3c

Nichtdeterministische endliche Automaten mit ε-Übergängen

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 30. April 2024
Basiert auf Folien von PD Dr. David Sabel

NFAs mit ε-Übergängen

Informelle Kurzfassung:

- ε-Übergänge erlauben Zustandswechsel ohne Lesen eines Zeichens.
  Es wird sozusagen ε gelesen.

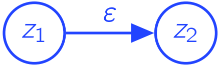
NFAs mit ε-Übergängen

Informelle Kurzfassung:

- ε-Übergänge erlauben Zustandswechsel ohne Lesen eines Zeichens. Es wird sozusagen ε gelesen.
- Im Zustandsgraph erlaubt: $z_1 \xrightarrow{\varepsilon} z_2$

NFAs mit ε-Übergängen

Informelle Kurzfassung:

- ε-Übergänge erlauben Zustandswechsel ohne Lesen eines Zeichens.
  Es wird sozusagen ε gelesen.
- Im Zustandsgraph erlaubt: 

- Technisch:
  - Ein NFA ohne ε-Übergänge hat $\delta : Z \times \Sigma \to \mathcal{P}(Z)$.
  - Ein NFA mit ε-Übergängen hat $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Z)$.

NFAs mit ε-Übergängen

Informelle Kurzfassung:

- ε-Übergänge erlauben Zustandswechsel ohne Lesen eines Zeichens.
  Es wird sozusagen ε gelesen.
- Im Zustandsgraph erlaubt: $z_1 \xrightarrow{\varepsilon} z_2$
- Technisch:
  - Ein NFA ohne ε-Übergänge hat $\delta : Z \times \Sigma \to \mathcal{P}(Z)$.
  - Ein NFA mit ε-Übergängen hat $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Z)$.
- Die Ausdruckskraft ändert sich mit ε-Übergängen nicht.
- ε-Übergänge machen manche Konstruktionen einfacher.

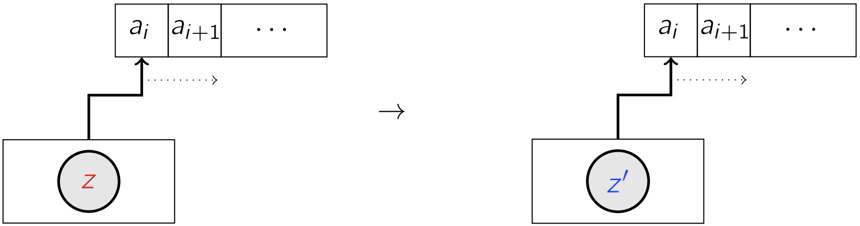
Definition eines NFA mit ε-Übergängen

Definition

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat mit ε-Übergängen (NFA mit ε-Übergängen) ist ein 5-Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$, wobei

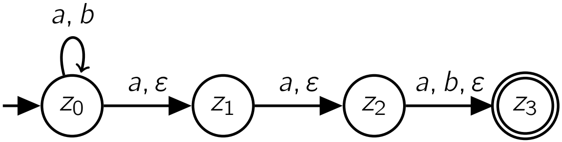
- Z ist eine endliche Menge von Zuständen
- Σ ist das (endliche) Eingabealphabet mit $Z \cap \Sigma = \emptyset$
- $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Z)$ ist die Überführungsfunktion
- $S \subseteq Z$ ist die Menge der Startzustände
- $E \subseteq Z$ ist die Menge der Endzustände.

Illustration eines Zustandsübergangs mit ε



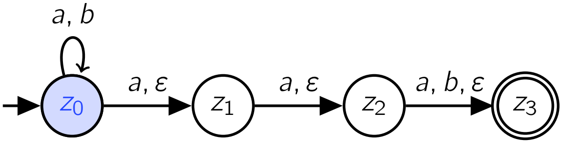
$z' \in \delta(z, \varepsilon)$ bedeutet:
Im Zustand z darf der Automat in z' wechseln, ohne das der Lesekopf sich bewegt.

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



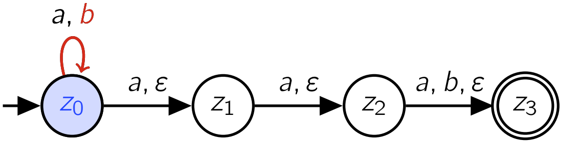
Abarbeitung der Eingabe $baab$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



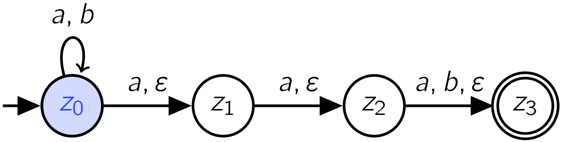
Abarbeitung der Eingabe *baab*

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



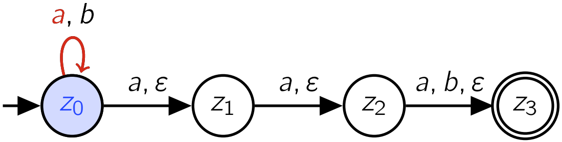
Abarbeitung der Eingabe $baab$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



