3b

Determinisierung von endlichen Automaten

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 10. Mai 2024
Basiert auf Folien von PD Dr. David Sabel

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis Da L regulär ist, gibt es eine reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ (mit 1. Sonderregel), sodass $L(G) = L$.

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis Da L regulär ist, gibt es eine reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ (mit 1. Sonderregel), sodass $L(G) = L$.

Wir werden einen NFA M konstruieren mit $L(M) = L(G)$.

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis Da L regulär ist, gibt es eine reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ (mit 1. Sonderregel), sodass $L(G) = L$.

Wir werden einen NFA M konstruieren mit $L(M) = L(G)$.

Sei $z_E \notin V$. Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, \{S\}, E)$ der NFA mit $Z := V \cup \{z_E\}$ und

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis Da L regulär ist, gibt es eine reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ (mit 1. Sonderregel), sodass $L(G) = L$.

Wir werden einen NFA M konstruieren mit $L(M) = L(G)$.

Sei $z_E \notin V$. Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, \{S\}, E)$ der NFA mit $Z := V \cup \{z_E\}$ und

$$E := \{z_E\} \cup \begin{cases} \{S\} & \text{falls } S \to \varepsilon \in P \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis Da L regulär ist, gibt es eine reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ (mit 1. Sonderregel), sodass $L(G) = L$.

Wir werden einen NFA M konstruieren mit $L(M) = L(G)$.

Sei $z_E \notin V$. Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, \{S\}, E)$ der NFA mit $Z := V \cup \{z_E\}$ und

$$E := \{z_E\} \cup \begin{cases} \{S\} & \text{falls } S \to \varepsilon \in P \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\delta(A, a) := \{B \mid A \to aB \in P\}$$

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis Da L regulär ist, gibt es eine reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ (mit 1. Sonderregel), sodass $L(G) = L$.

Wir werden einen NFA M konstruieren mit $L(M) = L(G)$.

Sei $z_E \notin V$. Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, \{S\}, E)$ der NFA mit $Z := V \cup \{z_E\}$ und

$$E := \{z_E\} \cup \begin{cases} \{S\} & \text{falls } S \to \varepsilon \in P \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \delta(A, a) := &\{B \mid A \to aB \in P\} \\ &\cup \{z_E \mid A \to a \in P\} \end{aligned}$$

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis Da L regulär ist, gibt es eine reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ (mit 1. Sonderregel), sodass $L(G) = L$.

Wir werden einen NFA M konstruieren mit $L(M) = L(G)$.

Sei $z_E \notin V$. Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, \{S\}, E)$ der NFA mit $Z := V \cup \{z_E\}$ und

$$E := \{z_E\} \cup \begin{cases} \{S\} & \text{falls } S \to \varepsilon \in P \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \delta(A, a) &:= \{B \mid A \to aB \in P\} \\ &\ \cup \{z_E \mid A \to a \in P\} \\ \delta(z_E, a) &:= \emptyset \end{aligned}$$

Beispiel für die Konstruktion eines NFA aus einer Grammatik

Reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{S &\to aA \mid bA \mid cA \mid aB, \\ A &\to aA \mid bA \mid cA \mid aB, \\ B &\to aC \mid bC \mid cC, \\ C &\to a \mid b \mid c\} \end{aligned}$$

Beispiel für die Konstruktion eines NFA aus einer Grammatik

Reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{S &\to aA \mid bA \mid cA \mid aB, \\ A &\to aA \mid bA \mid cA \mid aB, \\ B &\to aC \mid bC \mid cC, \\ C &\to a \mid b \mid c\} \end{aligned}$$

Ableitung des Wortes $baca$:
$S \Rightarrow bA \Rightarrow baB \Rightarrow bacC \Rightarrow baca \in L(G)$

Beispiel für die Konstruktion eines NFA aus einer Grammatik

Reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{S &\to aA \mid bA \mid cA \mid aB, \\ A &\to aA \mid bA \mid cA \mid aB, \\ B &\to aC \mid bC \mid cC, \\ C &\to a \mid b \mid c\} \end{aligned}$$

Ableitung des Wortes $baca$:
$S \Rightarrow bA \Rightarrow baB \Rightarrow bacC \Rightarrow baca \in L(G)$

