

## 4b

# Eigenschaften von regulären Sprachen

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für  
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 4. April 2024

Basiert auf Folien von PD Dr. David Sabel



## Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich **Vereinigung**, **Produkt** und **Kleeneschem Abschluss**. D.h. wenn  $L_1, L_2$  regulär sind, dann sind  $L_1 \cup L_2$ ,  $L_1L_2$  und  $L_1^*$  regulär.

## Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich **Vereinigung**, **Produkt** und **Kleeneschem Abschluss**. D.h. wenn  $L_1, L_2$  regulär sind, dann sind  $L_1 \cup L_2$ ,  $L_1 L_2$  und  $L_1^*$  regulär.

**Beweis** Vereinigung, Produkt und Kleenescher Abschluss werden durch reguläre Ausdrücke erzeugt und sind daher reguläre Sprachen.

## Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich **Vereinigung**, **Produkt** und **Kleeneschem Abschluss**. D.h. wenn  $L_1, L_2$  regulär sind, dann sind  $L_1 \cup L_2$ ,  $L_1 L_2$  und  $L_1^*$  regulär.

**Beweis** Vereinigung, Produkt und Kleenescher Abschluss werden durch reguläre Ausdrücke erzeugt und sind daher reguläre Sprachen.

Seien reguläre Ausdrücke  $\alpha_1, \alpha_2$  mit  $L(\alpha_i) = L_i$  für  $i \in \{1, 2\}$ .

## Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich **Vereinigung**, **Produkt** und **Kleeneschem Abschluss**. D.h. wenn  $L_1, L_2$  regulär sind, dann sind  $L_1 \cup L_2$ ,  $L_1 L_2$  und  $L_1^*$  regulär.

**Beweis** Vereinigung, Produkt und Kleenescher Abschluss werden durch reguläre Ausdrücke erzeugt und sind daher reguläre Sprachen.

Seien reguläre Ausdrücke  $\alpha_1, \alpha_2$  mit  $L(\alpha_i) = L_i$  für  $i \in \{1, 2\}$ .

- ▶  $(\alpha_1 | \alpha_2)$  erzeugt  $L(\alpha_1 | \alpha_2) = L(\alpha_1) \cup L(\alpha_2) = L_1 \cup L_2$ .
- ▶  $\alpha_1 \alpha_2$  erzeugt  $L(\alpha_1 \alpha_2) = L(\alpha_1) L(\alpha_2) = L_1 L_2$ .
- ▶  $(\alpha_1)^*$  erzeugt  $L(\alpha_1^*) = L(\alpha_1)^* = L_1^*$ . □

## Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich **Komplementbildung**. D.h. wenn  $L$  regulär ist, dann ist das Komplement  $\bar{L}$  regulär.

## Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich **Komplementbildung**. D.h. wenn  $L$  regulär ist, dann ist das Komplement  $\bar{L}$  regulär.

**Beweis** Sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$  ein DFA, der  $L$  akzeptiert.

## Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich **Komplementbildung**. D.h. wenn  $L$  regulär ist, dann ist das Komplement  $\bar{L}$  regulär.

**Beweis** Sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$  ein DFA, der  $L$  akzeptiert.

Dann akzeptiert  $\bar{M} = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z \setminus E)$  die Sprache  $\bar{L}$ :

Offensichtlich gilt  $\tilde{\delta}(z_0, w) \in Z \setminus E$  g.d.w.  $\tilde{\delta}(z_0, w) \notin E$ .



## Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich **Komplementbildung**. D.h. wenn  $L$  regulär ist, dann ist das Komplement  $\bar{L}$  regulär.

**Beweis** Sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$  ein DFA, der  $L$  akzeptiert.

Dann akzeptiert  $\bar{M} = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z \setminus E)$  die Sprache  $\bar{L}$ :

Offensichtlich gilt  $\tilde{\delta}(z_0, w) \in Z \setminus E$  g.d.w.  $\tilde{\delta}(z_0, w) \notin E$ .

