

## 3c

**Nichtdeterministische endliche Automaten  
mit  $\epsilon$ -Übergängen**

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für  
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 10. Mai 2024

Basiert auf Folien von PD Dr. David Sabel



# NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

---

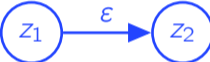
Informelle Kurzfassung:

- ▶  $\varepsilon$ -Übergänge erlauben Zustandswechsel **ohne Lesen eines Zeichens**.  
Es wird sozusagen  $\varepsilon$  gelesen.

# NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

Informelle Kurzfassung:

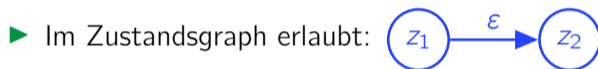
- ▶  $\varepsilon$ -Übergänge erlauben Zustandswechsel **ohne Lesen eines Zeichens**.  
Es wird sozusagen  $\varepsilon$  gelesen.

- ▶ Im Zustandsgraph erlaubt: A diagram showing two states,  $z_1$  and  $z_2$ , each enclosed in a blue circle. A blue arrow points from  $z_1$  to  $z_2$ , with the Greek letter  $\varepsilon$  written above the arrow.

# NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

Informelle Kurzfassung:

- ▶  $\varepsilon$ -Übergänge erlauben Zustandswechsel **ohne Lesen eines Zeichens**.  
Es wird sozusagen  $\varepsilon$  gelesen.



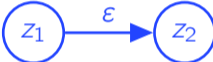
- ▶ Technisch:

- ▶ Ein **NFA ohne  $\varepsilon$ -Übergänge** hat  $\delta : Z \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Z)$ .
- ▶ Ein **NFA mit  $\varepsilon$ -Übergängen** hat  $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Z)$ .

# NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

Informelle Kurzfassung:

- ▶  $\varepsilon$ -Übergänge erlauben Zustandswechsel **ohne Lesen eines Zeichens**.  
Es wird sozusagen  $\varepsilon$  gelesen.

- ▶ Im Zustandsgraph erlaubt: A diagram showing two states,  $z_1$  and  $z_2$ , each enclosed in a blue circle. A blue arrow points from  $z_1$  to  $z_2$ , with the Greek letter  $\varepsilon$  written above the arrow.

- ▶ Technisch:

- ▶ Ein **NFA ohne  $\varepsilon$ -Übergänge** hat  $\delta : Z \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Z)$ .
  - ▶ Ein **NFA mit  $\varepsilon$ -Übergängen** hat  $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Z)$ .
- ▶ Die Ausdruckskraft ändert sich mit  $\varepsilon$ -Übergängen nicht.
- ▶  $\varepsilon$ -Übergänge machen manche Konstruktionen einfacher.

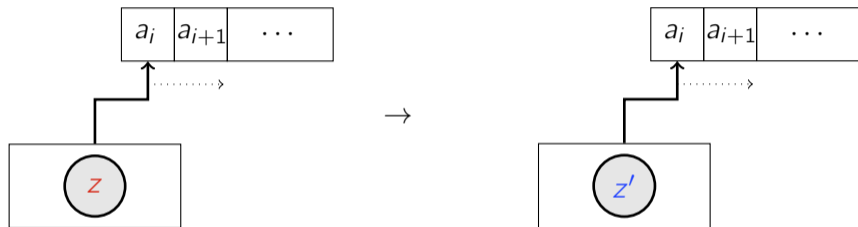
# Definition eines NFA mit $\varepsilon$ -Übergängen

## Definition

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat mit  $\varepsilon$ -Übergängen (NFA mit  $\varepsilon$ -Übergängen) ist ein 5-Tupel  $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ , wobei

- ▶  $Z$  ist eine endliche Menge von Zuständen
- ▶  $\Sigma$  ist das (endliche) Eingabealphabet mit  $Z \cap \Sigma = \emptyset$
- ▶  $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Z)$  ist die Überföhrungsfunktion
- ▶  $S \subseteq Z$  ist die Menge der Startzustände
- ▶  $E \subseteq Z$  ist die Menge der Endzustände.

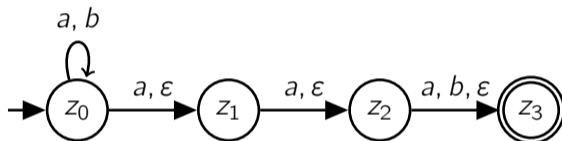
# Illustration eines Zustandsübergangs mit $\epsilon$



$z' \in \delta(z, \epsilon)$  bedeutet:

Im Zustand  $z$  darf der Automat in  $z'$  wechseln, ohne dass der Lesekopf sich bewegt.