NFA zu G: $M = (\{S, A, B, C, z_E\}, \Sigma, \delta, \{S\}, \{z_E\})$ mit

$$\begin{array}{lllll} \delta(S,a) = \{A,B\} & \delta(A,a) = \{A,B\} & \delta(B,a) = \{C\} & \delta(C,a) = \{z_E\} & \delta(z_E,a) = \emptyset \\ \delta(S,b) = \{A\} & \delta(A,b) = \{A\} & \delta(B,b) = \{C\} & \delta(C,b) = \{z_E\} & \delta(z_E,b) = \emptyset \\ \delta(S,c) = \{A\} & \delta(A,c) = \{A\} & \delta(B,c) = \{C\} & \delta(C,c) = \{z_E\} & \delta(z_E,c) = \emptyset \end{array}$$

Beispiel für die Konstruktion eines NFA aus einer Grammatik

Reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{S &\to aA \mid bA \mid cA \mid aB, \\ A &\to aA \mid bA \mid cA \mid aB, \\ B &\to aC \mid bC \mid cC, \\ C &\to a \mid b \mid c\} \end{aligned}$$

Ableitung des Wortes $baca$:
$S \Rightarrow bA \Rightarrow baB \Rightarrow bacC \Rightarrow baca \in L(G)$

NFA zu G: $M = (\{S, A, B, C, z_E\}, \Sigma, \delta, \{S\}, \{z_E\})$ mit

$\delta(S, a) = \{A, B\}$	$\delta(A, a) = \{A, B\}$	$\delta(B, a) = \{C\}$	$\delta(C, a) = \{z_E\}$	$\delta(z_E, a) = \emptyset$
$\delta(S, b) = \{A\}$	$\delta(A, b) = \{A\}$	$\delta(B, b) = \{C\}$	$\delta(C, b) = \{z_E\}$	$\delta(z_E, b) = \emptyset$
$\delta(S, c) = \{A\}$	$\delta(A, c) = \{A\}$	$\delta(B, c) = \{C\}$	$\delta(C, c) = \{z_E\}$	$\delta(z_E, c) = \emptyset$

Beispiel für die Konstruktion eines NFA aus einer Grammatik

Reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$
\begin{aligned}
P = \{S &\to aA \mid bA \mid cA \mid aB, \\
A &\to aA \mid bA \mid cA \mid aB, \\
B &\to aC \mid bC \mid cC, \\
C &\to a \mid b \mid c\}
\end{aligned}
$$

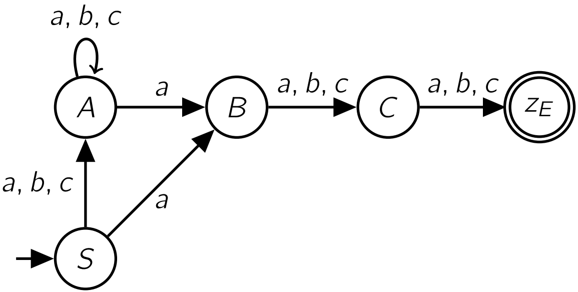
Ableitung des Wortes $baca$:
$S \Rightarrow bA \Rightarrow baB \Rightarrow bacC \Rightarrow baca \in L(G)$

NFA zu G: $M = (\{S, A, B, C, z_E\}, \Sigma, \delta, \{S\}, \{z_E\})$ mit

$$
\begin{array}{lllll}
\delta(S, a) = \{A, B\} & \delta(A, a) = \{A, B\} & \delta(B, a) = \{C\} & \delta(C, a) = \{z_E\} & \delta(z_E, a) = \emptyset \\
\delta(S, b) = \{A\} & \delta(A, b) = \{A\} & \delta(B, b) = \{C\} & \delta(C, b) = \{z_E\} & \delta(z_E, b) = \emptyset \\
\delta(S, c) = \{A\} & \delta(A, c) = \{A\} & \delta(B, c) = \{C\} & \delta(C, c) = \{z_E\} & \delta(z_E, c) = \emptyset
\end{array}
$$