Daher ist  $\bar{L}$  regulär. □

## Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich **Schnitt**. D.h. wenn  $L_1, L_2$  regulär sind, dann ist  $L_1 \cap L_2$  regulär.

## Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich **Schnitt**. D.h. wenn  $L_1, L_2$  regulär sind, dann ist  $L_1 \cap L_2$  regulär.

**Beweis** Dies folgt aus  $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$  und da reguläre Sprachen abgeschlossen bezüglich Vereinigung und Komplementbildung sind.  $\square$

## Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich **Schnitt**. D.h. wenn  $L_1, L_2$  regulär sind, dann ist  $L_1 \cap L_2$  regulär.

## Alternativer Beweis

Seien  $M_1 = (Z_1, \Sigma, \delta_1, z_{01}, E_1)$  und  $M_2 = (Z_2, \Sigma, \delta_2, z_{02}, E_2)$  DFAs, die  $L_1 = L(M_1)$  und  $L_2 = L(M_2)$  akzeptieren.

Der **Produktautomat** von  $M_1$  und  $M_2$  ist der DFA

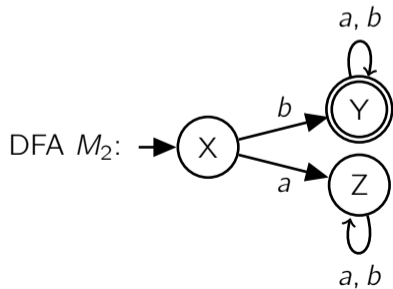
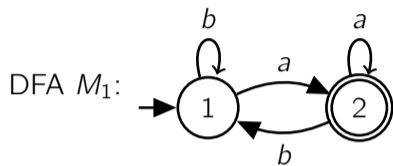
$M_1 \times M_2 = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \delta, (z_{01}, z_{02}), E_1 \times E_2)$  mit

$$\delta((z_1, z_2), a) := (\delta_1(z_1, a), \delta_2(z_2, a)) \quad \text{für alle } a \in \Sigma \text{ und } (z_1, z_2) \in Z_1 \times Z_2$$

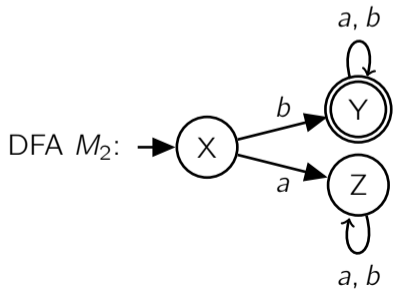
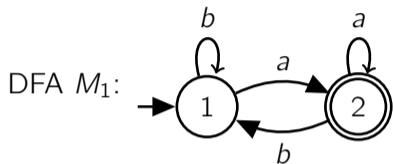
$M$  akzeptiert  $L_1 \cap L_2$ , denn es gilt:

$\tilde{\delta}((z_{01}, z_{02}), w) \in E_1 \times E_2$  g.d.w.  $\tilde{\delta}_1(z_{01}, w) \in E_1$  und  $\tilde{\delta}_2(z_{02}, w) \in E_2$ . □

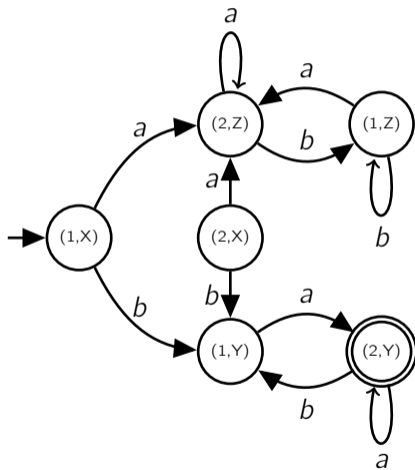
# Beispiel für den Produktautomaten



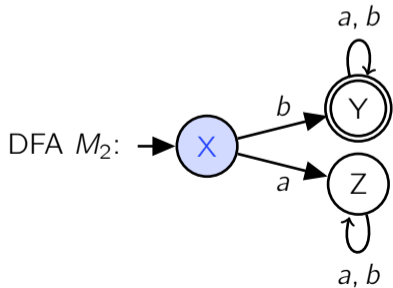
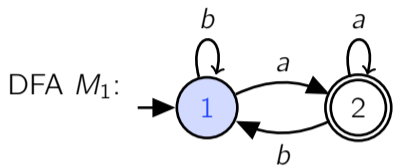
# Beispiel für den Produktautomaten