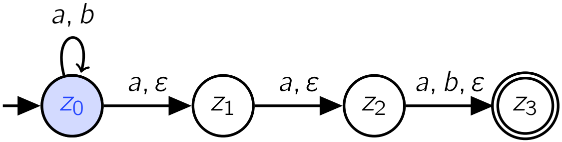
Abarbeitung der Eingabe $baab$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



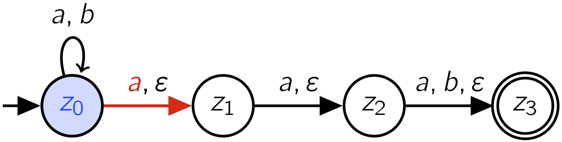
Abarbeitung der Eingabe $baab$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



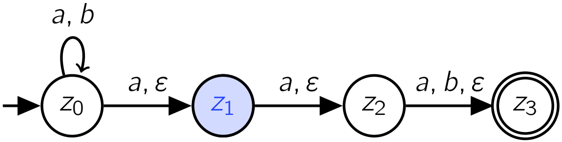
Abarbeitung der Eingabe $baab$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



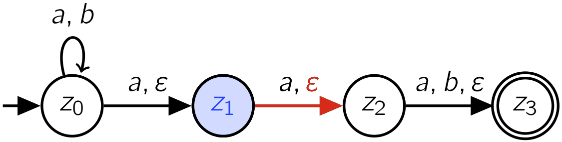
Abarbeitung der Eingabe $baab$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



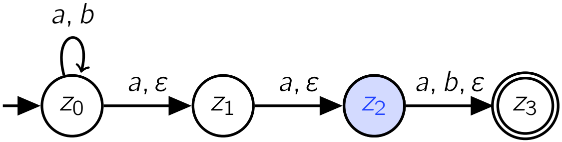
Abarbeitung der Eingabe $baab$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



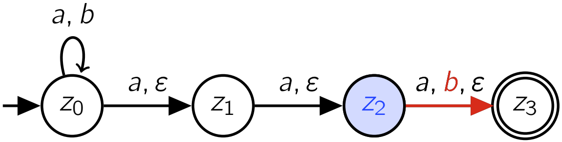
Abarbeitung der Eingabe $baab$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



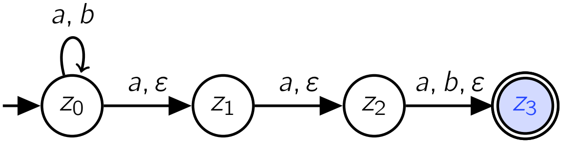
Abarbeitung der Eingabe $baab$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



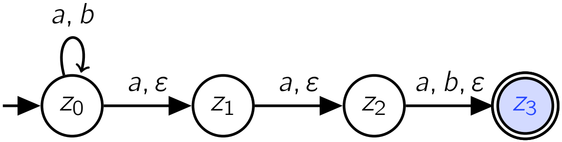
Abarbeitung der Eingabe $baab$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $baab$

Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $baab$

ε-Hülle

Die ε-Hülle fügt für einen Zustand alle durch ε-Übergänge erreichbaren Zustände hinzu.

ε-Hülle

Die ε-Hülle fügt für einen Zustand alle durch ε-Übergänge erreichbaren Zustände hinzu.

Definition

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.
Die ε-Hülle $\varepsilon\text{-}\mathit{Hülle}(z)$ eines Zustands $z \in Z$ ist definiert als die kleinste Menge von Zuständen, welche erfüllt:

1. $z \in \varepsilon\text{-}\mathit{Hülle}(z)$.
2. Wenn $z' \in \varepsilon\text{-}\mathit{Hülle}(z)$ und $z'' \in \delta(z', \varepsilon)$, dann ist auch $z'' \in \varepsilon\text{-}\mathit{Hülle}(z)$.

ε-Hülle

Die ε-Hülle fügt für einen Zustand alle durch ε-Übergänge erreichbaren Zustände hinzu.

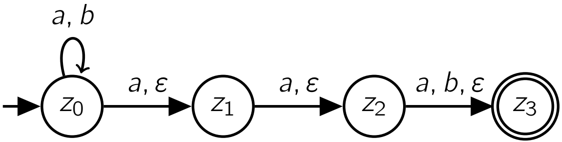
Definition

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.
Die ε-Hülle $\varepsilon\text{-}Hülle(z)$ eines Zustands $z \in Z$ ist definiert als die kleinste Menge von Zuständen, welche erfüllt:

1. $z \in \varepsilon\text{-}Hülle(z)$.
2. Wenn $z' \in \varepsilon\text{-}Hülle(z)$ und $z'' \in \delta(z', \varepsilon)$, dann ist auch $z'' \in \varepsilon\text{-}Hülle(z)$.