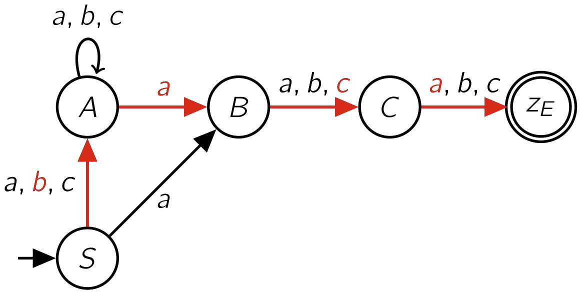
Beispiel für die Konstruktion eines NFA aus einer Grammatik

Zustandsgraph zu M:



Beispiel für die Konstruktion eines NFA aus einer Grammatik

Zustandsgraph zu M:



Eingabe: baca $\in L(M)$

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen, dass $L(M) = L(G)$,
d.h. $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L(G)$ für ein beliebiges w.

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen, dass $L(M) = L(G)$,
d.h. $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L(G)$ für ein beliebiges w.

- Fall $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L(M)$ g.d.w. $S \in E$ g.d.w. $S \to \varepsilon \in P$ g.d.w. $\varepsilon \in L(G)$.

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen, dass $L(M) = L(G)$,
d.h. $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L(G)$ für ein beliebiges w.

- Fall $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L(M)$ g.d.w. $S \in E$ g.d.w. $S \to \varepsilon \in P$ g.d.w. $\varepsilon \in L(G)$.
- Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen, dass $L(M) = L(G)$,
d.h. $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L(G)$ für ein beliebiges w.

- Fall $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L(M)$ g.d.w. $S \in E$ g.d.w. $S \to \varepsilon \in P$ g.d.w. $\varepsilon \in L(G)$.
- Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:

  $a_1 \cdots a_n \in L(M)$

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen, dass $L(M) = L(G)$,
d.h. $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L(G)$ für ein beliebiges w.

- Fall $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L(M)$ g.d.w. $S \in E$ g.d.w. $S \to \varepsilon \in P$ g.d.w. $\varepsilon \in L(G)$.
- Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:

  $$a_1 \cdots a_n \in L(M)$$

  g.d.w. es gibt einen Lauf $S \xrightarrow{a_1} A_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{a_n} z_E$

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen, dass $L(M) = L(G)$,
d.h. $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L(G)$ für ein beliebiges w.

- Fall $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L(M)$ g.d.w. $S \in E$ g.d.w. $S \to \varepsilon \in P$ g.d.w. $\varepsilon \in L(G)$.
- Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:

  $a_1 \cdots a_n \in L(M)$

  g.d.w. es gibt einen Lauf $S \xrightarrow{a_1} A_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{a_n} z_E$

  g.d.w. es gibt Zustände $A_1, \ldots, A_{n-1}$ mit $A_1 \in \delta(S, a_1)$, $A_i \in \delta(A_{i-1}, a_i)$ für $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ und $z_E \in \delta(A_{n-1}, a_n)$

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen, dass $L(M) = L(G)$,
d.h. $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L(G)$ für ein beliebiges w.

- Fall $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L(M)$ g.d.w. $S \in E$ g.d.w. $S \to \varepsilon \in P$ g.d.w. $\varepsilon \in L(G)$.
- Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:

  $a_1 \cdots a_n \in L(M)$
  g.d.w. es gibt einen Lauf $S \xrightarrow{a_1} A_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{a_n} z_E$
  g.d.w. es gibt Zustände $A_1, \ldots, A_{n-1}$ mit $A_1 \in \delta(S, a_1)$, $A_i \in \delta(A_{i-1}, a_i)$
  für $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ und $z_E \in \delta(A_{n-1}, a_n)$

  $a_1 \cdots a_n \in L(G)$

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen, dass $L(M) = L(G)$,
d.h. $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L(G)$ für ein beliebiges w.