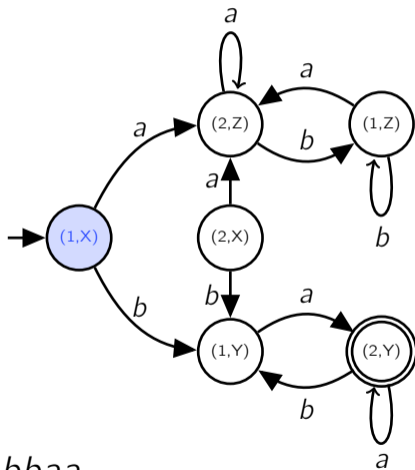
Produktautomat  $M_1 \times M_2$ :



# Beispiel für den Produktautomaten

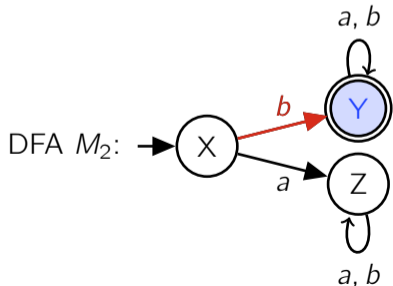
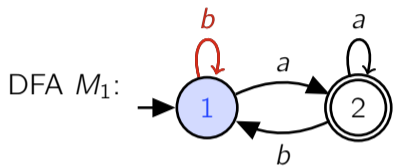


Produktautomat  $M_1 \times M_2$ :

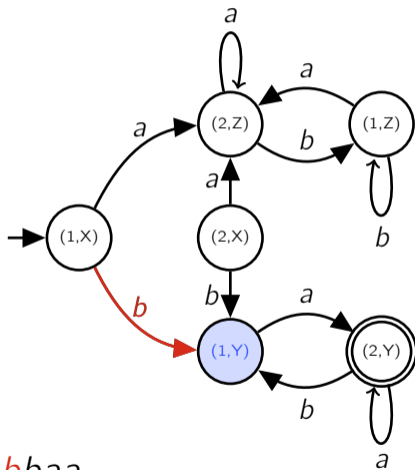


Wort: *bbaa*

# Beispiel für den Produktautomaten



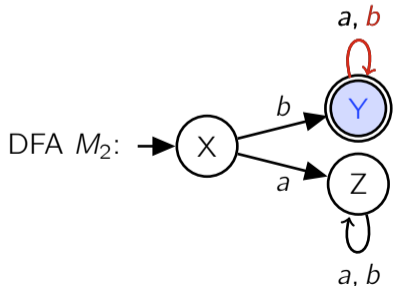
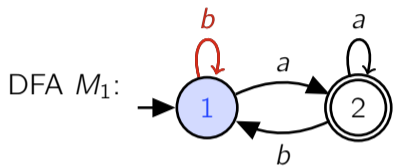
Produktautomat  $M_1 \times M_2$ :