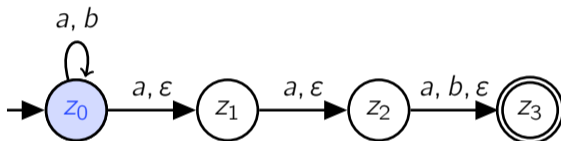
## Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe *baab*

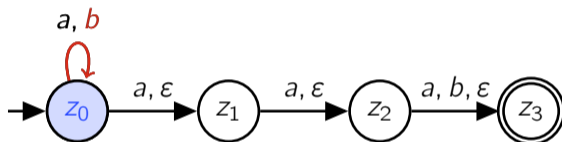


# Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



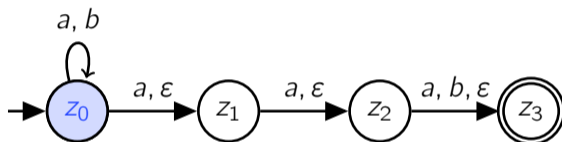
Abarbeitung der Eingabe *baab*

# Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



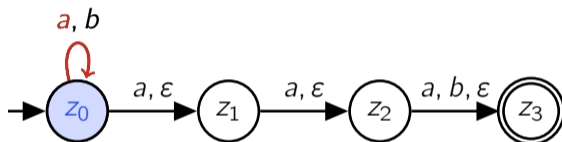
Abarbeitung der Eingabe *baab*

# Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



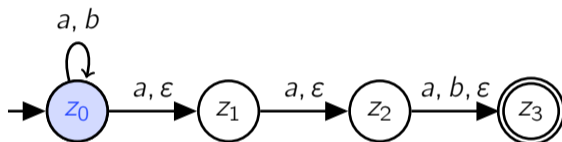
Abarbeitung der Eingabe *baab*

## Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



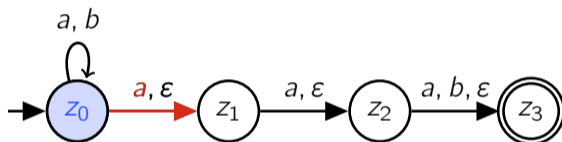
Abarbeitung der Eingabe  $baab$

# Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



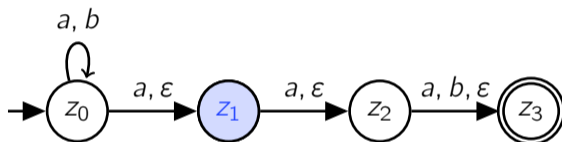
Abarbeitung der Eingabe  $baab$

# Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



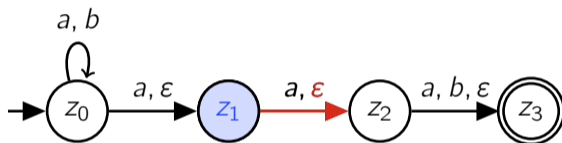
Abarbeitung der Eingabe  $baab$

# Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe  $baab$

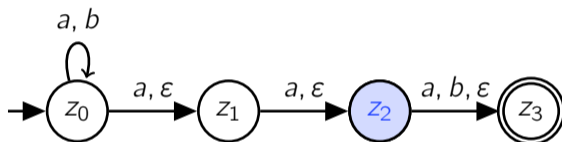
# Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe  $baab$

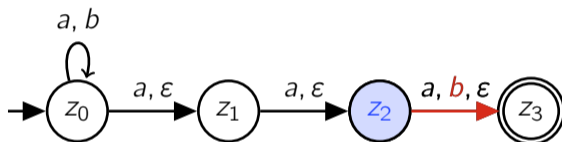


## Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



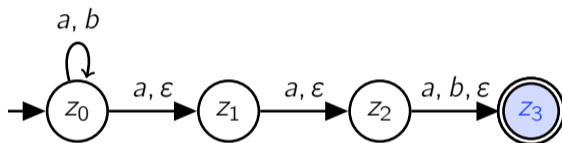
Abarbeitung der Eingabe  $baab$

# Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



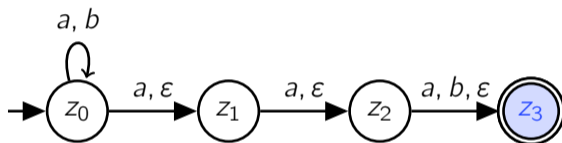
Abarbeitung der Eingabe *baab*

# Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe *baab*

## Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe *baab*

Die  $\epsilon$ -Hülle fügt für einen Zustand alle durch  $\epsilon$ -Übergänge erreichbaren Zustände hinzu.

Die  $\varepsilon$ -Hülle fügt für einen Zustand alle **durch  $\varepsilon$ -Übergänge** erreichbaren Zustände hinzu.

## Definition

Sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$  ein NFA mit  $\varepsilon$ -Übergängen.

Die  **$\varepsilon$ -Hülle**  $\varepsilon\text{-Hülle}(z)$  eines Zustands  $z \in Z$  ist definiert als die kleinste Menge von Zuständen, welche erfüllt:

1.  $z \in \varepsilon\text{-Hülle}(z)$ .
2. Wenn  $z' \in \varepsilon\text{-Hülle}(z)$  und  $z'' \in \delta(z', \varepsilon)$ , dann ist auch  $z'' \in \varepsilon\text{-Hülle}(z)$ .

Die  $\varepsilon$ -Hülle fügt für einen Zustand alle durch  $\varepsilon$ -Übergänge erreichbaren Zustände hinzu.

## Definition

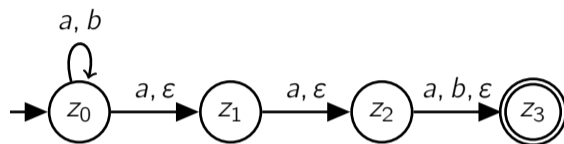
Sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$  ein NFA mit  $\varepsilon$ -Übergängen.

