** für kontextfreie Sprachen, d.h. Kontextfreiheit kann **nicht** mit dem Pumping-Lemma gezeigt werden.

Anwendung:

- ▶  $L$  hat **nicht** die Pumping-Eigenschaft  $\implies L$  ist **nicht** kontextfrei
- ▶ Dies funktioniert nicht für jede nicht kontextfreie Sprache.