

5a

Der Satz von Myhill und Nerode

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 4. April 2024

Basiert auf Folien von PD Dr. David Sabel



Die Nerode-Relation

Definition

Sei L eine Sprache über Σ . Die **Nerode-Relation** $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ zu L ist definiert für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$, sodass $u \sim_L v$ wenn

für jedes $w \in \Sigma^*$: $uw \in L$ g.d.w. $vw \in L$

Die Nerode-Relation

Definition

Sei L eine Sprache über Σ . Die **Nerode-Relation** $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ zu L ist definiert für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$, sodass $u \sim_L v$ wenn

für jedes $w \in \Sigma^*$: $uw \in L$ g.d.w. $vw \in L$

Informell: $u \sim_L v$, wenn sich ihr Enthaltensein in L gleich verhält bezüglich beliebiger Erweiterung um dasselbe Suffix.

Die Nerode-Relation

Definition

Sei L eine Sprache über Σ . Die **Nerode-Relation** $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ zu L ist definiert für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$, sodass $u \sim_L v$ wenn

für jedes $w \in \Sigma^*$: $uw \in L$ g.d.w. $vw \in L$

Informell: $u \sim_L v$, wenn sich ihr Enthaltensein in L gleich verhält bezüglich beliebiger Erweiterung um dasselbe Suffix.

Sei die Sprache $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Gilt $a \sim_L ab$?
2. Gilt $aa u \sim_L bv$ mit $u, v \in \Sigma^*$?
3. Gilt $\varepsilon \sim_L a$?
4. Gilt $aa u \sim_L aa v$ mit $u, v \in \{b\}^*$?
5. Gilt $ab^i \sim_L ab^j$?
6. Gilt $a \sim_L b$?

Die Nerode-Relation

Definition

Sei L eine Sprache über Σ . Die **Nerode-Relation** $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ zu L ist definiert für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$, sodass $u \sim_L v$ wenn

für jedes $w \in \Sigma^*$: $uw \in L$ g.d.w. $vw \in L$

Informell: $u \sim_L v$, wenn sich ihr Enthaltensein in L gleich verhält bezüglich beliebiger Erweiterung um dasselbe Suffix.

Sei die Sprache $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Gilt $a \sim_L ab$? Ja
2. Gilt $aa u \sim_L bv$ mit $u, v \in \Sigma^*$?
3. Gilt $\varepsilon \sim_L a$?
4. Gilt $aa u \sim_L aa v$ mit $u, v \in \{b\}^*$?
5. Gilt $ab^i \sim_L ab^j$?
6. Gilt $a \sim_L b$?

Die Nerode-Relation

Definition

Sei L eine Sprache über Σ . Die **Nerode-Relation** $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ zu L ist definiert für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$, sodass $u \sim_L v$ wenn

für jedes $w \in \Sigma^*$: $uw \in L$ g.d.w. $vw \in L$

Informell: $u \sim_L v$, wenn sich ihr Enthaltensein in L gleich verhält bezüglich beliebiger Erweiterung um dasselbe Suffix.

Sei die Sprache $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Gilt $a \sim_L ab$? Ja
2. Gilt $aa u \sim_L bv$ mit $u, v \in \Sigma^*$? Ja
3. Gilt $\varepsilon \sim_L a$?
4. Gilt $aa u \sim_L aa v$ mit $u, v \in \{b\}^*$?
5. Gilt $ab^i \sim_L ab^j$?
6. Gilt $a \sim_L b$?

Die Nerode-Relation

Definition

Sei L eine Sprache über Σ . Die **Nerode-Relation** $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ zu L ist definiert für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$, sodass $u \sim_L v$ wenn

für jedes $w \in \Sigma^*$: $uw \in L$ g.d.w. $vw \in L$

Informell: $u \sim_L v$, wenn sich ihr Enthaltensein in L gleich verhält bezüglich beliebiger Erweiterung um dasselbe Suffix.

Sei die Sprache $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Gilt $a \sim_L ab$? **Ja**
2. Gilt $aa u \sim_L b v$ mit $u, v \in \Sigma^*$? **Ja**
3. Gilt $\varepsilon \sim_L a$? **Nein (z.B. $w = b^i$)**
4. Gilt $aa u \sim_L aa v$ mit $u, v \in \{b\}^*$?
5. Gilt $ab^i \sim_L ab^j$?
6. Gilt $a \sim_L b$?

Die Nerode-Relation

Definition

Sei L eine Sprache über Σ . Die **Nerode-Relation** $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ zu L ist definiert für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$, sodass $u \sim_L v$ wenn

für jedes $w \in \Sigma^*$: $uw \in L$ g.d.w. $vw \in L$

Informell: $u \sim_L v$, wenn sich ihr Enthaltensein in L gleich verhält bezüglich beliebiger Erweiterung um dasselbe Suffix.

Sei die Sprache $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Gilt $a \sim_L ab$? **Ja**
2. Gilt $aa u \sim_L b v$ mit $u, v \in \Sigma^*$? **Ja**
3. Gilt $\varepsilon \sim_L a$? **Nein (z.B. $w = b^i$)**
4. Gilt $aa u \sim_L aa v$ mit $u, v \in \{b\}^*$? **Ja**
5. Gilt $ab^i \sim_L ab^j$?
6. Gilt $a \sim_L b$?

Die Nerode-Relation

Definition

Sei L eine Sprache über Σ . Die **Nerode-Relation** $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ zu L ist definiert für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$, sodass $u \sim_L v$ wenn

für jedes $w \in \Sigma^*$: $uw \in L$ g.d.w. $vw \in L$

Informell: $u \sim_L v$, wenn sich ihr Enthaltensein in L gleich verhält bezüglich beliebiger Erweiterung um dasselbe Suffix.

Sei die Sprache $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Gilt $a \sim_L ab$? **Ja**
2. Gilt $aa u \sim_L bv$ mit $u, v \in \Sigma^*$? **Ja**
3. Gilt $\varepsilon \sim_L a$? **Nein (z.B. $w = b^i$)**
4. Gilt $aa u \sim_L aa v$ mit $u, v \in \{b\}^*$? **Ja**
5. Gilt $ab^i \sim_L ab^j$? **Ja**
6. Gilt $a \sim_L b$?

