LMU

LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

Formale Sprachen und Komplexität
Sommersemester 2024

5a
Der Satz von Myhill und Nerode

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 8. August 2024
Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel

Die Nerode-Relation

Definition

Sei L eine Sprache über Σ. Die Nerode-Relation $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ zu L ist definiert für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$, sodass $u \sim_L v$ wenn

$$\text{für jedes } w \in \Sigma^*\text{: } uw \in L \text{ g.d.w. } vw \in L$$

Die Nerode-Relation

Definition

Sei L eine Sprache über Σ. Die Nerode-Relation $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ zu L ist definiert für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$, sodass $u \sim_L v$ wenn

$$\text{für jedes } w \in \Sigma^*\text{: } uw \in L \text{ g.d.w. } vw \in L$$

Informell: $u \sim_L v$, wenn sich ihr Enthaltensein in L gleich verhält bezüglich beliebiger Erweiterung um dasselbe Suffix.

Die Nerode-Relation

Definition

Sei L eine Sprache über Σ. Die Nerode-Relation $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ zu L ist definiert für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$, sodass $u \sim_L v$ wenn

$$\text{für jedes } w \in \Sigma^*\text{: } uw \in L \text{ g.d.w. } vw \in L$$

Informell: $u \sim_L v$, wenn sich ihr Enthaltensein in L gleich verhält bezüglich beliebiger Erweiterung um dasselbe Suffix.

Sei die Sprache $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Gilt $a \sim_L ab$?
2. Gilt $aau \sim_L bv$ mit $u, v \in \Sigma^*$?
3. Gilt $\varepsilon \sim_L a$?
4. Gilt $aau \sim_L aav$ mit $u, v \in \{b\}^*$?
5. Gilt $ab^i \sim_L ab^j$?
6. Gilt $a \sim_L b$?

Die Nerode-Relation

Definition

Sei L eine Sprache über Σ. Die Nerode-Relation $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ zu L ist definiert für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$, sodass $u \sim_L v$ wenn

$$\text{für jedes } w \in \Sigma^*\text{: } uw \in L \text{ g.d.w. } vw \in L$$

Informell: $u \sim_L v$, wenn sich ihr Enthaltensein in L gleich verhält bezüglich beliebiger Erweiterung um dasselbe Suffix.

Sei die Sprache $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Gilt $a \sim_L ab$? Ja
2. Gilt $aau \sim_L bv$ mit $u, v \in \Sigma^*$?
3. Gilt $\varepsilon \sim_L a$?
4. Gilt $aau \sim_L aav$ mit $u, v \in \{b\}^*$?
5. Gilt $ab^i \sim_L ab^j$?
6. Gilt $a \sim_L b$?

Die Nerode-Relation

Definition

Sei L eine Sprache über Σ. Die Nerode-Relation $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ zu L ist definiert für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$, sodass $u \sim_L v$ wenn

$$\text{für jedes } w \in \Sigma^*\text{: } uw \in L \text{ g.d.w. } vw \in L$$

Informell: $u \sim_L v$, wenn sich ihr Enthaltensein in L gleich verhält bezüglich beliebiger Erweiterung um dasselbe Suffix.

Sei die Sprache $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Gilt $a \sim_L ab$? Ja
2. Gilt $aau \sim_L bv$ mit $u, v \in \Sigma^*$? Ja
3. Gilt $\varepsilon \sim_L a$?
4. Gilt $aau \sim_L aav$ mit $u, v \in \{b\}^*$?
5. Gilt $ab^i \sim_L ab^j$?
6. Gilt $a \sim_L b$?

Die Nerode-Relation

Definition

Sei L eine Sprache über Σ. Die Nerode-Relation $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ zu L ist definiert für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$, sodass $u \sim_L v$ wenn

$$\text{für jedes } w \in \Sigma^*\text{: } uw \in L \text{ g.d.w. } vw \in L$$

Informell: $u \sim_L v$, wenn sich ihr Enthaltensein in L gleich verhält bezüglich beliebiger Erweiterung um dasselbe Suffix.

Sei die Sprache $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Gilt $a \sim_L ab$? Ja
2. Gilt $aau \sim_L bv$ mit $u, v \in \Sigma^*$? Ja
3. Gilt $\varepsilon \sim_L a$? Nein (z.B. $w = \varepsilon$)
4. Gilt $aau \sim_L aav$ mit $u, v \in \{b\}^*$?
5. Gilt $ab^i \sim_L ab^j$?
6. Gilt $a \sim_L b$?

Die Nerode-Relation

Definition

Sei L eine Sprache über Σ. Die Nerode-Relation $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ zu L ist definiert für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$, sodass $u \sim_L v$ wenn

$$\text{für jedes } w \in \Sigma^*\text{: } uw \in L \text{ g.d.w. } vw \in L$$

Informell: $u \sim_L v$, wenn sich ihr Enthaltensein in L gleich verhält bezüglich beliebiger Erweiterung um dasselbe Suffix.

Sei die Sprache $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Gilt $a \sim_L ab$? Ja
2. Gilt $aau \sim_L bv$ mit $u, v \in \Sigma^*$? Ja
3. Gilt $\varepsilon \sim_L a$? Nein (z.B. $w = \varepsilon$)
4. Gilt $aau \sim_L aav$ mit $u, v \in \{b\}^*$? Ja
5. Gilt $ab^i \sim_L ab^j$?
6. Gilt $a \sim_L b$?

Die Nerode-Relation

Definition

Sei L eine Sprache über Σ. Die Nerode-Relation $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ zu L ist definiert für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$, sodass $u \sim_L v$ wenn

$$\text{für jedes } w \in \Sigma^*\text{: } uw \in L \text{ g.d.w. } vw \in L$$

Informell: $u \sim_L v$, wenn sich ihr Enthaltensein in L gleich verhält bezüglich beliebiger Erweiterung um dasselbe Suffix.

Sei die Sprache $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Gilt $a \sim_L ab$? Ja
2. Gilt $aau \sim_L bv$ mit $u, v \in \Sigma^*$? Ja
3. Gilt $\varepsilon \sim_L a$? Nein (z.B. $w = \varepsilon$)
4. Gilt $aau \sim_L aav$ mit $u, v \in \{b\}^*$? Ja
5. Gilt $ab^i \sim_L ab^j$? Ja
6. Gilt $a \sim_L b$?