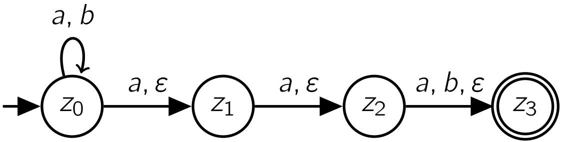
Für eine Menge $X \subseteq Z$ definieren wir $\varepsilon\text{-}Hülle(X) := \bigcup_{z \in X} \varepsilon\text{-}Hülle(z)$.

Beispiel für die ε-Hülle



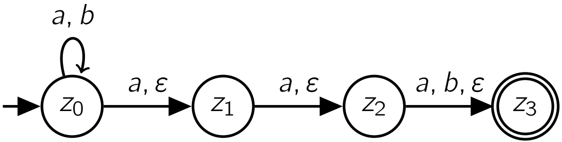
$$\varepsilon\text{-}H\ddot{u}lle(z_0) = ?$$
$$\varepsilon\text{-}H\ddot{u}lle(z_1) = ?$$
$$\varepsilon\text{-}H\ddot{u}lle(z_2) = ?$$
$$\varepsilon\text{-}H\ddot{u}lle(z_3) = ?$$

Beispiel für die ε-Hülle



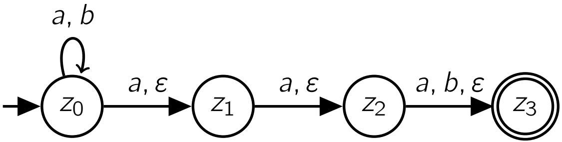
$$\varepsilon\text{-}H\ddot{u}lle(z_0) = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$$
$$\varepsilon\text{-}H\ddot{u}lle(z_1) = ?$$
$$\varepsilon\text{-}H\ddot{u}lle(z_2) = ?$$
$$\varepsilon\text{-}H\ddot{u}lle(z_3) = ?$$

Beispiel für die ε-Hülle



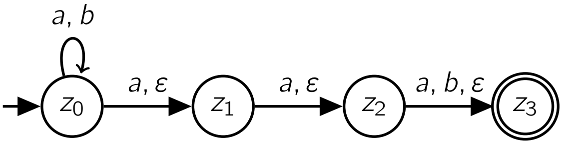
$$\varepsilon\text{-}Hülle(z_0) = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$$
$$\varepsilon\text{-}Hülle(z_1) = \{z_1, z_2, z_3\}$$
$$\varepsilon\text{-}Hülle(z_2) = ?$$
$$\varepsilon\text{-}Hülle(z_3) = ?$$

Beispiel für die ε-Hülle



$$\begin{aligned}
\varepsilon\text{-}Hülle(z_0) &= \{z_0, z_1, z_2, z_3\} \\
\varepsilon\text{-}Hülle(z_1) &= \{z_1, z_2, z_3\} \\
\varepsilon\text{-}Hülle(z_2) &= \{z_2, z_3\} \\
\varepsilon\text{-}Hülle(z_3) &= ?
\end{aligned}$$

Beispiel für die ε-Hülle



$$\begin{aligned}
\varepsilon\text{-Hülle}(z_0) &= \{z_0, z_1, z_2, z_3\} \\
\varepsilon\text{-Hülle}(z_1) &= \{z_1, z_2, z_3\} \\
\varepsilon\text{-Hülle}(z_2) &= \{z_2, z_3\} \\
\varepsilon\text{-Hülle}(z_3) &= \{z_3\}
\end{aligned}$$

Akzeptanz bei NFAs mit ε-Übergängen

Akzeptierte Sprache eines NFA mit ε-Übergängen

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.
Wir definieren $\widetilde{\delta} : \mathcal{P}(Z) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Z)$ rekursiv durch

$$\begin{aligned}\widetilde{\delta}(X, \varepsilon) &:= X \\ \widetilde{\delta}(X, aw) &:= \widetilde{\delta}\Big(\bigcup_{z \in X} \varepsilon\text{-}H\ddot{u}lle(\delta(z, a)), w\Big)\end{aligned}$$

Akzeptanz bei NFAs mit ε-Übergängen

Akzeptierte Sprache eines NFA mit ε-Übergängen

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.
Wir definieren $\widetilde{\delta} : \mathcal{P}(Z) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Z)$ rekursiv durch

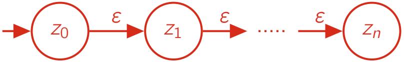
$$\begin{aligned} \widetilde{\delta}(X, \varepsilon) &:= X \\ \widetilde{\delta}(X, aw) &:= \widetilde{\delta}\Big(\bigcup_{z \in X} \varepsilon\text{-}H\ddot{u}lle(\delta(z, a)), w\Big) \end{aligned}$$

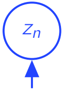
Die von M akzeptierte Sprache ist

$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \widetilde{\delta}(\varepsilon\text{-}H\ddot{u}lle(S), w) \cap E \neq \emptyset\}$$

Entfernen von ε-Übergängen

Intuitiver Ansatz:

1. Markiere für jeden Pfad von der Form 

   den Zustand z_n als Startzustand: 

Entfernen von ε-Übergängen

Intuitiver Ansatz:

1. Markiere für jeden Pfad von der Form $\rightarrow z_0 \xrightarrow{\varepsilon} z_1 \xrightarrow{\varepsilon} \cdots \xrightarrow{\varepsilon} z_n$

   den Zustand z_n als Startzustand: $\rightarrow z_n$

2. Füge für jeden Pfad von der Form $z_1 \xrightarrow{a} z_2 \xrightarrow{\varepsilon} z_3 \xrightarrow{\varepsilon} \cdots \xrightarrow{\varepsilon} z_n$

   einen Übergang $z_1 \xrightarrow{a} z_n$ hinzu.