Die Nerode-Relation

Definition

Sei L eine Sprache über Σ . Die **Nerode-Relation** $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ zu L ist definiert für alle Wörter $u, v \in \Sigma^*$, sodass $u \sim_L v$ wenn

für jedes $w \in \Sigma^*$: $uw \in L$ g.d.w. $vw \in L$

Informell: $u \sim_L v$, wenn sich ihr Enthaltensein in L gleich verhält bezüglich beliebiger Erweiterung um dasselbe Suffix.

Sei die Sprache $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$.

1. Gilt $a \sim_L ab$? **Ja**
2. Gilt $aa u \sim_L bv$ mit $u, v \in \Sigma^*$? **Ja**
3. Gilt $\varepsilon \sim_L a$? **Nein** (z.B. $w = b^i$)
4. Gilt $aa u \sim_L aa v$ mit $u, v \in \{b\}^*$? **Ja**
5. Gilt $ab^i \sim_L ab^j$? **Ja**
6. Gilt $a \sim_L b$? **Nein** (z.B. $w = \varepsilon$)

Die Nerode-Relation als Äquivalenzrelation

Satz

Die Nerode-Relation ist eine Äquivalenzrelation.

Die Nerode-Relation als Äquivalenzrelation

Satz

Die Nerode-Relation ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis Der Satz folgt daraus, dass „g.d.w.“ eine Äquivalenzrelation ist. □

Die Nerode-Relation als Äquivalenzrelation

Satz

Die Nerode-Relation ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis Der Satz folgt daraus, dass „g.d.w.“ eine Äquivalenzrelation ist. □

Zur Erinnerung:

- ▶ Die **Äquivalenzklasse** $[u]_{\sim_L}$ ist definiert als $\{w \mid u \sim_L w\}$.
- ▶ Der **Index** einer Äquivalenzrelation ist die **Anzahl ihrer disjunkten Äquivalenzklassen**: $\Sigma^* = [u_1]_{\sim_L} \cup [u_2]_{\sim_L} \cup \dots$.
- ▶ Der Index kann unendlich sein.

Beispiel für den Index der Nerode-Relation

Sei $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b\}$.

$\text{Index}(\sim_L) = ?$

Beispiel für den Index der Nerode-Relation

Sei $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b\}$.

$\text{Index}(\sim_L) = ?$

▶ $[\varepsilon]_{\sim_L} = \{\varepsilon\}$

Beispiel für den Index der Nerode-Relation

Sei $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b\}$.

$\text{Index}(\sim_L) = ?$

- ▶ $[\varepsilon]_{\sim_L} = \{\varepsilon\}$
- ▶ $[a]_{\sim_L} = \{a, ab, abb, abbb, \dots\}$

Beispiel für den Index der Nerode-Relation

Sei $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b\}$.

$Index(\sim_L) = ?$

- ▶ $[\varepsilon]_{\sim_L} = \{\varepsilon\}$
- ▶ $[a]_{\sim_L} = \{a, ab, abb, abbb, \dots\}$
- ▶ $[aa]_{\sim_L} = \{aa u \mid u \in \Sigma^*\}$
 $\cup \{bu \mid u \in \Sigma^*\}$
 $\cup \{abuav \mid u, v \in \Sigma^*\}$

Beispiel für den Index der Nerode-Relation

Sei $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b\}$.

$Index(\sim_L) = ?$

- ▶ $[\varepsilon]_{\sim_L} = \{\varepsilon\}$
- ▶ $[a]_{\sim_L} = \{a, ab, abb, abbb, \dots\}$
- ▶ $[aa]_{\sim_L} = \{aa u \mid u \in \Sigma^*\}$
 $\cup \{bu \mid u \in \Sigma^*\}$
 $\cup \{abuav \mid u, v \in \Sigma^*\}$

$$\Sigma^* = [\varepsilon]_{\sim_L} \cup [a]_{\sim_L} \cup [aa]_{\sim_L}$$

Beispiel für den Index der Nerode-Relation

Sei $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b\}$.

$$\text{Index}(\sim_L) = 3$$

- ▶ $[\varepsilon]_{\sim_L} = \{\varepsilon\}$
- ▶ $[a]_{\sim_L} = \{a, ab, abb, abbb, \dots\}$
- ▶ $[aa]_{\sim_L} = \{aa u \mid u \in \Sigma^*\}$
 $\cup \{bu \mid u \in \Sigma^*\}$
 $\cup \{abuav \mid u, v \in \Sigma^*\}$

$$\Sigma^* = [\varepsilon]_{\sim_L} \cup [a]_{\sim_L} \cup [aa]_{\sim_L}$$

Definition

Sei L eine Sprache über Σ mit $\sim_L = n \in \mathbb{N}_{>0}$. Seien $\Sigma^* = [u_1]_{\sim_L} \cup \dots \cup [u_n]_{\sim_L}$.
Der **Nerode-Automaten** ist der DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, [\varepsilon]_{\sim_L}, E)$ mit

$$\begin{aligned} Z &:= \{[u_1]_{\sim_L}, \dots, [u_n]_{\sim_L}\} \\ \delta([u_i]_{\sim_L}, a) &:= [u_i a]_{\sim_L} \\ E &:= \{[u_i]_{\sim_L} \mid u_i \in L, i \in \{1, \dots, n\}\} \end{aligned}$$

Der Nerode-Automat

Definition

Sei L eine Sprache über Σ mit $\sim_L = n \in \mathbb{N}_{>0}$. Seien $\Sigma^* = [u_1]_{\sim_L} \cup \dots \cup [u_n]_{\sim_L}$.
Der **Nerode-Automaten** ist der DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, [\varepsilon]_{\sim_L}, E)$ mit

$$\begin{aligned} Z &:= \{[u_1]_{\sim_L}, \dots, [u_n]_{\sim_L}\} \\ \delta([u_i]_{\sim_L}, a) &:= [u_i a]_{\sim_L} \\ E &:= \{[u_i]_{\sim_L} \mid u_i \in L, i \in \{1, \dots, n\}\} \end{aligned}$$

Wir werden zeigen, dass der Nerode-Automat **minimal** ist. Aber im Gegensatz zum Äquivalenzklassenautomaten kann man ihn im Allgemeinen **nicht berechnen**.