Die Nerode-Relation

Definition

Sei L eine Sprache über Σ. Die Nerode-Relation $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ zu L ist definiert für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$, sodass $u \sim_L v$ wenn

$$\text{für jedes } w \in \Sigma^*\text{: } uw \in L \text{ g.d.w. } vw \in L$$

Informell: $u \sim_L v$, wenn sich ihr Enthaltensein in L gleich verhält bezüglich beliebiger Erweiterung um dasselbe Suffix.

Sei die Sprache $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Gilt $a \sim_L ab$? Ja
2. Gilt $aau \sim_L bv$ mit $u, v \in \Sigma^*$? Ja
3. Gilt $\varepsilon \sim_L a$? Nein (z.B. $w = \varepsilon$)
4. Gilt $aau \sim_L aav$ mit $u, v \in \{b\}^*$? Ja
5. Gilt $ab^i \sim_L ab^j$? Ja
6. Gilt $a \sim_L b$? Nein (z.B. $w = \varepsilon$)

Die Nerode-Relation als Äquivalenzrelation

Satz

Die Nerode-Relation ist eine Äquivalenzrelation.

Die Nerode-Relation als Äquivalenzrelation

Satz

Die Nerode-Relation ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis Der Satz folgt daraus, dass „g.d.w.“ eine Äquivalenzrelation ist. □

Die Nerode-Relation als Äquivalenzrelation

Satz

Die Nerode-Relation ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis Der Satz folgt daraus, dass „g.d.w." eine Äquivalenzrelation ist. □

Zur Erinnerung:

- Die Äquivalenzklasse $[u]_{\sim_L}$ ist definiert als $\{v \mid u \sim_L v\}$.
- Der Index einer Äquivalenzrelation ist die Anzahl ihrer disjunkten Äquivalenzklassen: $\Sigma^* = [u_1]_{\sim_L} \cup [u_2]_{\sim_L} \cup \cdots$.
- Der Index kann unendlich sein.

Beispiel für den Index der Nerode-Relation

Sei $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b\}$.

$Index(\sim_L) = ?$

Beispiel für den Index der Nerode-Relation

Sei $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b\}$.

$Index(\sim_L) = ?$

- $[\varepsilon]_{\sim_L} = \{\varepsilon\}$

Beispiel für den Index der Nerode-Relation

Sei $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b\}$.

$Index(\sim_L) = ?$

- $[\varepsilon]_{\sim_L} = \{\varepsilon\}$
- $[a]_{\sim_L} = \{a, ab, abb, abbb, \ldots\}$

Beispiel für den Index der Nerode-Relation

Sei $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b\}$.

$Index(\sim_L) = ?$

- $[\varepsilon]_{\sim_L} = \{\varepsilon\}$
- $[a]_{\sim_L} = \{a, ab, abb, abbb, \ldots\}$
- $$\begin{aligned}[aa]_{\sim_L} &= \{aau \mid u \in \Sigma^*\} \\ &\cup \{bu \mid u \in \Sigma^*\} \\ &\cup \{abuav \mid u, v \in \Sigma^*\}\end{aligned}$$

Beispiel für den Index der Nerode-Relation

Sei $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b\}$.

$Index(\sim_L) = ?$

- $[\varepsilon]_{\sim_L} = \{\varepsilon\}$
- $[a]_{\sim_L} = \{a, ab, abb, abbb, \ldots\}$
- $[aa]_{\sim_L} = \{aau \mid u \in \Sigma^*\} \cup \{bu \mid u \in \Sigma^*\} \cup \{abuav \mid u, v \in \Sigma^*\}$

$\Sigma^* = [\varepsilon]_{\sim_L} \cup [a]_{\sim_L} \cup [aa]_{\sim_L}$

Beispiel für den Index der Nerode-Relation

Sei $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b\}$.

$\mathit{Index}(\sim_L) = 3$

- $[\varepsilon]_{\sim_L} = \{\varepsilon\}$
- $[a]_{\sim_L} = \{a, ab, abb, abbb, \ldots\}$
- $$\begin{aligned} [aa]_{\sim_L} = {} & \{aau \mid u \in \Sigma^*\} \\ & \cup \{bu \mid u \in \Sigma^*\} \\ & \cup \{abuav \mid u, v \in \Sigma^*\} \end{aligned}$$

$\Sigma^* = [\varepsilon]_{\sim_L} \cup [a]_{\sim_L} \cup [aa]_{\sim_L}$

Der Nerode-Automat

Definition

Sei L eine Sprache über Σ mit $\mathit{Index}(\sim_L) = n \in \mathbb{N}_{>0}$.
Seien $\Sigma^* = [u_1]_{\sim_L} \cup \cdots \cup [u_n]_{\sim_L}$.
Der Nerode-Automat ist der DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, [\varepsilon]_{\sim_L}, E)$ mit

$$\begin{aligned} Z &:= \{[u_1]_{\sim_L}, \ldots, [u_n]_{\sim_L}\} \\ \delta([u_i]_{\sim_L}, a) &:= [u_i a]_{\sim_L} \\ E &:= \{[u_i]_{\sim_L} \mid u_i \in L, i \in \{1, \ldots, n\}\} \end{aligned}$$

Der Nerode-Automat

Definition

Sei L eine Sprache über Σ mit $\mathit{Index}(\sim_L) = n \in \mathbb{N}_{>0}$.
Seien $\Sigma^* = [u_1]_{\sim_L} \cup \cdots \cup [u_n]_{\sim_L}$.
Der Nerode-Automat ist der DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, [\varepsilon]_{\sim_L}, E)$ mit

$$\begin{aligned} Z &:= \{[u_1]_{\sim_L}, \ldots, [u_n]_{\sim_L}\} \\ \delta([u_i]_{\sim_L}, a) &:= [u_i a]_{\sim_L} \\ E &:= \{[u_i]_{\sim_L} \mid u_i \in L, i \in \{1, \ldots, n\}\} \end{aligned}$$

Wir werden zeigen, dass der Nerode-Automat minimal ist. Aber im Gegensatz zum Äquivalenzklassenautomaten kann man ihn im Allgemeinen nicht berechnen.