Die  $\varepsilon$ -Hülle  $\varepsilon\text{-Hülle}(z)$  eines Zustands  $z \in Z$  ist definiert als die kleinste Menge von Zuständen, welche erfüllt:

1.  $z \in \varepsilon\text{-Hülle}(z)$ .
2. Wenn  $z' \in \varepsilon\text{-Hülle}(z)$  und  $z'' \in \delta(z', \varepsilon)$ , dann ist auch  $z'' \in \varepsilon\text{-Hülle}(z)$ .

Für eine Menge  $X \subseteq Z$  definieren wir  $\varepsilon\text{-Hülle}(X) := \bigcup_{z \in X} \varepsilon\text{-Hülle}(z)$ .

## Beispiel für die $\varepsilon$ -Hülle



$\varepsilon$ -Hülle( $z_0$ ) = ?

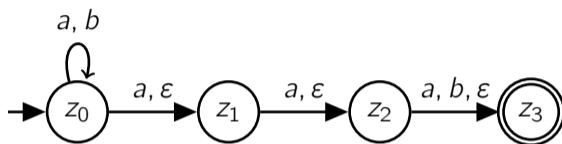
$\varepsilon$ -Hülle( $z_1$ ) = ?

$\varepsilon$ -Hülle( $z_2$ ) = ?

$\varepsilon$ -Hülle( $z_3$ ) = ?



## Beispiel für die $\varepsilon$ -Hülle



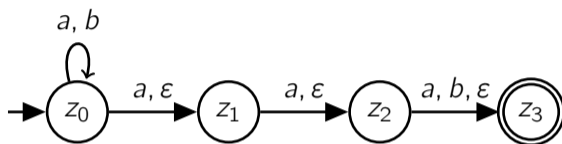
$$\varepsilon\text{-H\u00fclle}(z_0) = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$$

$$\varepsilon\text{-H\u00fclle}(z_1) = ?$$

$$\varepsilon\text{-H\u00fclle}(z_2) = ?$$

$$\varepsilon\text{-H\u00fclle}(z_3) = ?$$

## Beispiel für die $\varepsilon$ -Hülle



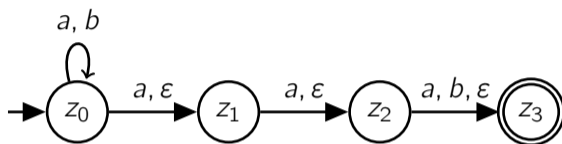
$$\varepsilon\text{-H\u00fclle}(z_0) = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$$

$$\varepsilon\text{-H\u00fclle}(z_1) = \{z_1, z_2, z_3\}$$

$$\varepsilon\text{-H\u00fclle}(z_2) = ?$$

$$\varepsilon\text{-H\u00fclle}(z_3) = ?$$

## Beispiel für die $\varepsilon$ -Hülle



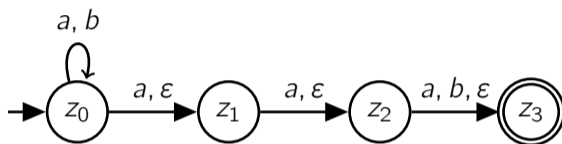
$$\varepsilon\text{-Hülle}(z_0) = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$$

$$\varepsilon\text{-Hülle}(z_1) = \{z_1, z_2, z_3\}$$

$$\varepsilon\text{-Hülle}(z_2) = \{z_2, z_3\}$$

$$\varepsilon\text{-Hülle}(z_3) = ?$$

## Beispiel für die $\varepsilon$ -Hülle



$$\varepsilon\text{-H\u00fclle}(z_0) = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$$

$$\varepsilon\text{-H\u00fclle}(z_1) = \{z_1, z_2, z_3\}$$

$$\varepsilon\text{-H\u00fclle}(z_2) = \{z_2, z_3\}$$

$$\varepsilon\text{-H\u00fclle}(z_3) = \{z_3\}$$

## Akzeptierte Sprache eines NFA mit $\varepsilon$ -Übergängen

Sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$  ein NFA mit  $\varepsilon$ -Übergängen.

Wir definieren  $\tilde{\delta} : \mathcal{P}(Z) \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Z)$  rekursiv durch

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}(X, \varepsilon) &:= X \\ \tilde{\delta}(X, aw) &:= \tilde{\delta}\left(\bigcup_{z \in X} \varepsilon\text{-H\u00fclle}(\delta(z, a)), w\right)\end{aligned}$$

# Akzeptanz bei NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

## Akzeptierte Sprache eines NFA mit $\varepsilon$ -Übergängen

Sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$  ein NFA mit  $\varepsilon$ -Übergängen.