Beispiel für den Nerode-Automaten

Sprache $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a, b\}^*$ mit

- ▶ $[\varepsilon]_{\sim_L} = \{\varepsilon\}$
- ▶ $[a]_{\sim_L} = \{a, ab, abb, abbb, \dots\}$
- ▶ $[aa]_{\sim_L} = \{aa u \mid u \in \Sigma^*\}$
 $\cup \{bu \mid u \in \Sigma^*\}$
 $\cup \{abuav \mid u, v \in \Sigma^*\}$

$$\Sigma^* = [\varepsilon]_{\sim_L} \cup [a]_{\sim_L} \cup [aa]_{\sim_L}$$

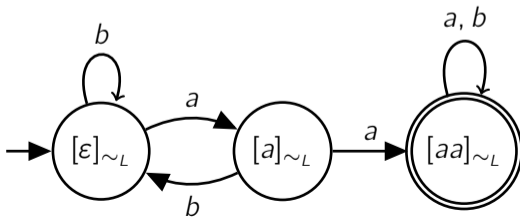
Beispiel für den Nerode-Automaten

Sprache $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a, b\}^*$ mit

- ▶ $[\varepsilon]_{\sim_L} = \{\varepsilon\}$
- ▶ $[a]_{\sim_L} = \{a, ab, abb, abbb, \dots\}$
- ▶ $[aa]_{\sim_L} = \{aa u \mid u \in \Sigma^*\}$
 $\cup \{bu \mid u \in \Sigma^*\}$
 $\cup \{abuav \mid u, v \in \Sigma^*\}$

$$\Sigma^* = [\varepsilon]_{\sim_L} \cup [a]_{\sim_L} \cup [aa]_{\sim_L}$$

Nerode-Automaten zu L :



Der Satz von Myhill und Nerode

Unabhängig bewiesen von John Myhill (1957) und Anil Nerode (1958):

Theorem (Satz von Myhill und Nerode)

Eine Sprache L ist genau dann regulär, wenn der Index von \sim_L endlich ist.

Der Satz von Myhill und Nerode

Unabhängig bewiesen von John Myhill (1957) und Anil Nerode (1958):

Theorem (Satz von Myhill und Nerode)

Eine Sprache L ist genau dann regulär, wenn der Index von \sim_L endlich ist.

Damit haben wir eine **genaue** Charakterisierung der regulären Sprachen (im Gegensatz zum Pumping-Lemma).

Der Satz von Myhill und Nerode

Beweis

1. Wir zeigen zuerst, dass wenn L regulär ist, dann ist der Index von \sim_L endlich.

Der Satz von Myhill und Nerode

Beweis

1. Wir zeigen zuerst, dass wenn L regulär ist, dann ist der Index von \sim_L endlich.

Sei L regulär und $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA mit $L(M) = L$.

Der Satz von Myhill und Nerode

Beweis

1. Wir zeigen zuerst, dass wenn L regulär ist, dann ist der Index von \sim_L endlich.

Sei L regulär und $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA mit $L(M) = L$.

Sei $\approx_M \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ definiert, sodass $u \approx_M v$ wenn $\tilde{\delta}(z_0, u) = \tilde{\delta}(z_0, v)$.

D.h. $u \approx_M v$, wenn u, v auf M zum gleichen Zustand führen.

Der Satz von Myhill und Nerode

Beweis

1. Wir zeigen zuerst, dass wenn L regulär ist, dann ist der Index von \sim_L endlich.

Sei L regulär und $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA mit $L(M) = L$.

Sei $\approx_M \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ definiert, sodass $u \approx_M v$ wenn $\tilde{\delta}(z_0, u) = \tilde{\delta}(z_0, v)$.

D.h. $u \approx_M v$, wenn u, v auf M zum gleichen Zustand führen.

\approx_M ist eine Äquivalenzrelation.

Der Satz von Myhill und Nerode

Beweis

1. Wir zeigen zuerst, dass wenn L regulär ist, dann ist der Index von \sim_L endlich.

Sei L regulär und $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA mit $L(M) = L$.

Sei $\approx_M \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ definiert, sodass $u \approx_M v$ wenn $\tilde{\delta}(z_0, u) = \tilde{\delta}(z_0, v)$.

D.h. $u \approx_M v$, wenn u, v auf M zum gleichen Zustand führen.

\approx_M ist eine Äquivalenzrelation.

$\text{Index}(\approx_M) \leq |Z|$ (und damit endlich).

Der Satz von Myhill und Nerode

Beweis

1. Wir zeigen zuerst, dass wenn L regulär ist, dann ist der Index von \sim_L endlich.

Sei L regulär und $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA mit $L(M) = L$.

Sei $\approx_M \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ definiert, sodass $u \approx_M v$ wenn $\tilde{\delta}(z_0, u) = \tilde{\delta}(z_0, v)$.

D.h. $u \approx_M v$, wenn u, v auf M zum gleichen Zustand führen.

\approx_M ist eine Äquivalenzrelation.

$Index(\approx_M) \leq |Z|$ (und damit endlich).

Wir zeigen: aus $u \approx_M v$ folgt $u \sim_L v$ (d.h. \approx_M verfeinert \sim_L).

Dann gilt auch $Index(\sim_L) \leq Index(\approx_M) \leq |Z|$ (und damit endlich).

Der Satz von Myhill und Nerode

Beweis

1. Wir zeigen zuerst, dass wenn L regulär ist, dann ist der Index von \sim_L endlich.

Sei L regulär und $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA mit $L(M) = L$.

Sei $\approx_M \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ definiert, sodass $u \approx_M v$ wenn $\tilde{\delta}(z_0, u) = \tilde{\delta}(z_0, v)$.

D.h. $u \approx_M v$, wenn u, v auf M zum gleichen Zustand führen.

\approx_M ist eine Äquivalenzrelation.

$Index(\approx_M) \leq |Z|$ (und damit endlich).

Wir zeigen: aus $u \approx_M v$ folgt $u \sim_L v$ (d.h. \approx_M verfeinert \sim_L).

Dann gilt auch $Index(\sim_L) \leq Index(\approx_M) \leq |Z|$ (und damit endlich).