Beispiel für den Nerode-Automaten

Sprache $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a, b\}^*$ mit

- $[\varepsilon]_{\sim_L} = \{\varepsilon\}$
- $[a]_{\sim_L} = \{a, ab, abb, abbb, \ldots\}$
- $[aa]_{\sim_L} = \{aau \mid u \in \Sigma^*\} \cup \{bu \mid u \in \Sigma^*\} \cup \{abuav \mid u, v \in \Sigma^*\}$

$\Sigma^* = [\varepsilon]_{\sim_L} \cup [a]_{\sim_L} \cup [aa]_{\sim_L}$

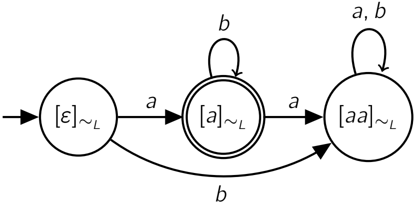
Beispiel für den Nerode-Automaten

Sprache $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a, b\}^*$ mit

- $[\varepsilon]_{\sim_L} = \{\varepsilon\}$
- $[a]_{\sim_L} = \{a, ab, abb, abbb, \ldots\}$
- $[aa]_{\sim_L} = \{aau \mid u \in \Sigma^*\} \cup \{bu \mid u \in \Sigma^*\} \cup \{abuav \mid u, v \in \Sigma^*\}$

$\Sigma^* = [\varepsilon]_{\sim_L} \cup [a]_{\sim_L} \cup [aa]_{\sim_L}$

Nerode-Automat zu L:



Der Satz von Myhill und Nerode

Unabhängig bewiesen von John Myhill (1957) und Anil Nerode (1958):

Theorem (Satz von Myhill und Nerode)

Eine Sprache L ist genau dann regulär, wenn der Index von $\sim_L$ endlich ist.

Der Satz von Myhill und Nerode

Unabhängig bewiesen von John Myhill (1957) und Anil Nerode (1958):

Theorem (Satz von Myhill und Nerode)

Eine Sprache L ist genau dann regulär, wenn der Index von $\sim_L$ endlich ist.

Damit haben wir eine genaue Charakterisierung der regulären Sprachen
(im Gegensatz zum Pumping-Lemma).

Beweis

1. Wir zeigen zuerst, dass wenn L regulär ist, dann ist der Index von $\sim_L$ endlich.

Der Satz von Myhill und Nerode

Beweis

1. Wir zeigen zuerst, dass wenn L regulär ist, dann ist der Index von $\sim_L$ endlich.

   Sei L regulär und $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA mit $L(M) = L$.

Der Satz von Myhill und Nerode

Beweis

1. Wir zeigen zuerst, dass wenn L regulär ist, dann ist der Index von $\sim_L$ endlich.

   Sei L regulär und $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA mit $L(M) = L$.

   Sei $\approx_M \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ definiert, sodass $u \approx_M v$ wenn $\widetilde{\delta}(z_0, u) = \widetilde{\delta}(z_0, v)$.
   D.h. $u \approx_M v$, wenn u, v auf M zum gleichen Zustand führen.

Beweis

1. Wir zeigen zuerst, dass wenn L regulär ist, dann ist der Index von $\sim_L$ endlich.

   Sei L regulär und $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA mit $L(M) = L$.

   Sei $\approx_M \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ definiert, sodass $u \approx_M v$ wenn $\widetilde{\delta}(z_0, u) = \widetilde{\delta}(z_0, v)$.
   D.h. $u \approx_M v$, wenn u, v auf M zum gleichen Zustand führen.

   $\approx_M$ ist eine Äquivalenzrelation.

Der Satz von Myhill und Nerode

Beweis

1. Wir zeigen zuerst, dass wenn L regulär ist, dann ist der Index von $\sim_L$ endlich.

   Sei L regulär und $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA mit $L(M) = L$.

   Sei $\approx_M \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ definiert, sodass $u \approx_M v$ wenn $\widetilde{\delta}(z_0, u) = \widetilde{\delta}(z_0, v)$.
   D.h. $u \approx_M v$, wenn u, v auf M zum gleichen Zustand führen.

   $\approx_M$ ist eine Äquivalenzrelation.

   $Index(\approx_M) \leq |Z|$ (und damit endlich).

Der Satz von Myhill und Nerode

Beweis

1. Wir zeigen zuerst, dass wenn L regulär ist, dann ist der Index von $\sim_L$ endlich.

   Sei L regulär und $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA mit $L(M) = L$.

   Sei $\approx_M \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ definiert, sodass $u \approx_M v$ wenn $\widetilde{\delta}(z_0, u) = \widetilde{\delta}(z_0, v)$.
   D.h. $u \approx_M v$, wenn u, v auf M zum gleichen Zustand führen.

   $\approx_M$ ist eine Äquivalenzrelation.

   $\mathit{Index}(\approx_M) \leq |Z|$ (und damit endlich).

   Wir zeigen: aus $u \approx_M v$ folgt $u \sim_L v$ (d.h. $\approx_M$ verfeinert $\sim_L$).
   Dann gilt auch $\mathit{Index}(\sim_L) \leq \mathit{Index}(\approx_M) \leq |Z|$ (und damit endlich).

Der Satz von Myhill und Nerode

Beweis

1. Wir zeigen zuerst, dass wenn L regulär ist, dann ist der Index von $\sim_L$ endlich.

   Sei L regulär und $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA mit $L(M) = L$.

   Sei $\approx_M \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ definiert, sodass $u \approx_M v$ wenn $\widetilde{\delta}(z_0, u) = \widetilde{\delta}(z_0, v)$.
   D.h. $u \approx_M v$, wenn u, v auf M zum gleichen Zustand führen.

   $\approx_M$ ist eine Äquivalenzrelation.

   $\mathit{Index}(\approx_M) \leq |Z|$ (und damit endlich).

   Wir zeigen: aus $u \approx_M v$ folgt $u \sim_L v$ (d.h. $\approx_M$ verfeinert $\sim_L$).
   Dann gilt auch $\mathit{Index}(\sim_L) \leq \mathit{Index}(\approx_M) \leq |Z|$ (und damit endlich).

   Seien $u \approx_M v$ und $w \in \Sigma^*$. Dann gilt

   $$\widetilde{\delta}(z_0, uw) = \widetilde{\delta}(\widetilde{\delta}(z_0, u), w) = \widetilde{\delta}(\widetilde{\delta}(z_0, v), w) = \widetilde{\delta}(z_0, vw)$$

   und damit $uw \in L$ g.d.w. $vw \in L$. Da w beliebig war, zeigt dies $u \sim_L v$.