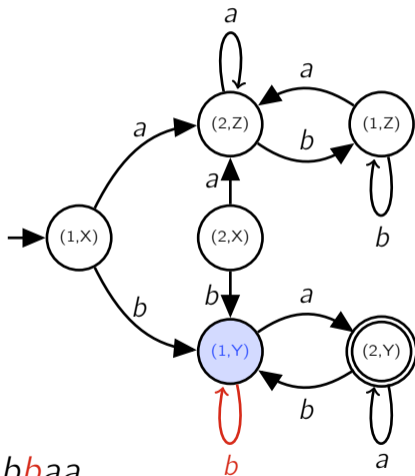
Wort: *bbaa*



# Beispiel für den Produktautomaten

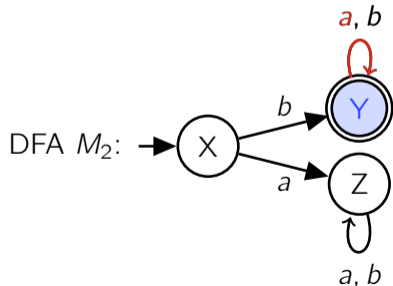
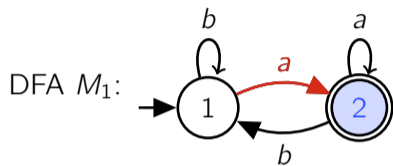


Produktautomat  $M_1 \times M_2$ :

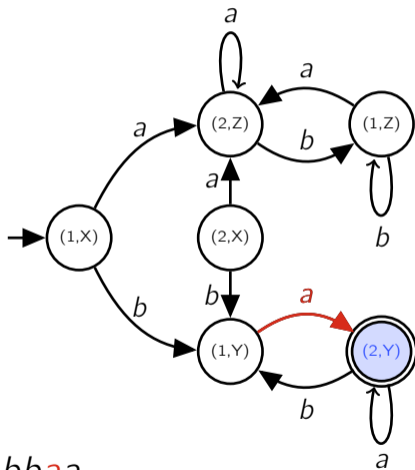


Wort: *bbaa*

# Beispiel für den Produktautomaten

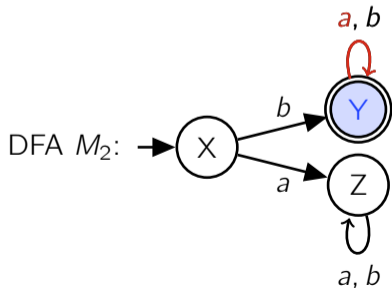
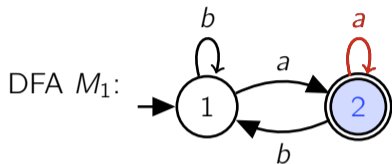


Produktautomat  $M_1 \times M_2$ :

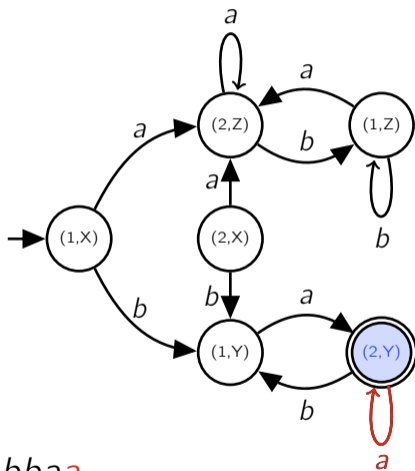


Wort: *bb****aa***

# Beispiel für den Produktautomaten

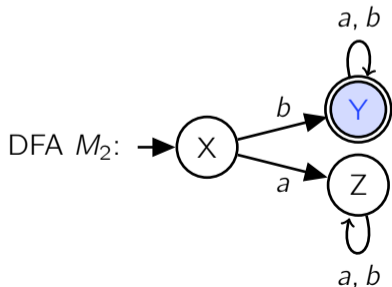
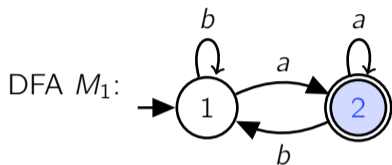


Produktautomat  $M_1 \times M_2$ :