Entfernen von ε-Übergängen

Intuitiver Ansatz:

1. Markiere für jeden Pfad von der Form $\to z_0 \xrightarrow{\varepsilon} z_1 \xrightarrow{\varepsilon} \cdots \xrightarrow{\varepsilon} z_n$

   den Zustand z_n als Startzustand: $\to z_n$

2. Füge für jeden Pfad von der Form $z_1 \xrightarrow{a} z_2 \xrightarrow{\varepsilon} z_3 \xrightarrow{\varepsilon} \cdots \xrightarrow{\varepsilon} z_n$

   einen Übergang $z_1 \xrightarrow{a} z_n$ hinzu.

3. Entferne alle ε-Übergänge.

Sprache von NFAs mit ε-Übergängen

Satz

NFAs mit ε-Übergängen akzeptieren genau die regulären Sprachen.

Sprache von NFAs mit ε-Übergängen

Satz

NFAs mit ε-Übergängen akzeptieren genau die regulären Sprachen.

Beweis

$\supseteq$ Wir zeigen zuerst, dass jede reguläre Sprache L von einem NFA mit ϵ-Übergängen akzeptiert wird.

Sprache von NFAs mit ε-Übergängen

Satz

NFAs mit ε-Übergängen akzeptieren genau die regulären Sprachen.

Beweis

$\supseteq$ Wir zeigen zuerst, dass jede reguläre Sprache L von einem NFA mit ϵ-Übergängen akzeptiert wird.

L wird von einem NFA $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ohne ϵ-Übergänge akzeptiert. Sei $M' = (Z, \Sigma, \delta', S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen, wobei

$$\begin{aligned} \delta'(z, a) &:= \delta(z, a) \quad \text{für } a \in \Sigma \\ \delta'(z, \varepsilon) &:= \emptyset \end{aligned}$$

Sprache von NFAs mit ε-Übergängen

Satz

NFAs mit ε-Übergängen akzeptieren genau die regulären Sprachen.

Beweis

$\supseteq$ Wir zeigen zuerst, dass jede reguläre Sprache L von einem NFA mit ϵ-Übergängen akzeptiert wird.

L wird von einem NFA $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ohne ϵ-Übergänge akzeptiert. Sei $M' = (Z, \Sigma, \delta', S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen, wobei

$$\begin{aligned} \delta'(z, a) &:= \delta(z, a) \quad \text{für } a \in \Sigma \\ \delta'(z, \varepsilon) &:= \emptyset \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $L(M') = L(M) = L$.

Sprache von NFAs mit ε-Übergängen

Beweis (Fortsetzung)

$\subseteq$ Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.
Wir zeigen, dass $L(M)$ ist regulär.

Sprache von NFAs mit ε-Übergängen

Beweis (Fortsetzung)

$\subseteq$ Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.
Wir zeigen, dass $L(M)$ ist regulär.

Wir konstruieren einen NFA M' ohne ϵ-Übergänge mit $L(M') = L(M)$. Dann ist $L(M')$ regulär, daher ist auch $L(M)$ regulär.

Sprache von NFAs mit ε-Übergängen

Beweis (Fortsetzung)

$\subseteq$ Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA mit ε-Übergängen.
Wir zeigen, dass $L(M)$ ist regulär.

Wir konstruieren einen NFA M' ohne ϵ-Übergänge mit $L(M') = L(M)$. Dann ist $L(M')$ regulär, daher ist auch $L(M)$ regulär.

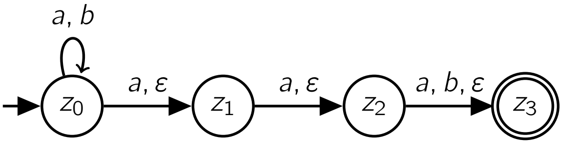
Sei $M' = (Z, \Sigma, \delta', S', E)$ mit

$$S' := \varepsilon\text{-}H\ddot{u}lle(S)$$

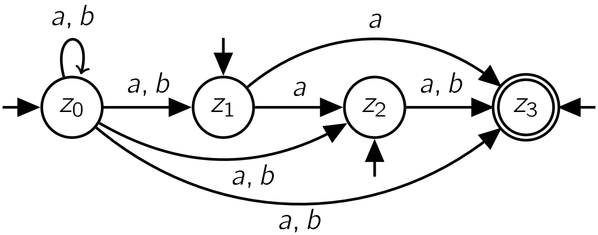
$$\delta'(z, a) := \varepsilon\text{-}H\ddot{u}lle(\delta(z, a))$$