Wir definieren  $\tilde{\delta} : \mathcal{P}(Z) \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Z)$  rekursiv durch



$$\begin{aligned}\tilde{\delta}(X, \varepsilon) &:= X \\ \tilde{\delta}(X, aw) &:= \tilde{\delta}\left(\bigcup_{z \in X} \varepsilon\text{-H\u00fclle}(\delta(z, a)), w\right)\end{aligned}$$

Die von  $M$  akzeptierte Sprache ist

$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \tilde{\delta}(\varepsilon\text{-H\u00fclle}(S), w) \cap E \neq \emptyset\}$$

# Entfernen von $\epsilon$ -Übergängen

Intuitiver Ansatz:

1. Markiere für jeden Pfad von der Form  den Zustand  $z_n$  als Startzustand: 


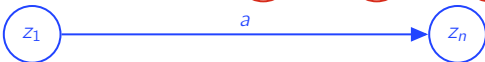
# Entfernen von $\epsilon$ -Übergängen

Intuitiver Ansatz:

1. Markiere für jeden Pfad von der Form  von der Form  $z_0 \xrightarrow{\epsilon} z_1 \xrightarrow{\epsilon} \dots \xrightarrow{\epsilon} z_n$

den Zustand  $z_n$  als Startzustand:



2. Füge für jeden Pfad von der Form  von der Form  $z_1 \xrightarrow{a} z_2 \xrightarrow{\epsilon} z_3 \xrightarrow{\epsilon} \dots \xrightarrow{\epsilon} z_n$  einen Übergang   $z_1 \xrightarrow{a} z_n$  hinzu.


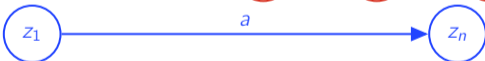


# Entfernen von $\epsilon$ -Übergängen

Intuitiver Ansatz:

1. Markiere für jeden Pfad von der Form  den Zustand  $z_n$  als Startzustand:

den Zustand  $z_n$  als Startzustand: 

2. Füge für jeden Pfad von der Form  einen Übergang  hinzu.

3. Entferne alle  $\epsilon$ -Übergänge.

# Sprache von NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

---

## Satz

NFAs mit  $\varepsilon$ -Übergängen akzeptieren genau die regulären Sprachen.

# Sprache von NFAs mit $\epsilon$ -Übergängen

---

## Satz

NFAs mit  $\epsilon$ -Übergängen akzeptieren genau die regulären Sprachen.

## Beweis

- ⊇ Wir zeigen zuerst, dass jede reguläre Sprache  $L$  von einem NFA mit  $\epsilon$ -Übergängen akzeptiert wird.

# Sprache von NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

## Satz

NFAs mit  $\varepsilon$ -Übergängen akzeptieren genau die regulären Sprachen.

## Beweis

⊇ Wir zeigen zuerst, dass jede reguläre Sprache  $L$  von einem NFA mit  $\varepsilon$ -Übergängen akzeptiert wird.

$L$  wird von einem NFA  $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$  ohne  $\varepsilon$ -Übergänge akzeptiert. Sei  $M' = (Z, \Sigma, \delta', S, E)$  ein NFA mit  $\varepsilon$ -Übergängen, wobei

$$\begin{aligned}\delta'(z, a) &:= \delta(z, a) \quad \text{für } a \in \Sigma \\ \delta'(z, \varepsilon) &:= \emptyset\end{aligned}$$

# Sprache von NFAs mit $\epsilon$ -Übergängen

## Satz

NFAs mit  $\epsilon$ -Übergängen akzeptieren genau die regulären Sprachen.

## Beweis

⊇ Wir zeigen zuerst, dass jede reguläre Sprache  $L$  von einem NFA mit  $\epsilon$ -Übergängen akzeptiert wird.

$L$  wird von einem NFA  $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$  ohne  $\epsilon$ -Übergänge akzeptiert. Sei  $M' = (Z, \Sigma, \delta', S, E)$  ein NFA mit  $\epsilon$ -Übergängen, wobei

$$\begin{aligned}\delta'(z, a) &:= \delta(z, a) \quad \text{für } a \in \Sigma \\ \delta'(z, \epsilon) &:= \emptyset\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt  $L(M') = L(M) = L$ .

# Sprache von NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

---

## **Beweis** (Fortsetzung)

- ⊆ Sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$  ein NFA mit  $\varepsilon$ -Übergängen.  
Wir zeigen, dass  $L(M)$  ist regulär.

# Sprache von NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

## **Beweis** (Fortsetzung)

⊆ Sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$  ein NFA mit  $\varepsilon$ -Übergängen.

Wir zeigen, dass  $L(M)$  ist regulär.

Wir konstruieren einen NFA  $M'$  ohne  $\varepsilon$ -Übergänge mit  $L(M') = L(M)$ . Dann ist  $L(M')$  regulär, daher ist auch  $L(M)$  regulär.

# Sprache von NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

## **Beweis** (Fortsetzung)

⊆ Sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$  ein NFA mit  $\varepsilon$ -Übergängen.

Wir zeigen, dass  $L(M)$  ist regulär.

Wir konstruieren einen NFA  $M'$  ohne  $\varepsilon$ -Übergänge mit  $L(M') = L(M)$ . Dann ist  $L(M')$  regulär, daher ist auch  $L(M)$  regulär.