- Fall $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L(M)$ g.d.w. $S \in E$ g.d.w. $S \to \varepsilon \in P$ g.d.w. $\varepsilon \in L(G)$.
- Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:

$a_1 \cdots a_n \in L(M)$

g.d.w. es gibt einen Lauf $S \xrightarrow{a_1} A_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{a_n} z_E$

g.d.w. es gibt Zustände $A_1, \ldots, A_{n-1}$ mit $A_1 \in \delta(S, a_1)$, $A_i \in \delta(A_{i-1}, a_i)$ für $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ und $z_E \in \delta(A_{n-1}, a_n)$

$S \Rightarrow_G a_1 A_1 \Rightarrow_G \cdots \Rightarrow_G a_1 \cdots a_{n-1} A_{n-1} \Rightarrow_G a_1 \cdots a_n$

g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(G)$

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen, dass $L(M) = L(G)$,
d.h. $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L(G)$ für ein beliebiges w.

- Fall $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L(M)$ g.d.w. $S \in E$ g.d.w. $S \to \varepsilon \in P$ g.d.w. $\varepsilon \in L(G)$.
- Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:

  $a_1 \cdots a_n \in L(M)$

  g.d.w. es gibt einen Lauf $S \xrightarrow{a_1} A_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{a_n} z_E$

  g.d.w. es gibt Zustände $A_1, \ldots, A_{n-1}$ mit $A_1 \in \delta(S, a_1)$, $A_i \in \delta(A_{i-1}, a_i)$ für $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ und $z_E \in \delta(A_{n-1}, a_n)$

  g.d.w. $S \Rightarrow_G a_1 A_1 \Rightarrow_G \cdots \Rightarrow_G a_1 \cdots a_{n-1} A_{n-1} \Rightarrow_G a_1 \cdots a_n$

  g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(G)$

Reguläre Sprachen werden von NFAs akzeptiert

Theorem

Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.

Beweis (Fortsetzung) Wir zeigen, dass $L(M) = L(G)$,
d.h. $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L(G)$ für ein beliebiges w.

- Fall $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L(M)$ g.d.w. $S \in E$ g.d.w. $S \to \varepsilon \in P$ g.d.w. $\varepsilon \in L(G)$.
- Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:

  $a_1 \cdots a_n \in L(M)$

  g.d.w. es gibt einen Lauf $S \xrightarrow{a_1} A_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{a_n} z_E$

  g.d.w. es gibt Zustände $A_1, \ldots, A_{n-1}$ mit $A_1 \in \delta(S, a_1)$, $A_i \in \delta(A_{i-1}, a_i)$
  für $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ und $z_E \in \delta(A_{n-1}, a_n)$

  g.d.w. $S \Rightarrow_G a_1 A_1 \Rightarrow_G \cdots \Rightarrow_G a_1 \cdots a_{n-1} A_{n-1} \Rightarrow_G a_1 \cdots a_n$

  g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(G)$

  Daher gibt es einen NFA M mit $L(M) = L(G) = L$. $\square$

NFAs in DFAs transformieren

Theorem (Rabin und Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

NFAs in DFAs transformieren

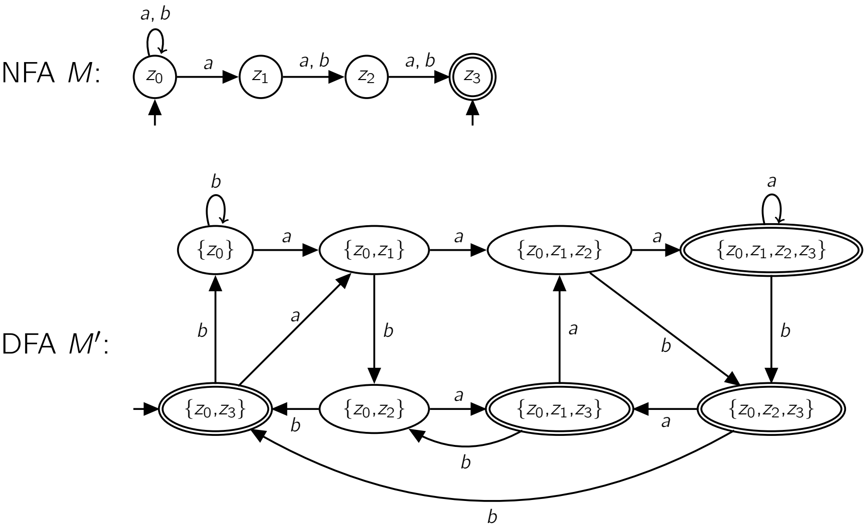
Theorem (Rabin und Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Der Beweis basiert auf der Potenzmengenkonstruktion:

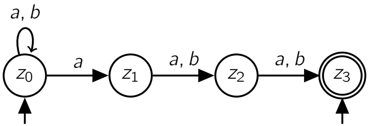
- Konstruiere für einen gegebenen NFA M einen DFA M',
  sodass sich der DFA alle Zustände merkt, in denen der NFA sein könnte.
- Jede Teilmenge von Zuständen des NFAs wird zu einem Zustand des DFA.
- Da Z endlich ist, gibt es nur endlich viele Teilmengen.