Beispiel für die Elimination von ε-Übergängen

NFA M mit ε-Übergängen:

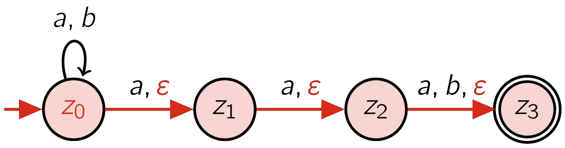


NFA M' ohne ε-Übergänge:

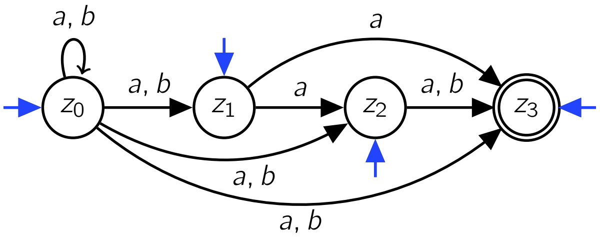


Beispiel für die Elimination von ε-Übergängen

NFA M mit ε-Übergängen:

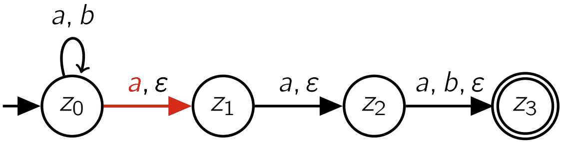


NFA M' ohne ε-Übergänge:

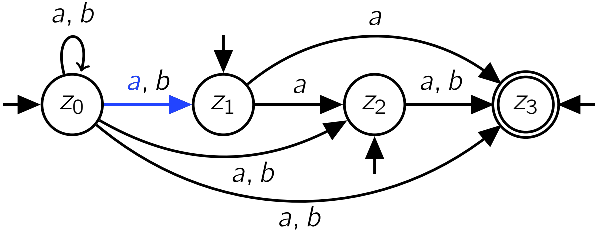


Beispiel für die Elimination von ε-Übergängen

NFA M mit ε-Übergängen:

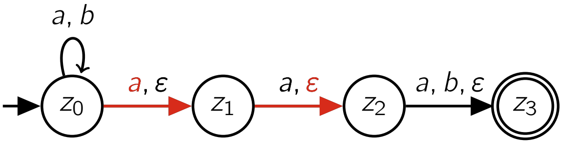


NFA M' ohne ε-Übergänge:

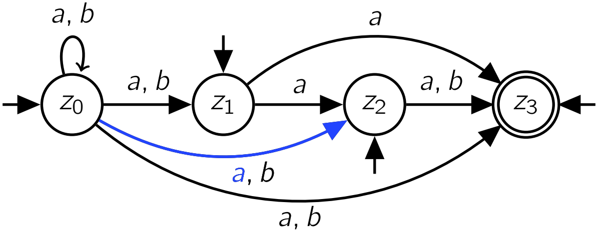


Beispiel für die Elimination von ε-Übergängen

NFA M mit ε-Übergängen:

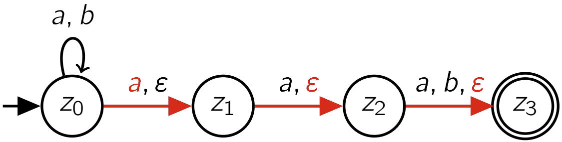


NFA M' ohne ε-Übergänge:

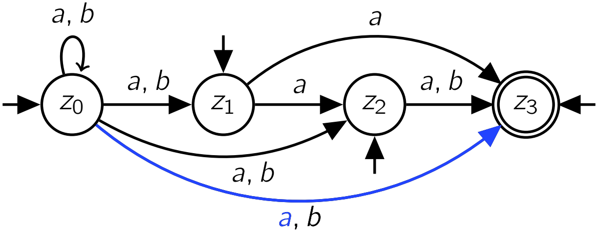


Beispiel für die Elimination von ε-Übergängen

NFA M mit ε-Übergängen:



NFA M' ohne ε-Übergänge:



Sprache von NFAs mit ε-Übergängen

Beweis (Fortsetzung)

Wir müssen zeigen, dass $L(M') = L(M)$, d.h. $w \in L(M')$ g.d.w. $w \in L(M)$.

Sprache von NFAs mit ε-Übergängen

Beweis (Fortsetzung)

Wir müssen zeigen, dass $L(M') = L(M)$, d.h. $w \in L(M')$ g.d.w. $w \in L(M)$.

$w \in L(M')$

Beweis (Fortsetzung)

Wir müssen zeigen, dass $L(M') = L(M)$, d.h. $w \in L(M')$ g.d.w. $w \in L(M)$.

$$w \in L(M')$$

g.d.w. $\widetilde{\delta}'(\varepsilon\text{-}H\ddot{u}lle(S), w) \cap E \neq \emptyset$

Sprache von NFAs mit ε-Übergängen

Beweis (Fortsetzung)

Wir müssen zeigen, dass $L(M') = L(M)$, d.h. $w \in L(M')$ g.d.w. $w \in L(M)$.