Sei  $M' = (Z, \Sigma, \delta', S', E)$  mit

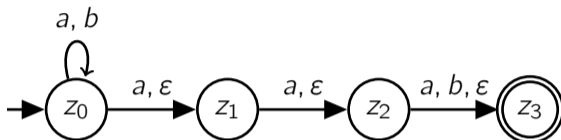
$$S' := \varepsilon\text{-Hülle}(S)$$

$$\delta'(z, a) := \varepsilon\text{-Hülle}(\delta(z, a))$$

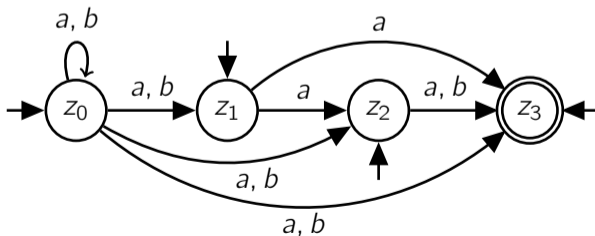


# Beispiel für die Elimination von $\epsilon$ -Übergängen

NFA  $M$  mit  $\epsilon$ -Übergängen:

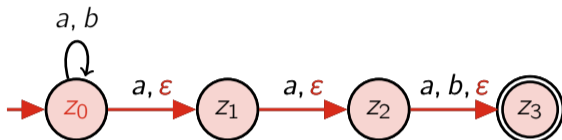


NFA  $M'$  ohne  $\epsilon$ -Übergänge:

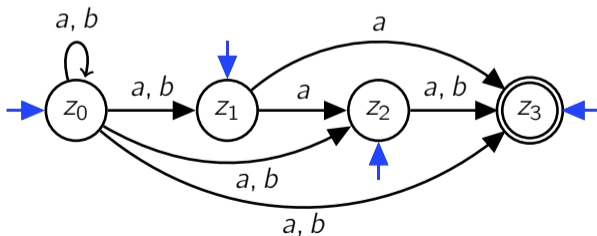


# Beispiel für die Elimination von $\epsilon$ -Übergängen

NFA  $M$  mit  $\epsilon$ -Übergängen:

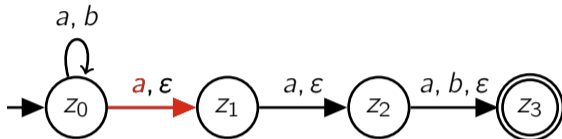


NFA  $M'$  ohne  $\epsilon$ -Übergänge:

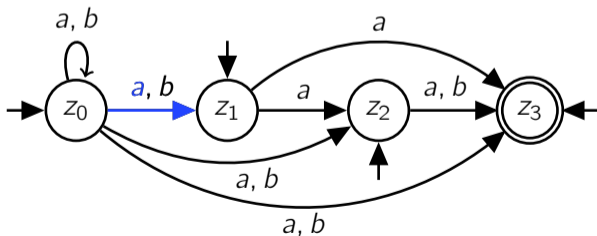


# Beispiel für die Elimination von $\epsilon$ -Übergängen

NFA  $M$  mit  $\epsilon$ -Übergängen:

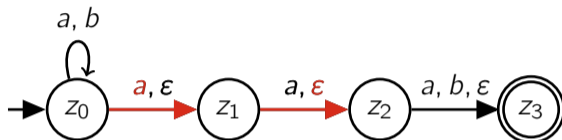


NFA  $M'$  ohne  $\epsilon$ -Übergänge:

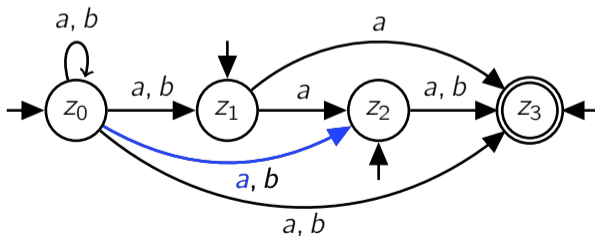


# Beispiel für die Elimination von $\epsilon$ -Übergängen

NFA  $M$  mit  $\epsilon$ -Übergängen:

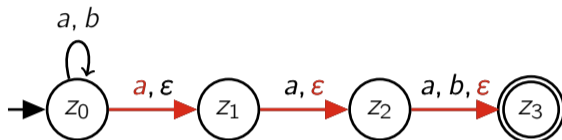


NFA  $M'$  ohne  $\epsilon$ -Übergänge:

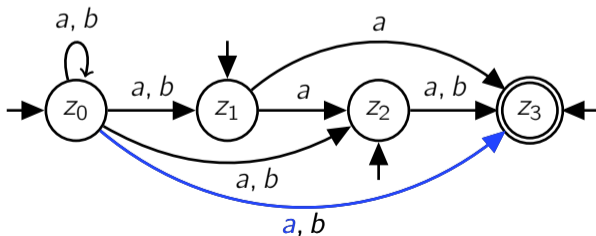


# Beispiel für die Elimination von $\epsilon$ -Übergängen

NFA  $M$  mit  $\epsilon$ -Übergängen:



NFA  $M'$  ohne  $\epsilon$ -Übergänge:



# Sprache von NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

---

## **Beweis** (Fortsetzung)

Wir müssen zeigen, dass  $L(M') = L(M)$ , d.h.  $w \in L(M')$  g.d.w.  $w \in L(M)$ .

# Sprache von NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

---

**Beweis** (Fortsetzung)

Wir müssen zeigen, dass  $L(M') = L(M)$ , d.h.  $w \in L(M')$  g.d.w.  $w \in L(M)$ .