Beweis

2. Wir zeigen nun, dass wenn der Index von $\sim_L$ endlich ist, dann ist L regulär.

Beweis

2. Wir zeigen nun, dass wenn der Index von $\sim_L$ endlich ist, dann ist L regulär.

   Sei der Index von $\sim_L$ endlich.

Beweis

2. Wir zeigen nun, dass wenn der Index von $\sim_L$ endlich ist, dann ist L regulär.

   Sei der Index von $\sim_L$ endlich.

   Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, [\varepsilon]_{\sim_L}, E)$ der Nerode-Automat. Wir zeigen $L(M) = L$. Somit ist L regulär.

Beweis

2. Wir zeigen nun, dass wenn der Index von $\sim_L$ endlich ist, dann ist L regulär.

   Sei der Index von $\sim_L$ endlich.

   Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, [\varepsilon]_{\sim_L}, E)$ der Nerode-Automat. Wir zeigen $L(M) = L$. Somit ist L regulär.

   $$w \in L(M)$$

Der Satz von Myhill und Nerode

Beweis

2. Wir zeigen nun, dass wenn der Index von $\sim_L$ endlich ist, dann ist L regulär.

   Sei der Index von $\sim_L$ endlich.

   Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, [\varepsilon]_{\sim_L}, E)$ der Nerode-Automat. Wir zeigen $L(M) = L$. Somit ist L regulär.

   $$\begin{aligned} & w \in L(M) \\ \text{g.d.w. } & \widetilde{\delta}([\varepsilon]_{\sim_L}, w) \in E \end{aligned}$$

Beweis

2. Wir zeigen nun, dass wenn der Index von $\sim_L$ endlich ist, dann ist L regulär.

   Sei der Index von $\sim_L$ endlich.

   Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, [\varepsilon]_{\sim_L}, E)$ der Nerode-Automat. Wir zeigen $L(M) = L$.
   Somit ist L regulär.

   $$\begin{aligned} & w \in L(M) \\ \text{g.d.w. } & \widetilde{\delta}([\varepsilon]_{\sim_L}, w) \in E \\ \text{g.d.w. } & [w]_{\sim_L} \in E \end{aligned}$$

Der Satz von Myhill und Nerode

Beweis

2. Wir zeigen nun, dass wenn der Index von $\sim_L$ endlich ist, dann ist L regulär.

   Sei der Index von $\sim_L$ endlich.

   Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, [\varepsilon]_{\sim_L}, E)$ der Nerode-Automat. Wir zeigen $L(M) = L$.
   Somit ist L regulär.

$$\begin{array}{ll} & w \in L(M) \\ \text{g.d.w.} & \widetilde{\delta}([\varepsilon]_{\sim_L}, w) \in E \\ \text{g.d.w.} & [w]_{\sim_L} \in E \\ \text{g.d.w.} & w \in L \end{array}$$

$\square$

Anwendung des Satzes von Myhill und Nerode

Da der Satz von Myhill und Nerode eine hinreichende und notwendige Bedingung für reguläre Sprachen liefert, kann man ihn verwenden, um

1. Regularität nachzuweisen: Zeige $\mathit{Index}(\sim_L)$ ist endlich.

2. Nichtregularität nachzuweisen: Zeige $\mathit{Index}(\sim_L)$ ist unendlich.

Anwendung des Satzes von Myhill und Nerode

Da der Satz von Myhill und Nerode eine hinreichende und notwendige Bedingung für reguläre Sprachen liefert, kann man ihn verwenden, um

1. Regularität nachzuweisen: Zeige $\mathit{Index}(\sim_L)$ ist endlich.

   Oft einfacher:

   - *Gib endlichen Automaten an, der L akzeptiert.*
   - *Gib regulären Ausdruck an, der L erzeugt.*
   - *Gib reguläre Grammatik an, die L erzeugt.*

2. Nichtregularität nachzuweisen: Zeige $\mathit{Index}(\sim_L)$ ist unendlich.

Anwendung des Satzes von Myhill und Nerode

Da der Satz von Myhill und Nerode eine hinreichende und notwendige Bedingung für reguläre Sprachen liefert, kann man ihn verwenden, um

1. Regularität nachzuweisen: Zeige $Index(\sim_L)$ ist endlich.

   Oft einfacher:

   - *Gib endlichen Automaten an, der L akzeptiert.*
   - *Gib regulären Ausdruck an, der L erzeugt.*
   - *Gib reguläre Grammatik an, die L erzeugt.*

2. Nichtregularität nachzuweisen: Zeige $Index(\sim_L)$ ist unendlich.

   Wird insbesondere dann benutzt, wenn das Pumping-Lemma nicht funktioniert.

Wie zeigt man $Index(\sim_L) = \infty$?

Grundgedanke:

- Finde unendlich viele Äquivalenzklassen $[u_1]_{\sim_L}, [u_2]_{\sim_L}, \ldots,$ die paarweise verschieden sind ($[u_i]_{\sim_L} \neq [u_j]_{\sim_L}$ für $i \neq j$).

Wie zeigt man $Index(\sim_L) = \infty$?

Grundgedanke:

- Finde unendlich viele Äquivalenzklassen $[u_1]_{\sim_L}, [u_2]_{\sim_L}, \dots,$ die paarweise verschieden sind ($[u_i]_{\sim_L} \neq [u_j]_{\sim_L}$ für $i \neq j$).

Rezept:

- Finde für $i = 1, 2, \dots$ Wörter u_i und w_i, sodass $u_i w_i \in L$ aber $u_j w_i \notin L$ für alle $i \neq j$.

Wie zeigt man $Index(\sim_L) = \infty$?

Grundgedanke:

- Finde unendlich viele Äquivalenzklassen $[u_1]_{\sim_L}, [u_2]_{\sim_L}, \ldots,$ die paarweise verschieden sind ($[u_i]_{\sim_L} \neq [u_j]_{\sim_L}$ für $i \neq j$).

Rezept:

- Finde für $i = 1, 2, \ldots$ Wörter u_i und w_i, sodass $u_i w_i \in L$ aber $u_j w_i \notin L$ für alle $i \neq j$.

Dann sind $u_i \not\sim_L u_j$ für alle $i \neq j$.

Wie zeigt man $\mathit{Index}(\sim_L) = \infty$?

Grundgedanke:

- Finde unendlich viele Äquivalenzklassen $[u_1]_{\sim_L}, [u_2]_{\sim_L}, \ldots,$
  die paarweise verschieden sind ($[u_i]_{\sim_L} \neq [u_j]_{\sim_L}$ für $i \neq j$).