$w \in L(M')$

g.d.w. $\widetilde{\delta}'(\varepsilon\text{-}H\ddot{u}lle(S), w) \cap E \neq \emptyset$

$w \in L(M)$

Sprache von NFAs mit ε-Übergängen

Beweis (Fortsetzung)

Wir müssen zeigen, dass $L(M') = L(M)$, d.h. $w \in L(M')$ g.d.w. $w \in L(M)$.

$$
\begin{aligned}
& w \in L(M') \\
\text{g.d.w. } & \widetilde{\delta}'(\varepsilon\text{-}H\ddot{u}lle(S), w) \cap E \neq \emptyset \\
& \widetilde{\delta}(\varepsilon\text{-}H\ddot{u}lle(S), w) \cap E \neq \emptyset \\
\text{g.d.w. } & w \in L(M)
\end{aligned}
$$

Sprache von NFAs mit ε-Übergängen

Beweis (Fortsetzung)

Wir müssen zeigen, dass $L(M') = L(M)$, d.h. $w \in L(M')$ g.d.w. $w \in L(M)$.

$$\begin{aligned} & w \in L(M') \\ \text{g.d.w. } & \widetilde{\delta}'(\varepsilon\text{-}H\ddot{u}lle(S), w) \cap E \neq \emptyset \\ \text{g.d.w. } & \widetilde{\delta}(\varepsilon\text{-}H\ddot{u}lle(S), w) \cap E \neq \emptyset \qquad (\text{weil } \widetilde{\delta}' = \widetilde{\delta}) \\ \text{g.d.w. } & w \in L(M) \end{aligned}$$

Sprache von NFAs mit ε-Übergängen

Beweis (Fortsetzung)

Es bleibt zu zeigen, dass $\widetilde{\delta}' = \widetilde{\delta}$, d.h. $\widetilde{\delta}'(X, w) = \widetilde{\delta}(X, w)$ für alle X, w.
Wir verwenden Induktion über die Wortlänge $|w|$.

Sprache von NFAs mit ε-Übergängen

Beweis (Fortsetzung)

Es bleibt zu zeigen, dass $\widetilde{\delta}' = \widetilde{\delta}$, d.h. $\widetilde{\delta}'(X, w) = \widetilde{\delta}(X, w)$ für alle X, w.
Wir verwenden Induktion über die Wortlänge $|w|$.

- Fall $w = \varepsilon$: $\widetilde{\delta}'(X, \varepsilon) = X = \widetilde{\delta}(X, \varepsilon)$.

Sprache von NFAs mit ε-Übergängen

Beweis (Fortsetzung)

Es bleibt zu zeigen, dass $\widetilde{\delta}' = \widetilde{\delta}$, d.h. $\widetilde{\delta}'(X, w) = \widetilde{\delta}(X, w)$ für alle X, w.
Wir verwenden Induktion über die Wortlänge $|w|$.

- Fall $w = \varepsilon$: $\widetilde{\delta}'(X, \varepsilon) = X = \widetilde{\delta}(X, \varepsilon)$.
- Fall $w = aw'$: Die IH für w' ist $\widetilde{\delta}'(X, w') = \widetilde{\delta}(X, w')$.

Sprache von NFAs mit ε-Übergängen

Beweis (Fortsetzung)

Es bleibt zu zeigen, dass $\widetilde{\delta}' = \widetilde{\delta}$, d.h. $\widetilde{\delta}'(X, w) = \widetilde{\delta}(X, w)$ für alle X, w.
Wir verwenden Induktion über die Wortlänge $|w|$.

- Fall $w = \varepsilon$: $\widetilde{\delta}'(X, \varepsilon) = X = \widetilde{\delta}(X, \varepsilon)$.
- Fall $w = aw'$: Die IH für w' ist $\widetilde{\delta}'(X, w') = \widetilde{\delta}(X, w')$.

  $\widetilde{\delta}'(X, aw')$

Sprache von NFAs mit ε-Übergängen

Beweis (Fortsetzung)

Es bleibt zu zeigen, dass $\widetilde{\delta}' = \widetilde{\delta}$, d.h. $\widetilde{\delta}'(X, w) = \widetilde{\delta}(X, w)$ für alle X, w.
Wir verwenden Induktion über die Wortlänge $|w|$.

- Fall $w = \varepsilon$: $\widetilde{\delta}'(X, \varepsilon) = X = \widetilde{\delta}(X, \varepsilon)$.
- Fall $w = aw'$: Die IH für w' ist $\widetilde{\delta}'(X, w') = \widetilde{\delta}(X, w')$.

$$
\begin{aligned}
& \widetilde{\delta}'(X, aw') \\
= \; & \widetilde{\delta}'\left(\bigcup_{z \in X} \delta'(z, a), w'\right) && \text{(Def. } \widetilde{\delta}'\text{, für NFA ohne } \varepsilon\text{-Übergänge)}
\end{aligned}
$$

Sprache von NFAs mit ε-Übergängen

Beweis (Fortsetzung)

Es bleibt zu zeigen, dass $\widetilde{\delta}' = \widetilde{\delta}$, d.h. $\widetilde{\delta}'(X, w) = \widetilde{\delta}(X, w)$ für alle X, w.
Wir verwenden Induktion über die Wortlänge $|w|$.