Seien $u \approx_M v$ und $w \in \Sigma^*$. Dann gilt

$$\tilde{\delta}(z_0, uw) = \tilde{\delta}(\tilde{\delta}(z_0, u), w) = \tilde{\delta}(\tilde{\delta}(z_0, v), w) = \tilde{\delta}(z_0, vw)$$

und damit $uw \in L$ g.d.w. $vw \in L$. Da w beliebig war, zeigt dies $u \sim_L v$.

Beweis

2. Wir zeigen nun, dass wenn der Index von \sim_L endlich ist, dann ist L regulär.

Beweis

- Wir zeigen nun, dass wenn der Index von \sim_L endlich ist, dann ist L regulär.
Sei der Index von \sim_L endlich.

Der Satz von Myhill und Nerode

Beweis

- Wir zeigen nun, dass wenn der Index von \sim_L endlich ist, dann ist L regulär.

Sei der Index von \sim_L endlich.

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, [\varepsilon]_{\sim_L}, E)$ der Nerode-Automat. Wir zeigen $L(M) = L$.

Somit ist L regulär.

Beweis

2. Wir zeigen nun, dass wenn der Index von \sim_L endlich ist, dann ist L regulär.

Sei der Index von \sim_L endlich.

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, [\varepsilon]_{\sim_L}, E)$ der Nerode-Automat. Wir zeigen $L(M) = L$.

Somit ist L regulär.

$$w \in L(M)$$

Der Satz von Myhill und Nerode

Beweis

2. Wir zeigen nun, dass wenn der Index von \sim_L endlich ist, dann ist L regulär.

Sei der Index von \sim_L endlich.

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, [\varepsilon]_{\sim_L}, E)$ der Nerode-Automat. Wir zeigen $L(M) = L$.

Somit ist L regulär.

$w \in L(M)$
g.d.w. $\tilde{\delta}([\varepsilon]_{\sim_L}, w) \in E$

Der Satz von Myhill und Nerode

Beweis

2. Wir zeigen nun, dass wenn der Index von \sim_L endlich ist, dann ist L regulär.

Sei der Index von \sim_L endlich.

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, [\varepsilon]_{\sim_L}, E)$ der Nerode-Automat. Wir zeigen $L(M) = L$.

Somit ist L regulär.

$w \in L(M)$
g.d.w. $\tilde{\delta}([\varepsilon]_{\sim_L}, w) \in E$

g.d.w. $[w]_{\sim_L} \in E$

Der Satz von Myhill und Nerode

Beweis

2. Wir zeigen nun, dass wenn der Index von \sim_L endlich ist, dann ist L regulär.

Sei der Index von \sim_L endlich.

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, [\varepsilon]_{\sim_L}, E)$ der Nerode-Automat. Wir zeigen $L(M) = L$.

Somit ist L regulär.

$w \in L(M)$
g.d.w. $\tilde{\delta}([\varepsilon]_{\sim_L}, w) \in E$

g.d.w. $[w]_{\sim_L} \in E$

g.d.w. $w \in L$

□

Anwendung des Satzes von Myhill und Nerode

Da der Satz von Myhill und Nerode eine **hinreichende und notwendige** Bedingung für reguläre Sprachen liefert, kann man ihn verwenden, um

1. Regularität nachzuweisen: Zeige $Index(\sim_L)$ ist endlich.

2. Nichtregularität nachzuweisen: Zeige $Index(\sim_L)$ ist unendlich.

Anwendung des Satzes von Myhill und Nerode

Da der Satz von Myhill und Nerode eine **hinreichende und notwendige** Bedingung für reguläre Sprachen liefert, kann man ihn verwenden, um

1. Regularität nachzuweisen: Zeige $Index(\sim_L)$ ist endlich.

Oft einfacher:

- ▶ *Gib endlichen Automaten an, der L akzeptiert.*
- ▶ *Gib regulären Ausdruck an, der L erzeugt.*
- ▶ *Gib reguläre Grammatik an, die L erzeugt.*

2. Nichtregularität nachzuweisen: Zeige $Index(\sim_L)$ ist unendlich.

Anwendung des Satzes von Myhill und Nerode

Da der Satz von Myhill und Nerode eine **hinreichende und notwendige** Bedingung für reguläre Sprachen liefert, kann man ihn verwenden, um

1. Regularität nachzuweisen: Zeige $Index(\sim_L)$ ist endlich.

Oft einfacher:

- ▶ *Gib endlichen Automaten an, der L akzeptiert.*
- ▶ *Gib regulären Ausdruck an, der L erzeugt.*
- ▶ *Gib reguläre Grammatik an, die L erzeugt.*

2. Nichtregularität nachzuweisen: Zeige $Index(\sim_L)$ ist unendlich.

Wird insbesondere dann benutzt, wenn das Pumping-Lemma nicht funktioniert.

Wie zeigt man $\text{Index}(\sim_L) = \infty$?

Grundgedanke:

- ▶ Finde unendlich viele Äquivalenzklassen $[u_1]_{\sim_L}, [u_2]_{\sim_L}, \dots$, die paarweise verschieden sind ($[u_i]_{\sim_L} \neq [u_j]_{\sim_L}$ für $i \neq j$).

Wie zeigt man $\text{Index}(\sim_L) = \infty$?

Grundgedanke:

- ▶ Finde unendlich viele Äquivalenzklassen $[u_1]_{\sim_L}, [u_2]_{\sim_L}, \dots$, die paarweise verschieden sind ($[u_i]_{\sim_L} \neq [u_j]_{\sim_L}$ für $i \neq j$).

Rezept:

- ▶ Finde für $i = 1, 2, \dots$ Wörter u_i und w_i , sodass $u_i w_i \in L$ aber $u_j w_i \notin L$ für alle $i \neq j$.

Wie zeigt man $\text{Index}(\sim_L) = \infty$?

Grundgedanke:

- ▶ Finde unendlich viele Äquivalenzklassen $[u_1]_{\sim_L}, [u_2]_{\sim_L}, \dots$, die paarweise verschieden sind ($[u_i]_{\sim_L} \neq [u_j]_{\sim_L}$ für $i \neq j$).

Rezept:

- ▶ Finde für $i = 1, 2, \dots$ Wörter u_i und w_i , sodass $u_i w_i \in L$ aber $u_j w_i \notin L$ für alle $i \neq j$.

Dann sind $u_i \not\sim_L u_j$ für alle $i \neq j$.