Beispiel für die Potenzmengenkonstruktion



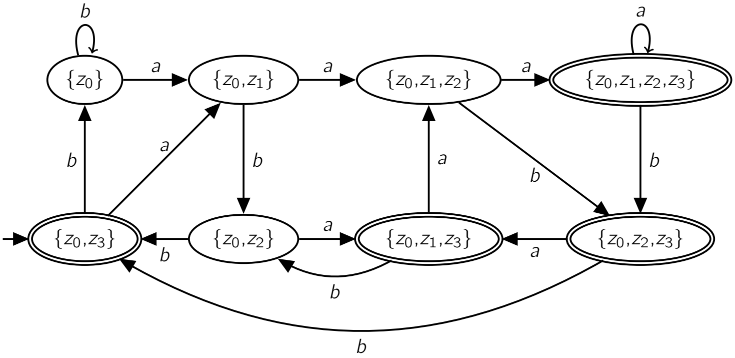
Beispiel für die Potenzmengenkonstruktion

NFA M:



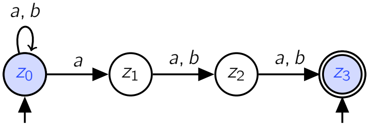
Eingabe: *babbabb*

DFA M':



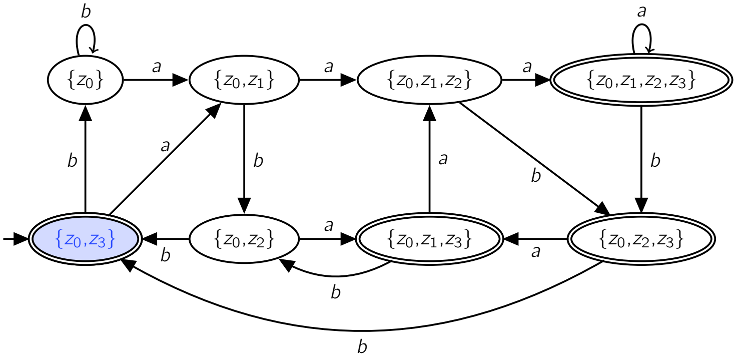
Beispiel für die Potenzmengenkonstruktion

NFA M:



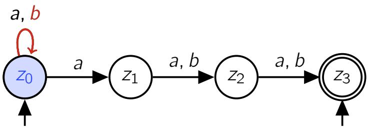
Eingabe: $babbabb$

DFA M':



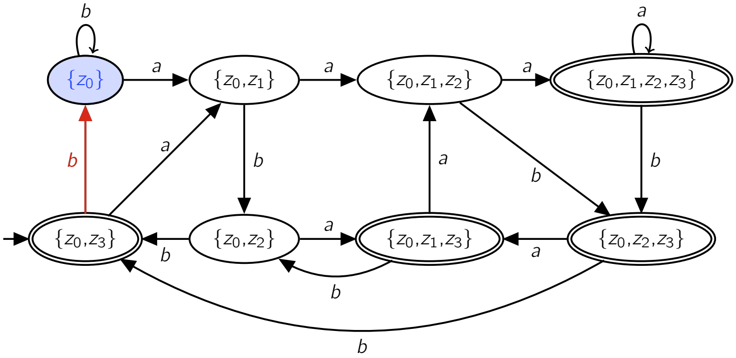
Beispiel für die Potenzmengenkonstruktion

NFA M:



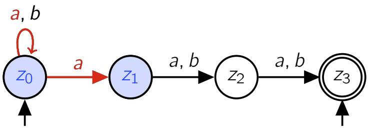
Eingabe: *babbabb*

DFA M':