- Fall $w = \varepsilon$: $\widetilde{\delta}'(X, \varepsilon) = X = \widetilde{\delta}(X, \varepsilon)$.
- Fall $w = aw'$: Die IH für w' ist $\widetilde{\delta}'(X, w') = \widetilde{\delta}(X, w')$.

$$
\begin{aligned}
& \widetilde{\delta}'(X, aw') \\
= \; & \widetilde{\delta}'\left(\bigcup_{z \in X} \delta'(z, a), w'\right) && \text{(Def. } \widetilde{\delta}'\text{, für NFA ohne } \varepsilon\text{-Übergänge)} \\
= \; & \widetilde{\delta}'\left(\bigcup_{z \in X} \varepsilon\text{-}\mathit{Hülle}(\delta(z, a)), w'\right) && \text{(Def. } \delta'\text{)}
\end{aligned}
$$

Sprache von NFAs mit ε-Übergängen

Beweis (Fortsetzung)

Es bleibt zu zeigen, dass $\widetilde{\delta}' = \widetilde{\delta}$, d.h. $\widetilde{\delta}'(X, w) = \widetilde{\delta}(X, w)$ für alle X, w.
Wir verwenden Induktion über die Wortlänge $|w|$.

- Fall $w = \varepsilon$: $\widetilde{\delta}'(X, \varepsilon) = X = \widetilde{\delta}(X, \varepsilon)$.
- Fall $w = aw'$: Die IH für w' ist $\widetilde{\delta}'(X, w') = \widetilde{\delta}(X, w')$.

$$
\begin{aligned}
& \widetilde{\delta}'(X, aw') \\
= \; & \widetilde{\delta}'(\textstyle\bigcup_{z \in X} \delta'(z, a), w') && \text{(Def. } \widetilde{\delta}'\text{, für NFA ohne } \varepsilon\text{-Übergänge)} \\
= \; & \widetilde{\delta}'(\textstyle\bigcup_{z \in X} \varepsilon\text{-}\mathit{Hülle}(\delta(z, a)), w') && \text{(Def. } \delta'\text{)}
\end{aligned}
$$

$$\widetilde{\delta}(X, aw')$$

Sprache von NFAs mit ε-Übergängen

Beweis (Fortsetzung)

Es bleibt zu zeigen, dass $\widetilde{\delta}' = \widetilde{\delta}$, d.h. $\widetilde{\delta}'(X, w) = \widetilde{\delta}(X, w)$ für alle X, w.
Wir verwenden Induktion über die Wortlänge $|w|$.

- Fall $w = \varepsilon$: $\widetilde{\delta}'(X, \varepsilon) = X = \widetilde{\delta}(X, \varepsilon)$.
- Fall $w = aw'$: Die IH für w' ist $\widetilde{\delta}'(X, w') = \widetilde{\delta}(X, w')$.

$$
\begin{aligned}
& \widetilde{\delta}'(X, aw') & \\
= \ & \widetilde{\delta}'\left(\bigcup_{z\in X} \delta'(z, a), w'\right) & \text{(Def. } \widetilde{\delta}'\text{, für NFA ohne } \varepsilon\text{-Übergänge)} \\
= \ & \widetilde{\delta}'\left(\bigcup_{z\in X} \varepsilon\text{-}\mathit{Hülle}(\delta(z, a)), w'\right) & \text{(Def. } \delta'\text{)} \\
& \widetilde{\delta}\left(\bigcup_{z\in X} \varepsilon\text{-}\mathit{Hülle}(\delta(z, a)), w'\right) & \\
= \ & \widetilde{\delta}(X, aw') & \text{(Def. } \widetilde{\delta}\text{, für NFA mit } \varepsilon\text{-Übergängen)}
\end{aligned}
$$

Sprache von NFAs mit ε-Übergängen

Beweis (Fortsetzung)

Es bleibt zu zeigen, dass $\widetilde{\delta}' = \widetilde{\delta}$, d.h. $\widetilde{\delta}'(X, w) = \widetilde{\delta}(X, w)$ für alle X, w.
Wir verwenden Induktion über die Wortlänge $|w|$.

- Fall $w = \varepsilon$: $\widetilde{\delta}'(X, \varepsilon) = X = \widetilde{\delta}(X, \varepsilon)$.
- Fall $w = aw'$: Die IH für w' ist $\widetilde{\delta}'(X, w') = \widetilde{\delta}(X, w')$.