Wie zeigt man $Index(\sim_L) = \infty$?

Grundgedanke:

- ▶ Finde unendlich viele Äquivalenzklassen $[u_1]_{\sim_L}, [u_2]_{\sim_L}, \dots$, die paarweise verschieden sind ($[u_i]_{\sim_L} \neq [u_j]_{\sim_L}$ für $i \neq j$).

Rezept:

- ▶ Finde für $i = 1, 2, \dots$ Wörter u_i und w_i , sodass $u_i w_i \in L$ aber $u_j w_i \notin L$ für alle $i \neq j$.

Dann sind $u_i \not\sim_L u_j$ für alle $i \neq j$.

Daher sind $[u_1]_{\sim_L}, [u_2]_{\sim_L}, \dots$ paarweise disjunkt.

Wie zeigt man $\text{Index}(\sim_L) = \infty$?

Grundgedanke:

- ▶ Finde unendlich viele Äquivalenzklassen $[u_1]_{\sim_L}, [u_2]_{\sim_L}, \dots$, die paarweise verschieden sind ($[u_i]_{\sim_L} \neq [u_j]_{\sim_L}$ für $i \neq j$).

Rezept:

- ▶ Finde für $i = 1, 2, \dots$ Wörter u_i und w_i , sodass $u_i w_i \in L$ aber $u_j w_i \notin L$ für alle $i \neq j$.

Dann sind $u_i \not\sim_L u_j$ für alle $i \neq j$.

Daher sind $[u_1]_{\sim_L}, [u_2]_{\sim_L}, \dots$ paarweise disjunkt.

Beachte: Es ist hierfür **nicht** notwendig, alle Äquivalenzklassen der disjunkten Zerlegung von Σ^* zu finden.

Nichtregularität zeigen mit dem Satz von Myhill und Nerode

Satz

Die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Für $u_i = a^i b$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt: $[u_i]_{\sim_L}$ besteht aus allen Wörtern, denen noch $i - 1$ b 's fehlen, um in L enthalten zu sein.

Nichtregularität zeigen mit dem Satz von Myhill und Nerode

Satz

Die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Für $u_i = a^i b$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt: $[u_i]_{\sim_L}$ besteht aus allen Wörtern, denen noch $i - 1$ b 's fehlen, um in L enthalten zu sein. D.h.

$$\begin{aligned}[u_1]_{\sim_L} &= \{ab, a^2b^2, \dots\} = L \\ [u_2]_{\sim_L} &= \{a^2b, a^3b^2, a^4b^3, \dots\} \\ [u_3]_{\sim_L} &= \{a^3b, a^4b^2, a^5b^3, \dots\} \\ &\vdots\end{aligned}$$

Nichtregularität zeigen mit dem Satz von Myhill und Nerode

Satz

Die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Für $u_i = a^i b$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt: $[u_i]_{\sim_L}$ besteht aus allen Wörtern, denen noch $i - 1$ b 's fehlen, um in L enthalten zu sein. D.h.

$$\begin{aligned}[u_1]_{\sim_L} &= \{ab, a^2b^2, \dots\} = L \\ [u_2]_{\sim_L} &= \{a^2b, a^3b^2, a^4b^3, \dots\} \\ [u_3]_{\sim_L} &= \{a^3b, a^4b^2, a^5b^3, \dots\} \\ &\vdots\end{aligned}$$

Sei $w_i = b^{i-1}$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$.

Nichtregularität zeigen mit dem Satz von Myhill und Nerode

Satz

Die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Für $u_i = a^i b$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt: $[u_i]_{\sim_L}$ besteht aus allen Wörtern, denen noch $i - 1$ b 's fehlen, um in L enthalten zu sein. D.h.

$$\begin{aligned}[u_1]_{\sim_L} &= \{ab, a^2b^2, \dots\} = L \\ [u_2]_{\sim_L} &= \{a^2b, a^3b^2, a^4b^3, \dots\} \\ [u_3]_{\sim_L} &= \{a^3b, a^4b^2, a^5b^3, \dots\} \\ &\vdots\end{aligned}$$

Sei $w_i = b^{i-1}$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$.

$u_i w_i = a^i b^i \in L$, aber $u_j w_i = a^j b^i \notin L$ für $i \neq j$.

Nichtregularität zeigen mit dem Satz von Myhill und Nerode

Satz

Die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Für $u_i = a^i b$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt: $[u_i]_{\sim_L}$ besteht aus allen Wörtern, denen noch $i - 1$ b 's fehlen, um in L enthalten zu sein. D.h.

$$\begin{aligned}[u_1]_{\sim_L} &= \{ab, a^2b^2, \dots\} = L \\ [u_2]_{\sim_L} &= \{a^2b, a^3b^2, a^4b^3, \dots\} \\ [u_3]_{\sim_L} &= \{a^3b, a^4b^2, a^5b^3, \dots\} \\ &\vdots\end{aligned}$$

Sei $w_i = b^{i-1}$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$.

$u_i w_i = a^i b^i \in L$, aber $u_j w_i = a^j b^i \notin L$ für $i \neq j$.

Daher gilt $[u_i]_{\sim_L} \neq [u_j]_{\sim_L}$ für $i \neq j$ und $\text{Index}(\sim_L) = \infty$.

Nichtregularität zeigen mit dem Satz von Myhill und Nerode

Satz

Die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Für $u_i = a^i b$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt: $[u_i]_{\sim_L}$ besteht aus allen Wörtern, denen noch $i - 1$ b 's fehlen, um in L enthalten zu sein. D.h.

$$\begin{aligned}[u_1]_{\sim_L} &= \{ab, a^2b^2, \dots\} = L \\ [u_2]_{\sim_L} &= \{a^2b, a^3b^2, a^4b^3, \dots\} \\ [u_3]_{\sim_L} &= \{a^3b, a^4b^2, a^5b^3, \dots\} \\ &\vdots\end{aligned}$$

Sei $w_i = b^{i-1}$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$.

$u_i w_i = a^i b^i \in L$, aber $u_j w_i = a^j b^i \notin L$ für $i \neq j$.

Daher gilt $[u_i]_{\sim_L} \neq [u_j]_{\sim_L}$ für $i \neq j$ und $\text{Index}(\sim_L) = \infty$.