Rezept:

- Finde für $i = 1, 2, \ldots$ Wörter u_i und w_i,
  sodass $u_i w_i \in L$ aber $u_j w_i \notin L$ für alle $i \neq j$.

Dann sind $u_i \not\sim_L u_j$ für alle $i \neq j$.
Daher sind $[u_1]_{\sim_L}$,$[u_2]_{\sim_L}$,... paarweise disjunkt.

Wie zeigt man $Index(\sim_L) = \infty$?

Grundgedanke:

- Finde unendlich viele Äquivalenzklassen $[u_1]_{\sim_L}, [u_2]_{\sim_L}, \ldots,$ die paarweise verschieden sind ($[u_i]_{\sim_L} \neq [u_j]_{\sim_L}$ für $i \neq j$).

Rezept:

- Finde für $i = 1, 2, \ldots$ Wörter u_i und w_i, sodass $u_i w_i \in L$ aber $u_j w_i \notin L$ für alle $i \neq j$.

Dann sind $u_i \not\sim_L u_j$ für alle $i \neq j$.
Daher sind $[u_1]_{\sim_L}$,$[u_2]_{\sim_L}$,... paarweise disjunkt.

Beachte: Es ist hierfür nicht notwendig, alle Äquivalenzklassen der disjunkten Zerlegung von Σ^* zu finden.

Nichtregularität zeigen mit dem Satz von Myhill und Nerode

Satz

Die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Für $u_i = a^i b$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt: $[u_i]_{\sim_L}$ besteht aus allen Wörtern, denen noch $i - 1$ b's fehlen, um in L enthalten zu sein.

Nichtregularität zeigen mit dem Satz von Myhill und Nerode

Satz

Die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Für $u_i = a^i b$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt: $[u_i]_{\sim_L}$ besteht aus allen Wörtern, denen noch $i-1$ b's fehlen, um in L enthalten zu sein. D.h.

$$\begin{aligned}
[u_1]_{\sim_L} &= \{ab, a^2b^2, \ldots\} = L \\
[u_2]_{\sim_L} &= \{a^2b, a^3b^2, a^4b^3, \ldots\} \\
[u_3]_{\sim_L} &= \{a^3b, a^4b^2, a^5b^3, \ldots\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Nichtregularität zeigen mit dem Satz von Myhill und Nerode

Satz

Die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Für $u_i = a^i b$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt: $[u_i]_{\sim_L}$ besteht aus allen Wörtern, denen noch $i-1$ b's fehlen, um in L enthalten zu sein. D.h.

$$\begin{aligned}
[u_1]_{\sim_L} &= \{ab, a^2b^2, \ldots\} = L \\
[u_2]_{\sim_L} &= \{a^2b, a^3b^2, a^4b^3, \ldots\} \\
[u_3]_{\sim_L} &= \{a^3b, a^4b^2, a^5b^3, \ldots\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Sei $w_i = b^{i-1}$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$.

Nichtregularität zeigen mit dem Satz von Myhill und Nerode

Satz

Die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Für $u_i = a^i b$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt: $[u_i]_{\sim_L}$ besteht aus allen Wörtern, denen noch $i-1$ b's fehlen, um in L enthalten zu sein. D.h.

$$\begin{aligned}
[u_1]_{\sim_L} &= \{ab, a^2b^2, \ldots\} = L \\
[u_2]_{\sim_L} &= \{a^2b, a^3b^2, a^4b^3, \ldots\} \\
[u_3]_{\sim_L} &= \{a^3b, a^4b^2, a^5b^3, \ldots\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Sei $w_i = b^{i-1}$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$.

$u_i w_i = a^i b^i \in L$, aber $u_j w_i = a^j b^i \notin L$ für $i \neq j$.

Nichtregularität zeigen mit dem Satz von Myhill und Nerode

Satz

Die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Für $u_i = a^i b$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt: $[u_i]_{\sim_L}$ besteht aus allen Wörtern, denen noch $i-1$ b's fehlen, um in L enthalten zu sein. D.h.

$$\begin{aligned}
[u_1]_{\sim_L} &= \{ab, a^2b^2, \ldots\} = L \\
[u_2]_{\sim_L} &= \{a^2b, a^3b^2, a^4b^3, \ldots\} \\
[u_3]_{\sim_L} &= \{a^3b, a^4b^2, a^5b^3, \ldots\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Sei $w_i = b^{i-1}$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$.

$u_i w_i = a^i b^i \in L$, aber $u_j w_i = a^j b^i \notin L$ für $i \neq j$.

Daher gilt $[u_i]_{\sim_L} \neq [u_j]_{\sim_L}$ für $i \neq j$ und $Index(\sim_L) = \infty$.

Nichtregularität zeigen mit dem Satz von Myhill und Nerode

Satz

Die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Für $u_i = a^i b$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt: $[u_i]_{\sim_L}$ besteht aus allen Wörtern, denen noch $i-1$ b's fehlen, um in L enthalten zu sein. D.h.

$$
\begin{aligned}
[u_1]_{\sim_L} &= \{ab, a^2b^2, \ldots\} = L \\
[u_2]_{\sim_L} &= \{a^2b, a^3b^2, a^4b^3, \ldots\} \\
[u_3]_{\sim_L} &= \{a^3b, a^4b^2, a^5b^3, \ldots\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Sei $w_i = b^{i-1}$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$.

$u_i w_i = a^i b^i \in L$, aber $u_j w_i = a^j b^i \notin L$ für $i \neq j$.

Daher gilt $[u_i]_{\sim_L} \neq [u_j]_{\sim_L}$ für $i \neq j$ und $Index(\sim_L) = \infty$.

Mit dem Satz von Myhill und Nerode folgt, dass L nicht regulär ist. $\square$

Eine nicht reguläre Sprache, die die Pumping-Eigenschaft hat

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^k c^k \mid j, k \in \mathbb{N}\} \cup \{b, c\}^*$ ist nicht regulär.

Eine nicht reguläre Sprache, die die Pumping-Eigenschaft hat

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^k c^k \mid j, k \in \mathbb{N}\} \cup \{b, c\}^*$ ist nicht regulär.

Beweis Sei $u_i = ab^i c$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$.