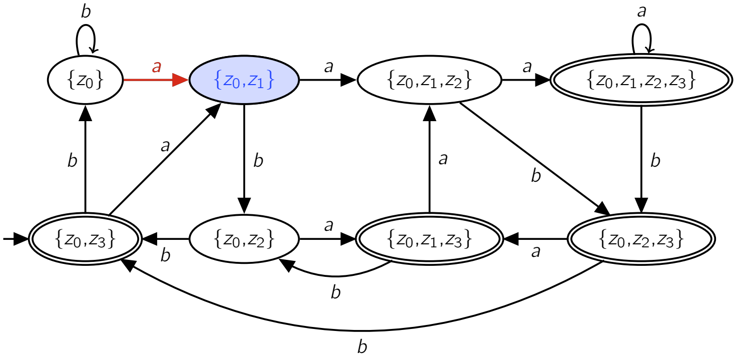
Beispiel für die Potenzmengenkonstruktion

NFA M:



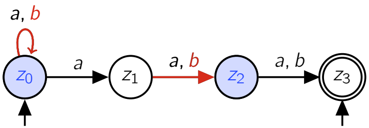
Eingabe: $babbabb$

DFA M':



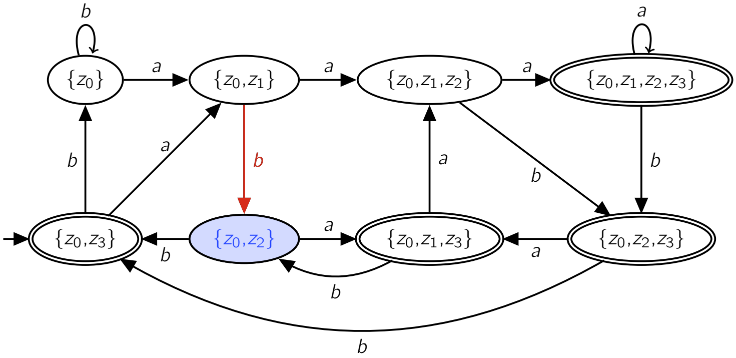
Beispiel für die Potenzmengenkonstruktion

NFA M:



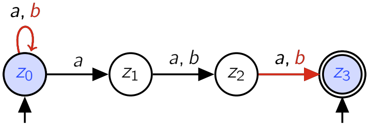
Eingabe: $babbabb$

DFA M':



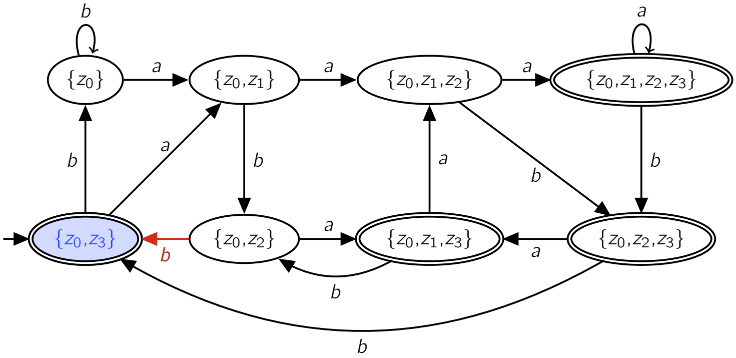
Beispiel für die Potenzmengenkonstruktion

NFA M:



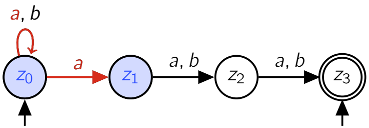
Eingabe: $babbabb$

DFA M':



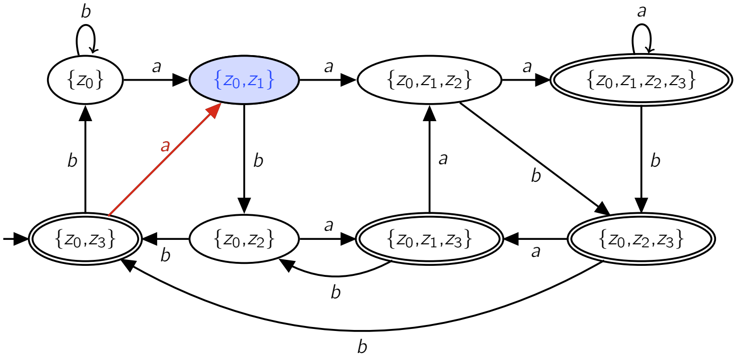
Beispiel für die Potenzmengenkonstruktion