$w \in L(M')$

# Sprache von NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

## **Beweis** (Fortsetzung)

Wir müssen zeigen, dass  $L(M') = L(M)$ , d.h.  $w \in L(M')$  g.d.w.  $w \in L(M)$ .

$w \in L(M')$   
g.d.w.  $\tilde{\delta}'(\varepsilon\text{-Hülle}(S), w) \cap E \neq \emptyset$



# Sprache von NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

## **Beweis** (Fortsetzung)

Wir müssen zeigen, dass  $L(M') = L(M)$ , d.h.  $w \in L(M')$  g.d.w.  $w \in L(M)$ .

$w \in L(M')$   
g.d.w.  $\tilde{\delta}'(\varepsilon\text{-Hülle}(S), w) \cap E \neq \emptyset$

$w \in L(M)$

# Sprache von NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

## **Beweis** (Fortsetzung)

Wir müssen zeigen, dass  $L(M') = L(M)$ , d.h.  $w \in L(M')$  g.d.w.  $w \in L(M)$ .

$w \in L(M')$   
g.d.w.  $\tilde{\delta}'(\varepsilon\text{-Hülle}(S), w) \cap E \neq \emptyset$

$\tilde{\delta}(\varepsilon\text{-Hülle}(S), w) \cap E \neq \emptyset$   
g.d.w.  $w \in L(M)$

# Sprache von NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

## Beweis (Fortsetzung)

Wir müssen zeigen, dass  $L(M') = L(M)$ , d.h.  $w \in L(M')$  g.d.w.  $w \in L(M)$ .

g.d.w.  $w \in L(M')$   
g.d.w.  $\tilde{\delta}'(\varepsilon\text{-Hülle}(S), w) \cap E \neq \emptyset$

g.d.w.  $\tilde{\delta}(\varepsilon\text{-Hülle}(S), w) \cap E \neq \emptyset$  (weil  $\tilde{\delta}' = \tilde{\delta}$ )

g.d.w.  $w \in L(M)$

# Sprache von NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

## **Beweis** (Fortsetzung)

Es bleibt zu zeigen, dass  $\tilde{\delta}' = \tilde{\delta}$ , d.h.  $\tilde{\delta}'(X, w) = \tilde{\delta}(X, w)$  für alle  $X, w$ .

Wir verwenden Induktion über die Wortlänge  $|w|$ .

# Sprache von NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

## **Beweis** (Fortsetzung)

Es bleibt zu zeigen, dass  $\tilde{\delta}' = \tilde{\delta}$ , d.h.  $\tilde{\delta}'(X, w) = \tilde{\delta}(X, w)$  für alle  $X, w$ .

Wir verwenden Induktion über die Wortlänge  $|w|$ .

- ▶ Fall  $w = \varepsilon$ :  $\tilde{\delta}'(X, \varepsilon) = X = \tilde{\delta}(X, \varepsilon)$ .

# Sprache von NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

## **Beweis** (Fortsetzung)

Es bleibt zu zeigen, dass  $\tilde{\delta}' = \tilde{\delta}$ , d.h.  $\tilde{\delta}'(X, w) = \tilde{\delta}(X, w)$  für alle  $X, w$ .

Wir verwenden Induktion über die Wortlänge  $|w|$ .

- ▶ Fall  $w = \varepsilon$ :  $\tilde{\delta}'(X, \varepsilon) = X = \tilde{\delta}(X, \varepsilon)$ .
- ▶ Fall  $w = aw'$ : Die IH für  $w'$  ist  $\tilde{\delta}'(X, w') = \tilde{\delta}(X, w')$ .

# Sprache von NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

## Beweis (Fortsetzung)

Es bleibt zu zeigen, dass  $\tilde{\delta}' = \tilde{\delta}$ , d.h.  $\tilde{\delta}'(X, w) = \tilde{\delta}(X, w)$  für alle  $X, w$ .

Wir verwenden Induktion über die Wortlänge  $|w|$ .

- ▶ Fall  $w = \varepsilon$ :  $\tilde{\delta}'(X, \varepsilon) = X = \tilde{\delta}(X, \varepsilon)$ .
- ▶ Fall  $w = aw'$ : Die IH für  $w'$  ist  $\tilde{\delta}'(X, w') = \tilde{\delta}(X, w')$ .

$$\tilde{\delta}'(X, aw')$$

# Sprache von NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

## Beweis (Fortsetzung)

Es bleibt zu zeigen, dass  $\tilde{\delta}' = \tilde{\delta}$ , d.h.  $\tilde{\delta}'(X, w) = \tilde{\delta}(X, w)$  für alle  $X, w$ .

Wir verwenden Induktion über die Wortlänge  $|w|$ .