Eine nicht reguläre Sprache, die die Pumping-Eigenschaft hat

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^k c^k \mid j, k \in \mathbb{N}\} \cup \{b, c\}^*$ ist nicht regulär.

Beweis Sei $u_i = ab^i c$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$.

Sei $w_i = c^{i-1}$.

Eine nicht reguläre Sprache, die die Pumping-Eigenschaft hat

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^k c^k \mid j, k \in \mathbb{N}\} \cup \{b, c\}^*$ ist nicht regulär.

Beweis Sei $u_i = ab^i c$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$.

Sei $w_i = c^{i-1}$.

$u_i w_i = ab^i c^i \in L$, aber $u_j w_i = ab^j c^i \notin L$ für $i \neq j$.

Eine nicht reguläre Sprache, die die Pumping-Eigenschaft hat

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^k c^k \mid j, k \in \mathbb{N}\} \cup \{b, c\}^*$ ist nicht regulär.

Beweis Sei $u_i = ab^i c$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$.

Sei $w_i = c^{i-1}$.

$u_i w_i = ab^i c^i \in L$, aber $u_j w_i = ab^j c^i \notin L$ für $i \neq j$.

Daher sind alle $[u_i]_{\sim_L}$ disjunkt und $Index(\sim_L) = \infty$.

Eine nicht reguläre Sprache, die die Pumping-Eigenschaft hat

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^k c^k \mid j, k \in \mathbb{N}\} \cup \{b, c\}^*$ ist nicht regulär.

Beweis Sei $u_i = ab^i c$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$.

Sei $w_i = c^{i-1}$.

$u_i w_i = ab^i c^i \in L$, aber $u_j w_i = ab^j c^i \notin L$ für $i \neq j$.

Daher sind alle $[u_i]_{\sim_L}$ disjunkt und $Index(\sim_L) = \infty$.

Mit dem Satz von Myhill und Nerode folgt, dass L nicht regulär ist. $\square$

Regularität zeigen mit dem Satz von Myhill und Nerode

Sei $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b\}$.
Die disjunkten Äquivalenzklassen von $\sim_L$ sind

- $[\varepsilon]_{\sim_L} = \{\varepsilon\}$
- $[a]_{\sim_L} = \{a, ab, abb, abbb, \ldots\}$
- $[aa]_{\sim_L} = \{aau \mid u \in \Sigma^*\} \cup \{bu \mid u \in \Sigma^*\} \cup \{abuav \mid u, v \in \Sigma^*\}$

Regularität zeigen mit dem Satz von Myhill und Nerode

Sei $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b\}$.
Die disjunkten Äquivalenzklassen von $\sim_L$ sind

- $[\varepsilon]_{\sim_L} = \{\varepsilon\}$
- $[a]_{\sim_L} = \{a, ab, abb, abbb, \ldots\}$
- $[aa]_{\sim_L} = \{aau \mid u \in \Sigma^*\} \cup \{bu \mid u \in \Sigma^*\} \cup \{abuav \mid u, v \in \Sigma^*\}$

Daher folgt $Index(\sim_L) = 3$ und mit dem Satz von Myhill und Nerode folgt, dass L regulär ist.

Minimale DFAs

Satz

Der Nerode-Automat zu einer regulären Sprache L ist ein minimaler DFA, d.h. jeder DFA M', mit $L(M') = L$ hat mindestens so viele Zustände wie der Nerode-Automat. Zudem sind alle minimalen DFAs bis auf Umbenennung von Zuständen identisch.

Beweis

1. Wir zeigen zuerst Minimalität.

Minimale DFAs

Satz

Der Nerode-Automat zu einer regulären Sprache L ist ein minimaler DFA, d.h. jeder DFA M', mit $L(M') = L$ hat mindestens so viele Zustände wie der Nerode-Automat. Zudem sind alle minimalen DFAs bis auf Umbenennung von Zuständen identisch.

Beweis

1. Wir zeigen zuerst Minimalität.

   Seien $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ der Nerode-Automat zur Sprache L und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ ein beliebiger DFA mit $L(M') = L$.

Minimale DFAs

Satz

Der Nerode-Automat zu einer regulären Sprache L ist ein minimaler DFA, d.h. jeder DFA M', mit $L(M') = L$ hat mindestens so viele Zustände wie der Nerode-Automat. Zudem sind alle minimalen DFAs bis auf Umbenennung von Zuständen identisch.

Beweis

1. Wir zeigen zuerst Minimalität.

   Seien $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ der Nerode-Automat zur Sprache L und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ ein beliebiger DFA mit $L(M') = L$.

   Wir zeigen $|Z'| \geq |Z|$.

Minimale DFAs

Satz

Der Nerode-Automat zu einer regulären Sprache L ist ein minimaler DFA, d.h. jeder DFA M', mit $L(M') = L$ hat mindestens so viele Zustände wie der Nerode-Automat. Zudem sind alle minimalen DFAs bis auf Umbenennung von Zuständen identisch.

Beweis

1. Wir zeigen zuerst Minimalität.

   Seien $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ der Nerode-Automat zur Sprache L und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ ein beliebiger DFA mit $L(M') = L$.

   Wir zeigen $|Z'| \geq |Z|$.

   Der Beweis des Satzes von Myhill und Nerode zeigt: $\approx_{M'}$ verfeinert $\sim_L$.

Minimale DFAs

Satz

Der Nerode-Automat zu einer regulären Sprache L ist ein minimaler DFA, d.h. jeder DFA M', mit $L(M') = L$ hat mindestens so viele Zustände wie der Nerode-Automat. Zudem sind alle minimalen DFAs bis auf Umbenennung von Zuständen identisch.

Beweis

1. Wir zeigen zuerst Minimalität.

   Seien $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ der Nerode-Automat zur Sprache L und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ ein beliebiger DFA mit $L(M') = L$.

   Wir zeigen $|Z'| \geq |Z|$.

   Der Beweis des Satzes von Myhill und Nerode zeigt: $\approx_{M'}$ verfeinert $\sim_L$.
   Zudem $\mathit{Index}(\sim_L) = \mathit{Index}(\approx_M)$.

Minimale DFAs

Satz

Der Nerode-Automat zu einer regulären Sprache L ist ein minimaler DFA, d.h. jeder DFA M', mit $L(M') = L$ hat mindestens so viele Zustände wie der Nerode-Automat. Zudem sind alle minimalen DFAs bis auf Umbenennung von Zuständen identisch.