NFA M:



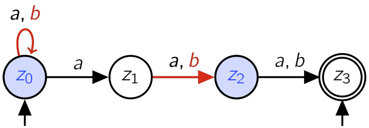
Eingabe: $babbabb$

DFA M':



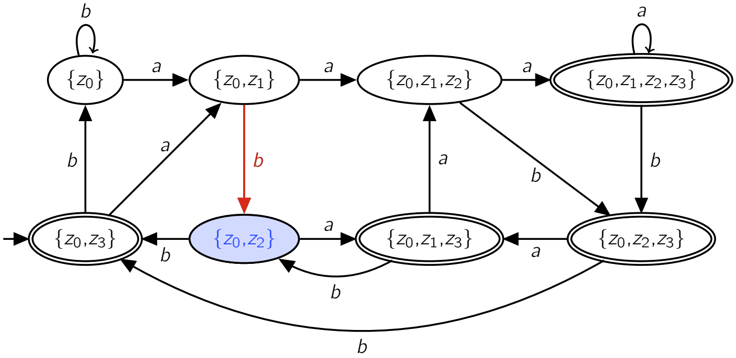
Beispiel für die Potenzmengenkonstruktion

NFA M:



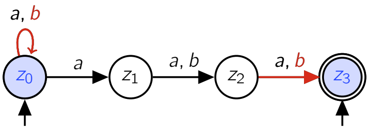
Eingabe: $babbabb$

DFA M':



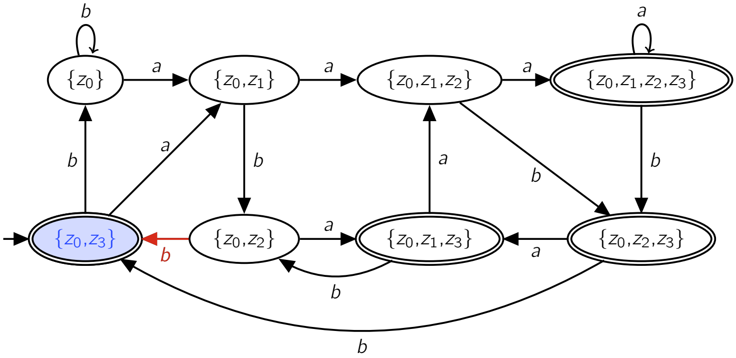
Beispiel für die Potenzmengenkonstruktion

NFA M:



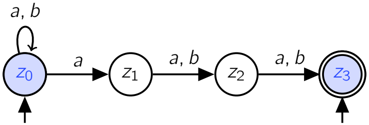
Eingabe: $babbabb$

DFA M':



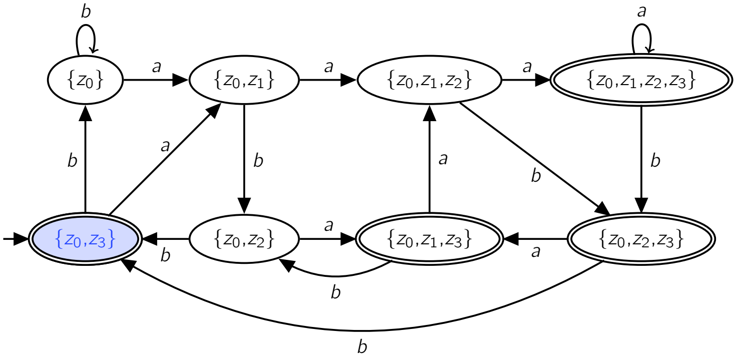
Beispiel für die Potenzmengenkonstruktion

NFA M:



Eingabe: $babbabb \begin{array}{l} \in L(M) \\ \in L(M') \end{array}$

DFA M':