- ▶ Fall  $w = \varepsilon$ :  $\tilde{\delta}'(X, \varepsilon) = X = \tilde{\delta}(X, \varepsilon)$ .
- ▶ Fall  $w = aw'$ : Die IH für  $w'$  ist  $\tilde{\delta}'(X, w') = \tilde{\delta}(X, w')$ .

$$\begin{aligned} & \tilde{\delta}'(X, aw') \\ = & \tilde{\delta}'\left(\bigcup_{z \in X} \delta'(z, a), w'\right) \end{aligned} \quad (\text{Def. } \tilde{\delta}', \text{ für NFA ohne } \varepsilon\text{-Übergänge})$$



# Sprache von NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

## Beweis (Fortsetzung)

Es bleibt zu zeigen, dass  $\tilde{\delta}' = \tilde{\delta}$ , d.h.  $\tilde{\delta}'(X, w) = \tilde{\delta}(X, w)$  für alle  $X, w$ .

Wir verwenden Induktion über die Wortlänge  $|w|$ .

- ▶ Fall  $w = \varepsilon$ :  $\tilde{\delta}'(X, \varepsilon) = X = \tilde{\delta}(X, \varepsilon)$ .
- ▶ Fall  $w = aw'$ : Die IH für  $w'$  ist  $\tilde{\delta}'(X, w') = \tilde{\delta}(X, w')$ .

$$\begin{aligned} & \tilde{\delta}'(X, aw') \\ &= \tilde{\delta}'\left(\bigcup_{z \in X} \delta'(z, a), w'\right) && \text{(Def. } \tilde{\delta}', \text{ für NFA ohne } \varepsilon\text{-Übergänge)} \\ &= \tilde{\delta}'\left(\bigcup_{z \in X} \varepsilon\text{-Hülle}(\delta(z, a)), w'\right) && \text{(Def. } \delta') \end{aligned}$$

# Sprache von NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

## Beweis (Fortsetzung)

Es bleibt zu zeigen, dass  $\tilde{\delta}' = \tilde{\delta}$ , d.h.  $\tilde{\delta}'(X, w) = \tilde{\delta}(X, w)$  für alle  $X, w$ .

Wir verwenden Induktion über die Wortlänge  $|w|$ .

- ▶ Fall  $w = \varepsilon$ :  $\tilde{\delta}'(X, \varepsilon) = X = \tilde{\delta}(X, \varepsilon)$ .
- ▶ Fall  $w = aw'$ : Die IH für  $w'$  ist  $\tilde{\delta}'(X, w') = \tilde{\delta}(X, w')$ .

$$\begin{aligned} & \tilde{\delta}'(X, aw') \\ = & \tilde{\delta}'\left(\bigcup_{z \in X} \delta'(z, a), w'\right) && \text{(Def. } \tilde{\delta}', \text{ für NFA ohne } \varepsilon\text{-Übergänge)} \\ = & \tilde{\delta}'\left(\bigcup_{z \in X} \varepsilon\text{-Hülle}(\delta(z, a)), w'\right) && \text{(Def. } \delta') \end{aligned}$$

$$\tilde{\delta}(X, aw')$$

# Sprache von NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

## Beweis (Fortsetzung)

Es bleibt zu zeigen, dass  $\tilde{\delta}' = \tilde{\delta}$ , d.h.  $\tilde{\delta}'(X, w) = \tilde{\delta}(X, w)$  für alle  $X, w$ .

Wir verwenden Induktion über die Wortlänge  $|w|$ .

- ▶ Fall  $w = \varepsilon$ :  $\tilde{\delta}'(X, \varepsilon) = X = \tilde{\delta}(X, \varepsilon)$ .
- ▶ Fall  $w = aw'$ : Die IH für  $w'$  ist  $\tilde{\delta}'(X, w') = \tilde{\delta}(X, w')$ .

$$\begin{aligned} & \tilde{\delta}'(X, aw') \\ = & \tilde{\delta}'\left(\bigcup_{z \in X} \delta'(z, a), w'\right) && \text{(Def. } \tilde{\delta}', \text{ für NFA ohne } \varepsilon\text{-Übergänge)} \\ = & \tilde{\delta}'\left(\bigcup_{z \in X} \varepsilon\text{-Hülle}(\delta(z, a)), w'\right) && \text{(Def. } \delta') \\ = & \tilde{\delta}\left(\bigcup_{z \in X} \varepsilon\text{-Hülle}(\delta(z, a)), w'\right) \\ = & \tilde{\delta}(X, aw') && \text{(Def. } \tilde{\delta}, \text{ für NFA mit } \varepsilon\text{-Übergängen)} \end{aligned}$$

# Sprache von NFAs mit $\varepsilon$ -Übergängen

## Beweis (Fortsetzung)

Es bleibt zu zeigen, dass  $\tilde{\delta}' = \tilde{\delta}$ , d.h.  $\tilde{\delta}'(X, w) = \tilde{\delta}(X, w)$  für alle  $X, w$ .

Wir verwenden Induktion über die Wortlänge  $|w|$ .

- ▶ Fall  $w = \varepsilon$ :  $\tilde{\delta}'(X, \varepsilon) = X = \tilde{\delta}(X, \varepsilon)$ .
- ▶ Fall  $w = aw'$ : Die IH für  $w'$  ist  $\tilde{\delta}'(X, w') = \tilde{\delta}(X, w')$ .