Beweis

1. Wir zeigen zuerst Minimalität.

   Seien $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ der Nerode-Automat zur Sprache L und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ ein beliebiger DFA mit $L(M') = L$.

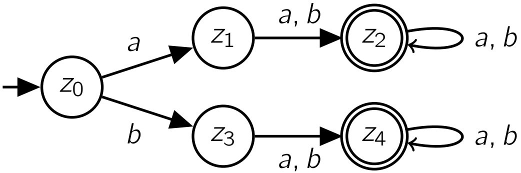
   Wir zeigen $|Z'| \geq |Z|$.

   Der Beweis des Satzes von Myhill und Nerode zeigt: $\approx_{M'}$ verfeinert $\sim_L$. Zudem $Index(\sim_L) = Index(\approx_M)$.

   Daher ist $Index(\approx_{M'}) \geq Index(\approx_M)$ und daher auch $|Z'| \geq Index(\approx_{M'}) \geq Index(\approx_M) = Index(\sim_L) = |Z|$.

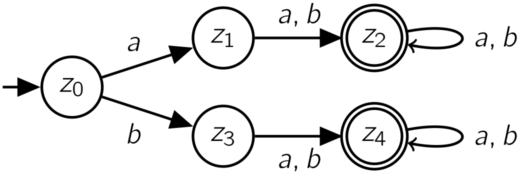
Beispiel für Minimalität

Beliebiger DFA M:

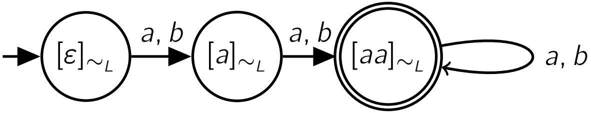


Beispiel für Minimalität

Beliebiger DFA M:



Nerode-Automat M':



Minimale DFAs

Beweis (Fortsetzung)

2. Wir zeigen nun, dass alle minimalen DFAs bis auf Umbenennung von Zuständen identisch sind.

Minimale DFAs

Beweis (Fortsetzung)

2. Wir zeigen nun, dass alle minimalen DFAs bis auf Umbenennung von Zuständen identisch sind.

   Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ der Nerode-Automat zur Sprache L und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ ein beliebiger minimaler DFA mit $L(M') = L$.

Minimale DFAs

Beweis (Fortsetzung)

2. Wir zeigen nun, dass alle minimalen DFAs bis auf Umbenennung von Zuständen identisch sind.

   Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ der Nerode-Automat zur Sprache L und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z'_0, E')$ ein beliebiger minimaler DFA mit $L(M') = L$.

   Minimalität impliziert $|Z'| = |Z|$.

Minimale DFAs

Beweis (Fortsetzung)

2. Wir zeigen nun, dass alle minimalen DFAs bis auf Umbenennung von Zuständen identisch sind.

   Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ der Nerode-Automat zur Sprache L und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ ein beliebiger minimaler DFA mit $L(M') = L$.

   Minimalität impliziert $|Z'| = |Z|$.

   Da $\approx_{M'}$ $\sim_L$ verfeinert, gilt entweder $\mathit{Index}(\approx_{M'}) > \mathit{Index}(\sim_L)$ oder $\approx_{M'} = \sim_L$.
   Im ersten Fall hätten wir $|Z'| \geq \mathit{Index}(\approx_{M'}) > \mathit{Index}(\sim_L) = |Z|$. Widerspruch.
   Daher $\approx_{M'} = \sim_L$.

Minimale DFAs

Beweis (Fortsetzung)

2. Wir zeigen nun, dass alle minimalen DFAs bis auf Umbenennung von Zuständen identisch sind.

   Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ der Nerode-Automat zur Sprache L und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ ein beliebiger minimaler DFA mit $L(M') = L$.

   Minimalität impliziert $|Z'| = |Z|$.

   Da $\approx_{M'}$ $\sim_L$ verfeinert, gilt entweder $\mathit{Index}(\approx_{M'}) > \mathit{Index}(\sim_L)$ oder $\approx_{M'} = \sim_L$. Im ersten Fall hätten wir $|Z'| \geq \mathit{Index}(\approx_{M'}) > \mathit{Index}(\sim_L) = |Z|$. Widerspruch. Daher $\approx_{M'} = \sim_L$.

   Da $\approx_{M'} = \sim_L = \approx_M$, folgt dass M und M' strukturell identisch sind (siehe Skript). $\square$

Minimale NFAs

Wir haben gezeigt, dass alle minimalen DFAs bis auf Umbenennung identisch sind.

Minimale NFAs

Wir haben gezeigt, dass alle minimalen DFAs bis auf Umbenennung identisch sind.

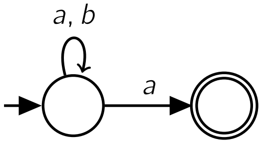
Für NFAs gilt das im Allgemeinen nicht.

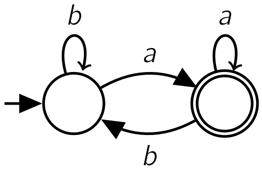
Minimale NFAs

Wir haben gezeigt, dass alle minimalen DFAs bis auf Umbenennung identisch sind.

Für NFAs gilt das im Allgemeinen nicht.

Gegenbeispiel:





Beide NFAs erkennen $\{ua \mid u \in \{a, b\}^*\}$ und haben eine minimale Zustandsanzahl, sind aber strukturell verschieden.

Wiederholung: Äquivalenzklassenautomat

Definition

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA.
Wir nennen zwei Zustände $z, z' \in Z$ äquivalent und schreiben $z \equiv_M z'$ (alternativ $z \equiv z'$), falls gilt: $\widetilde{\delta}(z, w) \in E$ g.d.w. $\widetilde{\delta}(z', w) \in E$ für alle $w \in \Sigma^*$.

Der Äquivalenzklassenautomat zu M ist der DFA $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ mit

$$\begin{aligned} Z' &:= \{[z]_\equiv \mid z \in Z\} \\ z_0' &:= [z_0]_\equiv \\ E' &:= \{[z]_\equiv \mid z \in E\} \\ \delta'([z]_\equiv, a) &:= [\delta(z, a)]_\equiv \end{aligned}$$

Informell: Zwei Zustände sind äquivalent, wenn sie die gleiche „Sprache“ darstellen.