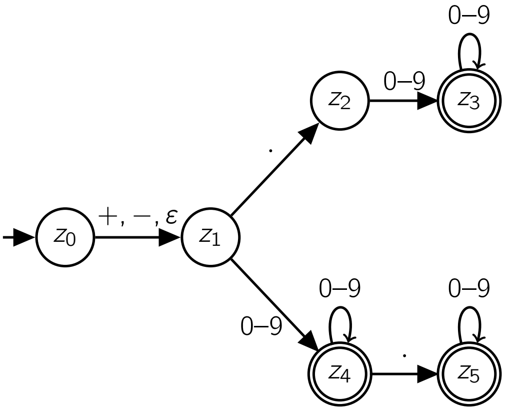
$$
\begin{aligned}
& \widetilde{\delta}'(X, aw') \\
= \; & \widetilde{\delta}'(\textstyle\bigcup_{z \in X} \delta'(z, a), w') && \text{(Def. } \widetilde{\delta}'\text{, für NFA ohne } \varepsilon\text{-Übergänge)} \\
= \; & \widetilde{\delta}'(\textstyle\bigcup_{z \in X} \varepsilon\text{-}\mathit{Hülle}(\delta(z, a)), w') && \text{(Def. } \delta'\text{)} \\
= \; & \widetilde{\delta}(\textstyle\bigcup_{z \in X} \varepsilon\text{-}\mathit{Hülle}(\delta(z, a)), w') && \text{(IH)} \\
= \; & \widetilde{\delta}(X, aw') && \text{(Def. } \widetilde{\delta}\text{, für NFA mit } \varepsilon\text{-Übergängen)} \qquad \square
\end{aligned}
$$

Beispiel für die Konstruktion eines NFA mit ε-Übergängen

Konstruiere einen NFA mit ε-Übergängen über $\{+, -, ., 0, \ldots, 9\}$, der alle Wörter akzeptiert, die Gleitkommazahlen darstellen (z.B. $+27$, -3.14, $.666$):

Beispiel für die Konstruktion eines NFA mit ε-Übergängen

Konstruiere einen NFA mit ε-Übergängen über $\{+, -, ., 0, \ldots, 9\}$, der alle Wörter akzeptiert, die Gleitkommazahlen darstellen (z.B. $+27$, -3.14, $.666$):



Eindeutige Start- und Endzustände

Satz

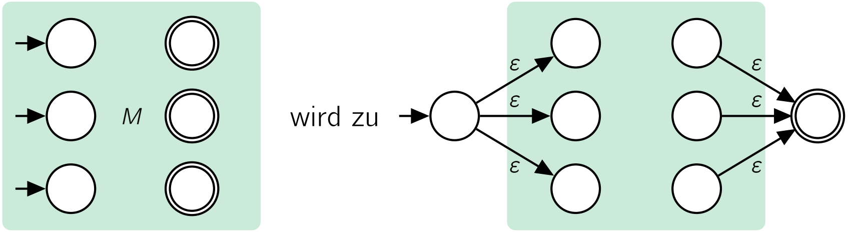
Für jeden NFA M mit ε-Übergängen gibt es einen NFA M' mit ε-Übergängen, sodass $L(M') = L(M)$ und M' genau einen Startzustand und genau einen Endzustand hat, wobei diese beiden Zustände verschieden sind.

Eindeutige Start- und Endzustände

Satz

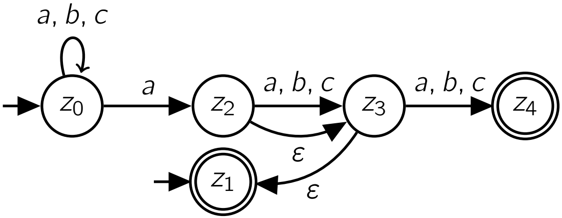
Für jeden NFA M mit ε-Übergängen gibt es einen NFA M' mit ε-Übergängen, sodass $L(M') = L(M)$ und M' genau einen Startzustand und genau einen Endzustand hat, wobei diese beiden Zustände verschieden sind.

Beweis Konstruiere M' aus M, durch Hinzufügen eines neuen Start- und eines neuen Endzustands mit ε-Übergängen:

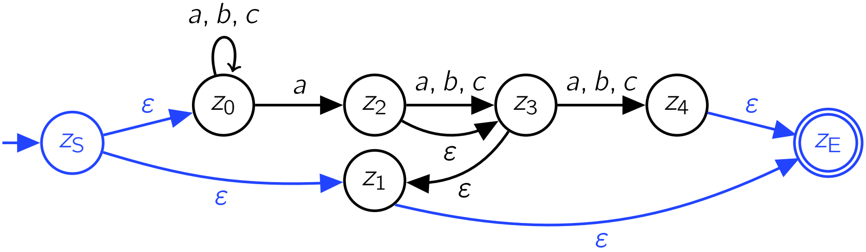


□

Beispiel für eindeutige Start- und Endzustände



wird zu



Online-Tool

Christopher Schaffner hat ein Web-Tool zum Üben und Anschauen entwickelt:

chrisschaffner.github.io/graphicalInterfaceForGrammars/