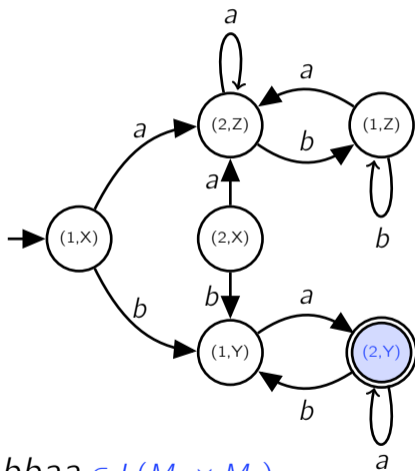


Wort: *bbba*

# Beispiel für den Produktautomaten



Produktautomat  $M_1 \times M_2$ :



Wort:  $bbaa \in L(M_1 \times M_2)$

## Theorem (Abschlusseigenschaften der regulären Sprachen)

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich **Vereinigung**, **Schnitt**, **Komplementbildung**, **Produkt** und **Kleeneschem Abschluss**.

# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

---

Anleitung zum Widerlegen der Regularität von  $L$  mit Abschlusseigenschaften:

1. Nehme an, dass  $L$  regulär ist.
2. Operiere auf  $L$  unter Erhaltung der Regularität:  
vereinige, schneide, komplementiere, multipliziere  $L$  mit bekannt regulärer Sprache, bilde Kleeneschen Abschluss.
3. Kommt dabei eine bekannt **nicht reguläre** Sprache heraus,  
dann hat man einen **Widerspruch** und die Annahme war falsch.  
Daher ist  $L$  dann nicht regulär.

# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

---

## Satz

Die Sprache  $L = \{a^n \mid n \text{ ist keine Primzahl}\}$  ist nicht regulär.

# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

---

## Satz

Die Sprache  $L = \{a^n \mid n \text{ ist keine Primzahl}\}$  ist nicht regulär.

**Beweis** Durch Widerspruch. Wir nehmen an,  $L$  ist regulär.



# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

---

## Satz

Die Sprache  $L = \{a^n \mid n \text{ ist keine Primzahl}\}$  ist nicht regulär.

**Beweis** Durch Widerspruch. Wir nehmen an,  $L$  ist regulär.

Dann ist  $\bar{L}$  auch regulär.

# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

## Satz

Die Sprache  $L = \{a^n \mid n \text{ ist keine Primzahl}\}$  ist nicht regulär.

**Beweis** Durch Widerspruch. Wir nehmen an,  $L$  ist regulär.

Dann ist  $\bar{L}$  auch regulär.

$\bar{L} = \{a\}^* \setminus L = \{a^n \mid n \text{ ist eine Primzahl}\}$  ist aber nicht regulär (bereits gezeigt).

Widerspruch. □

# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

---

## Satz

Die Sprache  $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$  ist nicht regulär.

# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

---

## Satz

Die Sprache  $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$  ist nicht regulär.

**Beweis** Durch Widerspruch. Wir nehmen an,  $L$  ist regulär.

# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

## Satz

Die Sprache  $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$  ist nicht regulär.

**Beweis** Durch Widerspruch. Wir nehmen an,  $L$  ist regulär.

Die Sprache  $L' = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$  ist regulär, da der reguläre Ausdruck  $a^* b^*$  sie erzeugt.

# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

## Satz

Die Sprache  $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$  ist nicht regulär.

**Beweis** Durch Widerspruch. Wir nehmen an,  $L$  ist regulär.

Die Sprache  $L' = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$  ist regulär, da der reguläre Ausdruck  $a^* b^*$  sie erzeugt.

Da  $L$  und  $L'$  regulär sind, ist auch  $L \cap L'$  regulär.

# Nichtregularität zeigen mit Abschlusseigenschaften

## Satz

Die Sprache  $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$  ist nicht regulär.

**Beweis** Durch Widerspruch. Wir nehmen an,  $L$  ist regulär.

Die Sprache  $L' = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$  ist regulär, da der reguläre Ausdruck  $a^* b^*$  sie erzeugt.

Da  $L$  und  $L'$  regulär sind, ist auch  $L \cap L'$  regulär.