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Satz

Seien $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ der Äquivalenzklassenautomat zu M. Dann gilt

1. $L(M') = L(M)$.
2. Falls alle Zustände in Z von z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal, d.h. jeder DFA M'' mit $L(M'') = L(M')$ hat mindestens so viele Zustände wie M'.

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Satz

Seien $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ der Äquivalenzklassenautomat zu M. Dann gilt

1. $L(M') = L(M)$.
2. Falls alle Zustände in Z von z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal, d.h. jeder DFA M'' mit $L(M'') = L(M')$ hat mindestens so viele Zustände wie M'.

Beweis

1. Wurde in früherer Vorlesung gezeigt.

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Beweis (Fortsetzung)

2. Wir müssen zeigen, dass falls alle Zustände in Z von z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal, d.h. jeder DFA M'' mit $L(M'') = L(M')$ hat mindestens so viele Zustände wie M'.

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Beweis (Fortsetzung)

2. Wir müssen zeigen, dass falls alle Zustände in Z von z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal, d.h. jeder DFA M'' mit $L(M'') = L(M')$ hat mindestens so viele Zustände wie M'.

   Sei $L = L(M') = L(M)$.

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Beweis (Fortsetzung)

2. Wir müssen zeigen, dass falls alle Zustände in Z von z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal, d.h. jeder DFA M'' mit $L(M'') = L(M')$ hat mindestens so viele Zustände wie M'.

   Sei $L = L(M') = L(M)$.

   Da alle $z \in Z$ erreichbar sind, sind alle $z' \in Z'$ erreichbar.

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Beweis (Fortsetzung)

2. Wir müssen zeigen, dass falls alle Zustände in Z von z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal, d.h. jeder DFA M'' mit $L(M'') = L(M')$ hat mindestens so viele Zustände wie M'.

   Sei $L = L(M') = L(M)$.

   Da alle $z \in Z$ erreichbar sind, sind alle $z' \in Z'$ erreichbar.

   Für Minimalität genügt es zu zeigen, dass M' nicht mehr Zustände hat als der Nerode-Automat: $|Z'| \leq Index(\sim_L)$.

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Beweis (Fortsetzung)

2. Wir müssen zeigen, dass falls alle Zustände in Z von z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal, d.h. jeder DFA M'' mit $L(M'') = L(M')$ hat mindestens so viele Zustände wie M'.

   Sei $L = L(M') = L(M)$.

   Da alle $z \in Z$ erreichbar sind, sind alle $z' \in Z'$ erreichbar.

   Für Minimalität genügt es zu zeigen, dass M' nicht mehr Zustände hat als der Nerode-Automat: $|Z'| \leq \mathit{Index}(\sim_L)$.

   Wir zeigen gleich für jede Äquivalenzklasse $[v]_{\sim_L}$:
   Für alle $u \in [v]_{\sim_L}$ ist $\widetilde{\delta}(z'_0, u)$ derselbe Zustand.
   Dann gibt es nicht mehr als $\mathit{Index}(\sim_L)$ erreichbare Zustände.

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Beweis (Fortsetzung)

2. Wir müssen zeigen, dass falls alle Zustände in Z von z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal, d.h. jeder DFA M'' mit $L(M'') = L(M')$ hat mindestens so viele Zustände wie M'.

   Sei $L = L(M') = L(M)$.

   Da alle $z \in Z$ erreichbar sind, sind alle $z' \in Z'$ erreichbar.

   Für Minimalität genügt es zu zeigen, dass M' nicht mehr Zustände hat als der Nerode-Automat: $|Z'| \leq Index(\sim_L)$.

   Wir zeigen gleich für jede Äquivalenzklasse $[v]_{\sim_L}$:
   Für alle $u \in [v]_{\sim_L}$ ist $\widetilde{\delta}(z'_0, u)$ derselbe Zustand.
   Dann gibt es nicht mehr als $Index(\sim_L)$ erreichbare Zustände.

   Da alle $z' \in Z'$ erreichbar sind, gilt damit $|Z'| \leq Index(\sim_L)$.

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Beweis (Fortsetzung)

Seien $u, u' \in [v]_{\sim_L}$, d.h. $u \sim_L u'$. Dann gilt

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Beweis (Fortsetzung)

Seien $u, u' \in [v]_{\sim_L}$, d.h. $u \sim_L u'$. Dann gilt

$$uw \in L \text{ g.d.w. } u'w \in L \text{ für jedes } w \in \Sigma^*$$

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Beweis (Fortsetzung)

Seien $u, u' \in [v]_{\sim_L}$, d.h. $u \sim_L u'$. Dann gilt

$$uw \in L \text{ g.d.w. } u'w \in L \text{ für jedes } w \in \Sigma^*$$

woraus folgt: $\widetilde{\delta}'(z_0', uw) \in E'$ g.d.w. $\widetilde{\delta}'(z_0', u'w) \in E'$ für jedes $w \in \Sigma^*$

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Beweis (Fortsetzung)

Seien $u, u' \in [v]_{\sim_L}$, d.h. $u \sim_L u'$. Dann gilt

$$uw \in L \text{ g.d.w. } u'w \in L \text{ für jedes } w \in \Sigma^*$$

woraus folgt: $\widetilde{\delta}'(z_0', uw) \in E'$ g.d.w. $\widetilde{\delta}'(z_0', u'w) \in E'$ für jedes $w \in \Sigma^*$

woraus folgt: $\widetilde{\delta}'(\widetilde{\delta}'(z_0', u), w) \in E'$ g.d.w. $\widetilde{\delta}'(\widetilde{\delta}'(z_0', u'), w) \in E'$ für jedes $w \in \Sigma^*$

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Beweis (Fortsetzung)

Seien $u, u' \in [v]_{\sim_L}$, d.h. $u \sim_L u'$. Dann gilt

$$uw \in L \text{ g.d.w. } u'w \in L \text{ für jedes } w \in \Sigma^*$$

woraus folgt: $\widetilde{\delta}'(z_0', uw) \in E'$ g.d.w. $\widetilde{\delta}'(z_0', u'w) \in E'$ für jedes $w \in \Sigma^*$

woraus folgt: $\widetilde{\delta}'(\widetilde{\delta}'(z_0', u), w) \in E'$ g.d.w. $\widetilde{\delta}'(\widetilde{\delta}'(z_0', u'), w) \in E'$ für jedes $w \in \Sigma^*$

woraus folgt: $\widetilde{\delta}'(z_0', u) = \widetilde{\delta}'(z_0', u')$ $\square$