Mit dem Satz von Myhill und Nerode folgt, dass L nicht regulär ist. □

Eine nicht reguläre Sprache, die die Pumping-Eigenschaft hat

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^k c^k \mid j, k \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist nicht regulär.

Eine nicht reguläre Sprache, die die Pumping-Eigenschaft hat

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^k c^k \mid j, k \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Sei $u_i = ab^i c$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$.

Eine nicht reguläre Sprache, die die Pumping-Eigenschaft hat

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^k c^k \mid j, k \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Sei $u_i = ab^i c$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$.

Sei $w_i = c^{i-1}$.

Eine nicht reguläre Sprache, die die Pumping-Eigenschaft hat

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^k c^k \mid j, k \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Sei $u_i = ab^i c$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$.

Sei $w_i = c^{i-1}$.

$u_i w_i = ab^i c^i \in L$, aber $u_j w_i = ab^j c^i \notin L$ für $i \neq j$.

Eine nicht reguläre Sprache, die die Pumping-Eigenschaft hat

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^k c^k \mid j, k \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Sei $u_i = ab^i c$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$.

Sei $w_i = c^{i-1}$.

$u_i w_i = ab^i c^i \in L$, aber $u_j w_i = ab^j c^i \notin L$ für $i \neq j$.

Daher sind alle $[u_i]_{\sim_L}$ disjunkt und $\text{Index}(\sim_L) = \infty$.

Eine nicht reguläre Sprache, die die Pumping-Eigenschaft hat

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^k c^k \mid j, k \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Sei $u_i = ab^i c$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$.

Sei $w_i = c^{i-1}$.

$u_i w_i = ab^i c^i \in L$, aber $u_j w_i = ab^j c^i \notin L$ für $i \neq j$.

Daher sind alle $[u_i]_{\sim_L}$ disjunkt und $\text{Index}(\sim_L) = \infty$.

Mit dem Satz von Myhill und Nerode folgt, dass L nicht regulär ist. □

Regularität zeigen mit dem Satz von Myhill und Nerode

Sei $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b\}$.

Die disjunkten Äquivalenzklassen von \sim_L sind:

- ▶ $[\varepsilon]_{\sim_L} = \{\varepsilon\}$
- ▶ $[a]_{\sim_L} = \{a, ab, abb, abbb, \dots\}$
- ▶ $[aa]_{\sim_L} = \{aa u \mid u \in \Sigma^*\}$
 $\cup \{bu \mid u \in \Sigma^*\}$
 $\cup \{abuav \mid u, v \in \Sigma^*\}$

Regularität zeigen mit dem Satz von Myhill und Nerode

Sei $L = \{ab^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Sprache über $\Sigma = \{a, b\}$.

Die disjunkten Äquivalenzklassen von \sim_L sind:

- ▶ $[\varepsilon]_{\sim_L} = \{\varepsilon\}$
- ▶ $[a]_{\sim_L} = \{a, ab, abb, abbb, \dots\}$
- ▶ $[aa]_{\sim_L} = \{aa u \mid u \in \Sigma^*\}$
 $\cup \{bu \mid u \in \Sigma^*\}$
 $\cup \{abuav \mid u, v \in \Sigma^*\}$

Daher folgt $\text{Index}(\sim_L) = 3$ und mit dem Satz von Myhill und Nerode folgt, dass L regulär ist.

Satz

Der Nerode-Automat zu einer regulären Sprache L ist ein **minimaler DFA**, d.h. jeder DFA M' , mit $L(M') = L$ hat mindestens so viele Zustände wie der **Nerode-Automat**. Zudem sind alle minimalen DFAs bis auf Umbenennung von Zuständen identisch.

Beweis

1. Wir zeigen zuerst Minimalität.

Satz

Der Nerode-Automat zu einer regulären Sprache L ist ein **minimaler DFA**, d.h. jeder DFA M' , mit $L(M') = L$ hat mindestens so viele Zustände wie der **Nerode-Automat**. Zudem sind alle minimalen DFAs bis auf Umbenennung von Zuständen identisch.

Beweis

1. Wir zeigen zuerst Minimalität.

Seien $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ der Nerode-Automat zur Sprache L und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z'_0, E')$ ein beliebiger DFA mit $L(M') = L$.

Satz

Der Nerode-Automat zu einer regulären Sprache L ist ein **minimaler DFA**, d.h. jeder DFA M' , mit $L(M') = L$ hat mindestens so viele Zustände wie der **Nerode-Automat**. Zudem sind alle minimalen DFAs bis auf Umbenennung von Zuständen identisch.

Beweis

1. Wir zeigen zuerst Minimalität.

Seien $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ der Nerode-Automat zur Sprache L und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z'_0, E')$ ein beliebiger DFA mit $L(M') = L$.

Wir zeigen $|Z'| \geq |Z|$.

Satz

Der Nerode-Automat zu einer regulären Sprache L ist ein **minimaler DFA**, d.h. jeder DFA M' , mit $L(M') = L$ hat mindestens so viele Zustände wie der **Nerode-Automat**. Zudem sind alle minimalen DFAs bis auf Umbenennung von Zuständen identisch.

Beweis

1. Wir zeigen zuerst Minimalität.

Seien $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ der Nerode-Automat zur Sprache L und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z'_0, E')$ ein beliebiger DFA mit $L(M') = L$.

Wir zeigen $|Z'| \geq |Z|$.

Per Definition des Nerode-Automaten: $\approx_M = \sim_L$. Zudem zeigt der Beweis des Satzes von Myhill und Nerode: $\approx_{M'}$ ist eine Verfeinerung von \sim_L ($\approx_{M'} \subseteq \sim_L$).

Satz

Der Nerode-Automat zu einer regulären Sprache L ist ein **minimaler DFA**, d.h. jeder DFA M' , mit $L(M') = L$ hat mindestens so viele Zustände wie der **Nerode-Automat**. Zudem sind alle minimalen DFAs bis auf Umbenennung von Zuständen identisch.

Beweis

1. Wir zeigen zuerst Minimalität.

Seien $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ der Nerode-Automat zur Sprache L und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z'_0, E')$ ein beliebiger DFA mit $L(M') = L$.