$L \cap L' = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$  ist aber nicht regulär (bereits gezeigt). Widerspruch. □

# Wortproblem für reguläre Grammatiken

---

## Definition

Das **Wortproblem** für Typ  $i$ -Grammatiken ist die Frage, ob für eine gegebene Typ  $i$ -Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  und ein Wort  $w \in \Sigma^*$   $w \in L(G)$  gilt oder nicht.



# Wortproblem für reguläre Grammatiken

---

## Definition

Das **Wortproblem** für Typ  $i$ -Grammatiken ist die Frage, ob für eine gegebene Typ  $i$ -Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  und ein Wort  $w \in \Sigma^*$   $w \in L(G)$  gilt oder nicht.

## Satz

Das Wortproblem für reguläre Grammatiken ist entscheidbar:  
Es gibt einen Algorithmus, der bei Eingabe von regulärer Grammatik  $G$  und Wort  $w$  nach endlicher Zeit entscheidet, ob  $w \in L(G)$  gilt oder nicht.

# Wortproblem für reguläre Grammatiken

## Definition

Das **Wortproblem** für Typ  $i$ -Grammatiken ist die Frage, ob für eine gegebene Typ  $i$ -Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  und ein Wort  $w \in \Sigma^*$   $w \in L(G)$  gilt oder nicht.

## Satz

Das Wortproblem für reguläre Grammatiken ist entscheidbar:  
Es gibt einen Algorithmus, der bei Eingabe von regulärer Grammatik  $G$  und Wort  $w$  nach endlicher Zeit entscheidet, ob  $w \in L(G)$  gilt oder nicht.

**Beweis** Sei  $G$  eine reguläre Grammatik und sei  $M$  ein DFA mit  $L(M) = L(G)$ .  
Für  $M$  ist das Wortproblem in Linearzeit in der Länge des Wortes lösbar, denn die Berechnung von  $\tilde{\delta}(z_0, w)$  braucht für einen DFA nur  $|w|$  Schritte. □

# Leerheitsproblem für reguläre Grammatiken

---

## **Satz**

Das Leerheitsproblem für reguläre Grammatiken ist entscheidbar.

# Leerheitsproblem für reguläre Grammatiken

---

## Satz

Das Leerheitsproblem für reguläre Grammatiken ist entscheidbar.

**Beweis** Sei  $G$  eine reguläre Grammatik und sei  $M$  ein DFA mit  $L(M) = L(G)$ .

# Leerheitsproblem für reguläre Grammatiken

## Satz

Das Leerheitsproblem für reguläre Grammatiken ist entscheidbar.

**Beweis** Sei  $G$  eine reguläre Grammatik und sei  $M$  ein DFA mit  $L(M) = L(G)$ .

Dann gilt  $L(M) = \emptyset$  g.d.w. es keinen Pfad vom Startzustand zu einem Endzustand in  $M$  gibt.

# Leerheitsproblem für reguläre Grammatiken

## Satz

Das Leerheitsproblem für reguläre Grammatiken ist entscheidbar.

**Beweis** Sei  $G$  eine reguläre Grammatik und sei  $M$  ein DFA mit  $L(M) = L(G)$ .

Dann gilt  $L(M) = \emptyset$  g.d.w. es keinen Pfad vom Startzustand zu einem Endzustand in  $M$  gibt.

Dies kann man leicht mit einer Tiefensuche (Depth-First-Search) auf dem Zustandsgraph von  $M$  prüfen. □

# Endlichkeitsproblem für reguläre Grammatiken

---

## **Satz**

Das Endlichkeitsproblem für reguläre Grammatiken ist entscheidbar.

# Endlichkeitsproblem für reguläre Grammatiken

---

## Satz

Das Endlichkeitsproblem für reguläre Grammatiken ist entscheidbar.

**Beweis** Sei  $G$  eine reguläre Grammatik und sei  $M$  ein DFA mit  $L(M) = L(G)$ .



# Endlichkeitsproblem für reguläre Grammatiken

## Satz

Das Endlichkeitsproblem für reguläre Grammatiken ist entscheidbar.