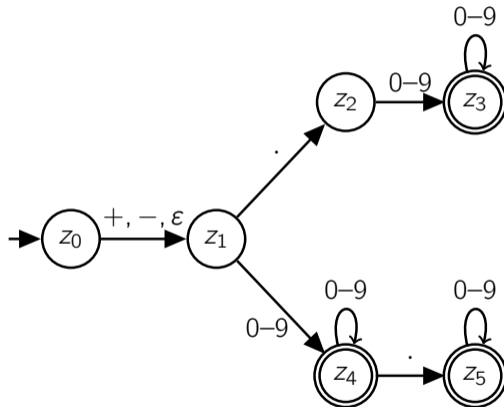
$$\begin{aligned} & \tilde{\delta}'(X, aw') \\ = & \tilde{\delta}'\left(\bigcup_{z \in X} \delta'(z, a), w'\right) && \text{(Def. } \tilde{\delta}', \text{ für NFA ohne } \varepsilon\text{-Übergänge)} \\ = & \tilde{\delta}'\left(\bigcup_{z \in X} \varepsilon\text{-Hülle}(\delta(z, a)), w'\right) && \text{(Def. } \delta') \\ = & \tilde{\delta}\left(\bigcup_{z \in X} \varepsilon\text{-Hülle}(\delta(z, a)), w'\right) && \text{(IH)} \\ = & \tilde{\delta}(X, aw') && \text{(Def. } \tilde{\delta}, \text{ für NFA mit } \varepsilon\text{-Übergängen)} \quad \square \end{aligned}$$

# Beispiel für die Konstruktion eines NFA mit $\varepsilon$ -Übergängen

Konstruiere einen NFA mit  $\varepsilon$ -Übergängen über  $\{+, -, ., 0, \dots, 9\}$ , der alle Wörter akzeptiert, die Gleitkommazahlen darstellen  
(z.B.  $+27$ ,  $-3.14$ ,  $.666$ ):

# Beispiel für die Konstruktion eines NFA mit $\varepsilon$ -Übergängen

Konstruiere einen NFA mit  $\varepsilon$ -Übergängen über  $\{+, -, ., 0, \dots, 9\}$ , der alle Wörter akzeptiert, die Gleitkommazahlen darstellen (z.B.  $+27$ ,  $-3.14$ ,  $.666$ ):



# Eindeutige Start- und Endzustände

---

## Satz

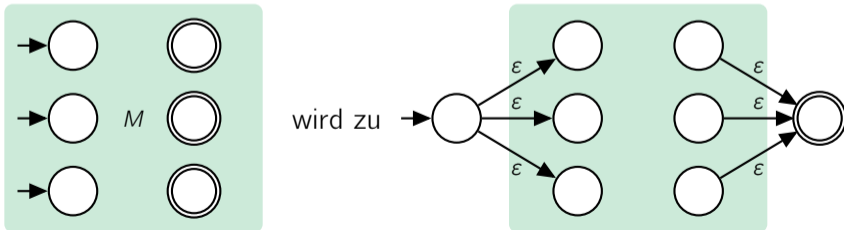
Für jeden NFA  $M$  mit  $\varepsilon$ -Übergängen gibt es einen NFA  $M'$  mit  $\varepsilon$ -Übergängen, sodass  $L(M') = L(M)$  und  $M'$  genau einen Startzustand und genau einen Endzustand hat, wobei diese beiden Zustände verschieden sind.

# Eindeutige Start- und Endzustände

## Satz

Für jeden NFA  $M$  mit  $\varepsilon$ -Übergängen gibt es einen NFA  $M'$  mit  $\varepsilon$ -Übergängen, sodass  $L(M') = L(M)$  und  $M'$  genau einen Startzustand und genau einen Endzustand hat, wobei diese beiden Zustände verschieden sind.

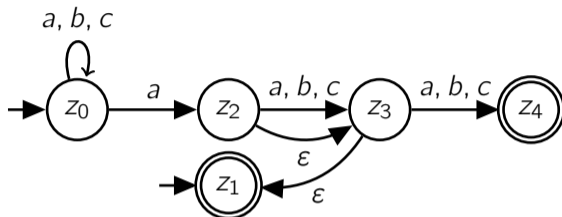
**Beweis** Konstruiere  $M'$  aus  $M$ , durch Hinzufügen eines neuen Start- und eines neuen Endzustands mit  $\varepsilon$ -Übergängen:



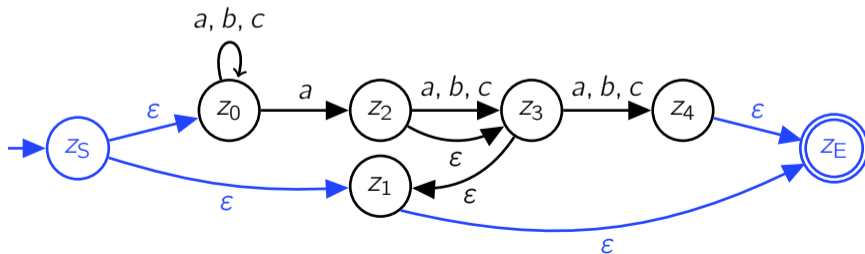
□



## Beispiel für eindeutige Start- und Endzustände



wird zu



Christopher Schaffner hat ein Web-Tool zum Üben und Anschauen entwickelt:

[chrisschaffner.github.io/graphicalInterfaceForGrammars/](https://chrisschaffner.github.io/graphicalInterfaceForGrammars/)