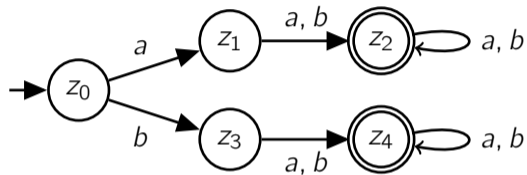
Wir zeigen $|Z'| \geq |Z|$.

Per Definition des Nerode-Automaten: $\approx_M = \sim_L$. Zudem zeigt der Beweis des Satzes von Myhill und Nerode: $\approx_{M'}$ ist eine Verfeinerung von \sim_L ($\approx_{M'} \subseteq \sim_L$).

Daher ist $Index(\approx_{M'}) \geq Index(\approx_M)$ und daher auch $|Z'| \geq Index(\approx_{M'}) \geq Index(\approx_M) = Index(\sim_L) = |Z|$.

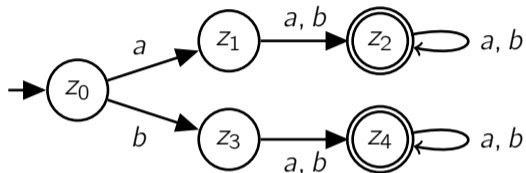
Beispiel für Minimalität

Beliebiger DFA M :

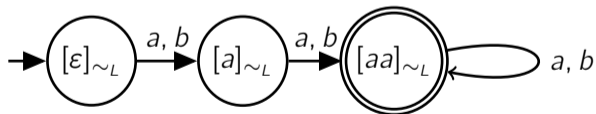


Beispiel für Minimalität

Beliebiger DFA M :



Nerode-Automat M' :



Beweis (Fortsetzung)

2. Wir zeigen nun, dass alle minimalen DFAs bis auf Umbenennung von Zuständen identisch sind.

Beweis (Fortsetzung)

- Wir zeigen nun, dass alle minimalen DFAs bis auf Umbenennung von Zuständen identisch sind.

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ der Nerode-Automat zur Sprache L und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z'_0, E')$ ein beliebiger minimaler DFA mit $L(M') = L$.

Beweis (Fortsetzung)

- Wir zeigen nun, dass alle minimalen DFAs bis auf Umbenennung von Zuständen identisch sind.

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ der Nerode-Automat zur Sprache L und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z'_0, E')$ ein beliebiger minimaler DFA mit $L(M') = L$.

Minimalität impliziert $|Z'| = |Z|$.

Beweis (Fortsetzung)

- Wir zeigen nun, dass alle minimalen DFAs bis auf Umbenennung von Zuständen identisch sind.

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ der Nerode-Automat zur Sprache L und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z'_0, E')$ ein beliebiger minimaler DFA mit $L(M') = L$.

Minimalität impliziert $|Z'| = |Z|$.

Da $\approx_{M'} \subseteq \sim_L$ gilt, gilt entweder $\approx_{M'} \subset \sim_L$ oder $\approx_{M'} = \sim_L$. Im ersten Fall hätten wir $|Z'| \geq \text{Index}(\approx_{M'}) > \text{Index}(\sim_L) = |Z|$. Widerspruch.

Daher $\approx_{M'} = \sim_L$.

Beweis (Fortsetzung)

- Wir zeigen nun, dass alle minimalen DFAs bis auf Umbenennung von Zuständen identisch sind.

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ der Nerode-Automat zur Sprache L und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z'_0, E')$ ein beliebiger minimaler DFA mit $L(M') = L$.

Minimalität impliziert $|Z'| = |Z|$.

Da $\approx_{M'} \subseteq \sim_L$ gilt, gilt entweder $\approx_{M'} \subset \sim_L$ oder $\approx_{M'} = \sim_L$. Im ersten Fall hätten wir $|Z'| \geq \text{Index}(\approx_{M'}) > \text{Index}(\sim_L) = |Z|$. Widerspruch.

Daher $\approx_{M'} = \sim_L$.

Da $\approx_{M'} = \sim_L = \approx_M$ gilt, folgt dass M und M' strukturell identisch sind. \square

Minimale NFAs

Wir haben gezeigt, dass alle **minimalen DFAs** bis auf Umbenennung **identisch** sind.

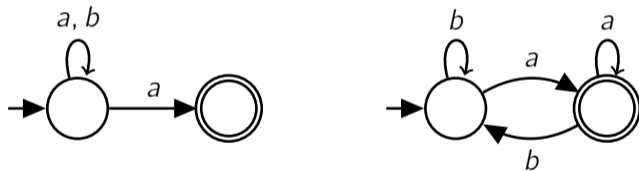
Minimale NFAs

Wir haben gezeigt, dass alle **minimalen DFAs** bis auf Umbenennung **identisch** sind.
Für **NFAs** gilt das im Allgemeinen **nicht**.

Minimale NFAs

Wir haben gezeigt, dass alle **minimalen DFAs** bis auf Umbenennung **identisch** sind.
Für **NFAs** gilt das im Allgemeinen **nicht**.

Gegenbeispiel:



Beide NFAs erkennen $\{ua \mid u \in \{a, b\}^*\}$ und haben eine minimale Zustandsanzahl,
sind aber **strukturell verschieden**.

Wiederholung: Äquivalenzklassenautomat

Definition

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA.

Wir nennen zwei Zustände $z, z' \in Z$ äquivalent und schreiben $z \equiv_M z'$ (alternativ $z \equiv z'$), falls gilt: $\tilde{\delta}(z, w) \in E$ g.d.w. $\tilde{\delta}(z', w) \in E$ für alle $w \in \Sigma^*$.

Der Äquivalenzklassenautomat zu M ist der DFA $M' = (Z', \Sigma, \delta', z'_0, E')$ mit

$$Z' := \{[z]_{\equiv} \mid z \in Z\}$$

$$z'_0 := [z_0]_{\equiv}$$

$$E' := \{[z]_{\equiv} \mid z \in E\}$$

$$\delta'([z]_{\equiv}, a) := [\delta(z, a)]_{\equiv}$$

Informell: Zwei Zustände sind äquivalent, wenn sie die gleiche „Sprache“ darstellen.

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Satz

Seien $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z'_0, E')$ der Äquivalenzklassenautomat zu M . Dann gilt

1. $L(M') = L(M)$.
2. Falls alle Zustände in Z von z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal, d.h. jeder DFA M'' mit $L(M'') = L(M')$ hat mindestens so viele Zustände wie M' .