**Beweis** Sei  $G$  eine reguläre Grammatik und sei  $M$  ein DFA mit  $L(M) = L(G)$ .

Es gilt  $|L(M)| < \infty$  g.d.w. es keinen Pfad vom Startzustand zu einem Endzustand gibt, der eine Schleife enthält.

# Endlichkeitsproblem für reguläre Grammatiken

## Satz

Das Endlichkeitsproblem für reguläre Grammatiken ist entscheidbar.

**Beweis** Sei  $G$  eine reguläre Grammatik und sei  $M$  ein DFA mit  $L(M) = L(G)$ .

Es gilt  $|L(M)| < \infty$  g.d.w. es keinen Pfad vom Startzustand zu einem Endzustand gibt, der eine Schleife enthält.

Prüfe dies mit einer Tiefensuche auf dem Zustandsgraph von  $M$ . □

# Schnittproblem für reguläre Grammatiken

---

## **Satz**

Das Schnittproblem für reguläre Grammatiken ist entscheidbar.

# Schnittproblem für reguläre Grammatiken

---

## Satz

Das Schnittproblem für reguläre Grammatiken ist entscheidbar.

**Beweis** Seien  $G_1, G_2$  reguläre Grammatiken und seien  $M_1, M_2$  DFAs mit  $L(M_i) = L(G_i)$  für  $i \in \{1, 2\}$ .

# Schnittproblem für reguläre Grammatiken

## Satz

Das Schnittproblem für reguläre Grammatiken ist entscheidbar.

**Beweis** Seien  $G_1, G_2$  reguläre Grammatiken und seien  $M_1, M_2$  DFAs mit  $L(M_i) = L(G_i)$  für  $i \in \{1, 2\}$ .

Konstruiere den Produktautomaten  $M_1 \times M_2$  mit  $L(M_1 \times M_2) = L(M_1) \cap L(M_2)$ .

# Schnittproblem für reguläre Grammatiken

## Satz

Das Schnittproblem für reguläre Grammatiken ist entscheidbar.

**Beweis** Seien  $G_1, G_2$  reguläre Grammatiken und seien  $M_1, M_2$  DFAs mit  $L(M_i) = L(G_i)$  für  $i \in \{1, 2\}$ .

Konstruiere den Produktautomaten  $M_1 \times M_2$  mit  $L(M_1 \times M_2) = L(M_1) \cap L(M_2)$ .

Prüfe das Leerheitsproblem für  $L(M_1 \times M_2)$ . □

# Äquivalenzproblem für reguläre Grammatiken

---

## Satz

Das Äquivalenzproblem für reguläre Grammatiken ist entscheidbar.

# Äquivalenzproblem für reguläre Grammatiken

---

## Satz

Das Äquivalenzproblem für reguläre Grammatiken ist entscheidbar.

**Beweis** Seien  $G_1, G_2$  reguläre Grammatiken und seien  $M_1, M_2$  DFAs mit  $L(M_i) = L(G_i)$  für  $i \in \{1, 2\}$ .



# Äquivalenzproblem für reguläre Grammatiken

## Satz

Das Äquivalenzproblem für reguläre Grammatiken ist entscheidbar.

**Beweis** Seien  $G_1, G_2$  reguläre Grammatiken und seien  $M_1, M_2$  DFAs mit  $L(M_i) = L(G_i)$  für  $i \in \{1, 2\}$ .

Minimiere  $M_1$  und  $M_2$ .

# Äquivalenzproblem für reguläre Grammatiken

## Satz

Das Äquivalenzproblem für reguläre Grammatiken ist entscheidbar.

**Beweis** Seien  $G_1, G_2$  reguläre Grammatiken und seien  $M_1, M_2$  DFAs mit  $L(M_i) = L(G_i)$  für  $i \in \{1, 2\}$ .

Minimiere  $M_1$  und  $M_2$ .

Prüfe die minimalen DFAs auf Gleichheit bis auf Umbenennung. □