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Satz

Seien $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z'_0, E')$ der Äquivalenzklassenautomat zu M . Dann gilt

1. $L(M') = L(M)$.
2. Falls alle Zustände in Z von z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal, d.h. jeder DFA M'' mit $L(M'') = L(M')$ hat mindestens so viele Zustände wie M' .

Beweis (Fortsetzung)

1. Wurde in früherer Vorlesung gezeigt.

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Beweis (Fortsetzung)

- Wir müssen zeigen, dass falls alle Zustände in Z von z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal, d.h. jeder DFA M'' mit $L(M'') = L(M')$ hat mindestens so viele Zustände wie M' .

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Beweis (Fortsetzung)

- Wir müssen zeigen, dass falls alle Zustände in Z von z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal, d.h. jeder DFA M'' mit $L(M'') = L(M')$ hat mindestens so viele Zustände wie M' .

Sei $L = L(M') = L(M)$.

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Beweis (Fortsetzung)

- Wir müssen zeigen, dass falls alle Zustände in Z von z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal, d.h. jeder DFA M'' mit $L(M'') = L(M')$ hat mindestens so viele Zustände wie M' .

Sei $L = L(M') = L(M)$.

Da alle $z \in Z$ erreichbar sind, sind alle $z' \in Z'$ erreichbar.

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Beweis (Fortsetzung)

- Wir müssen zeigen, dass falls alle Zustände in Z von z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal, d.h. jeder DFA M'' mit $L(M'') = L(M')$ hat mindestens so viele Zustände wie M' .

Sei $L = L(M') = L(M)$.

Da alle $z \in Z$ erreichbar sind, sind alle $z' \in Z'$ erreichbar.

Für Minimalität genügt es zu zeigen, dass M' nicht mehr Zustände hat als der Nerode-Automat: $|Z'| \leq \text{Index}(\sim_L)$.

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Beweis (Fortsetzung)

- Wir müssen zeigen, dass falls alle Zustände in Z von z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal, d.h. jeder DFA M'' mit $L(M'') = L(M')$ hat mindestens so viele Zustände wie M' .

Sei $L = L(M') = L(M)$.

Da alle $z \in Z$ erreichbar sind, sind alle $z' \in Z'$ erreichbar.

Für Minimalität genügt es zu zeigen, dass M' nicht mehr Zustände hat als der Nerode-Automat: $|Z'| \leq \text{Index}(\sim_L)$.

Wir zeigen gleich für jede Äquivalenzklasse $[v]_{\sim_L}$:

Für alle $u \in [v]_{\sim_L}$ ist $\tilde{\delta}(z'_0, u)$ derselbe Zustand.

Dann gibt es nicht mehr als $\text{Index}(\sim_L)$ erreichbare Zustände.

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Beweis (Fortsetzung)

- Wir müssen zeigen, dass falls alle Zustände in Z von z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal, d.h. jeder DFA M'' mit $L(M'') = L(M')$ hat mindestens so viele Zustände wie M' .

Sei $L = L(M') = L(M)$.

Da alle $z \in Z$ erreichbar sind, sind alle $z' \in Z'$ erreichbar.

Für Minimalität genügt es zu zeigen, dass M' nicht mehr Zustände hat als der Nerode-Automat: $|Z'| \leq \text{Index}(\sim_L)$.

Wir zeigen gleich für jede Äquivalenzklasse $[v]_{\sim_L}$:

Für alle $u \in [v]_{\sim_L}$ ist $\tilde{\delta}(z'_0, u)$ derselbe Zustand.

Dann gibt es nicht mehr als $\text{Index}(\sim_L)$ erreichbare Zustände.

Da alle $z' \in Z'$ erreichbar sind, gilt damit $|Z'| \leq \text{Index}(\sim_L)$.

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Beweis (Fortsetzung)

Seien $u, u' \in [v]_{\sim_L}$, d.h. $u \sim_L u'$. Dann gilt

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Beweis (Fortsetzung)

Seien $u, u' \in [v]_{\sim_L}$, d.h. $u \sim_L u'$. Dann gilt

$uw \in L$ g.d.w. $u'w \in L$ für jedes $w \in \Sigma^*$

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Beweis (Fortsetzung)

Seien $u, u' \in [v]_{\sim_L}$, d.h. $u \sim_L u'$. Dann gilt

$uw \in L$ g.d.w. $u'w \in L$ für jedes $w \in \Sigma^*$

woraus folgt: $\tilde{\delta}'(z'_0, uw) \in E'$ g.d.w. $\tilde{\delta}'(z'_0, u'w) \in E'$ für jedes $w \in \Sigma^*$

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Beweis (Fortsetzung)

Seien $u, u' \in [v]_{\sim_L}$, d.h. $u \sim_L u'$. Dann gilt

$uw \in L$ g.d.w. $u'w \in L$ für jedes $w \in \Sigma^*$

woraus folgt: $\tilde{\delta}'(z'_0, uw) \in E'$ g.d.w. $\tilde{\delta}'(z'_0, u'w) \in E'$ für jedes $w \in \Sigma^*$

woraus folgt: $\tilde{\delta}'(\tilde{\delta}'(z'_0, u), w) \in E'$ g.d.w. $\tilde{\delta}'(\tilde{\delta}'(z'_0, u'), w) \in E'$ für jedes $w \in \Sigma^*$

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Beweis (Fortsetzung)

Seien $u, u' \in [v]_{\sim_L}$, d.h. $u \sim_L u'$. Dann gilt

$uw \in L$ g.d.w. $u'w \in L$ für jedes $w \in \Sigma^*$

woraus folgt: $\tilde{\delta}'(z'_0, uw) \in E'$ g.d.w. $\tilde{\delta}'(z'_0, u'w) \in E'$ für jedes $w \in \Sigma^*$

woraus folgt: $\tilde{\delta}'(\tilde{\delta}'(z'_0, u), w) \in E'$ g.d.w. $\tilde{\delta}'(\tilde{\delta}'(z'_0, u'), w) \in E'$ für jedes $w \in \Sigma^*$

woraus folgt: $\tilde{\delta}'(z'_0, u) = \tilde{\delta}'(z'_0, u')$ □