Potenzmengenkonstruktion

Für den NFA $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ definieren wir den DFA $M' = (Z', \Sigma, \delta', S', E')$ mit

- $Z' := \mathcal{P}(Z)$
- $S' := S$
- $E' := \{X \in Z' \mid E \cap X \neq \emptyset\}$
- $\delta'(X, a) := \left(\bigcup_{z \in X} \delta(z, a)\right) = \widetilde{\delta}(X, a)$

Potenzmengenkonstruktion

Für den NFA $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ definieren wir den DFA $M' = (Z', \Sigma, \delta', S', E')$ mit

- $Z' := \mathcal{P}(Z)$
  Die Zustandsmenge ist die Potenzmenge von Z.
- $S' := S$
  Der Startzustand ist die Menge S aller Startzustände von M.
- $E' := \{X \in Z' \mid E \cap X \neq \emptyset\}$
  Jede Menge, die mindestens einen Endzustand von M enthält, ist Endzustand.
- $\delta'(X, a) := \left(\bigcup_{z \in X} \delta(z, a)\right) = \widetilde{\delta}(X, a)$
  Die Übergangsfunktion berechnet alle von einem Zustand in X aus über a erreichbaren Zustände.

NFAs in DFAs transformieren

Theorem (Rabin und Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

NFAs in DFAs transformieren

Theorem (Rabin und Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Beweis Wir zeigen, dass $L(M') = L(M)$,
d.h. $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L(M')$ für ein beliebiges w.

NFAs in DFAs transformieren

Theorem (Rabin und Scott 1959)

Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Beweis Wir zeigen, dass $L(M') = L(M)$,
d.h. $w \in L(M)$ g.d.w. $w \in L(M')$ für ein beliebiges w.

- Fall $w = \varepsilon$: $\varepsilon \in L(M)$ g.d.w. $S \cap E \neq \emptyset$ g.d.w. $S \in E'$ g.d.w. $\varepsilon \in L(M')$.

NFAs in DFAs transformieren

Beweis (Fortsetzung)

- Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:
  Zu zeigen: $a_1 \cdots a_n \in L(M)$ g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(M')$.

NFAs in DFAs transformieren

Beweis (Fortsetzung)

- Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:
  Zu zeigen: $a_1 \cdots a_n \in L(M)$ g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(M')$.

  $a_1 \cdots a_n \in L(M)$

NFAs in DFAs transformieren

Beweis (Fortsetzung)

- Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:
  Zu zeigen: $a_1 \cdots a_n \in L(M)$ g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(M')$.

  $$a_1 \cdots a_n \in L(M)$$
  g.d.w. $\widetilde{\delta}(S, a_1 \cdots a_n) \cap E \neq \emptyset$

NFAs in DFAs transformieren

Beweis (Fortsetzung)

- Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:
  Zu zeigen: $a_1 \cdots a_n \in L(M)$ g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(M')$.

  $a_1 \cdots a_n \in L(M)$
  g.d.w. $\widetilde{\delta}(S, a_1 \cdots a_n) \cap E \neq \emptyset$
  g.d.w. es gibt $Z_1, \ldots, Z_n \subseteq Z$ mit $\left(\bigcup_{z \in S} \delta(z, a_1)\right) = Z_1$,
  $\left(\bigcup_{z \in Z_{i-1}} \delta(z, a_i)\right) = Z_i$ für $i \in \{2, \ldots, n\}$ und $Z_n \cap E \neq \emptyset$

NFAs in DFAs transformieren

Beweis (Fortsetzung)

- Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:
  Zu zeigen: $a_1 \cdots a_n \in L(M)$ g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(M')$.

  $$\begin{aligned} & a_1 \cdots a_n \in L(M) \\ \text{g.d.w. } & \widetilde{\delta}(S, a_1 \cdots a_n) \cap E \neq \emptyset \\ \text{g.d.w. } & \text{es gibt } Z_1, \ldots, Z_n \subseteq Z \text{ mit } \left(\bigcup_{z \in S} \delta(z, a_1)\right) = Z_1, \\ & \left(\bigcup_{z \in Z_{i-1}} \delta(z, a_i)\right) = Z_i \text{ für } i \in \{2, \ldots, n\} \text{ und } Z_n \cap E \neq \emptyset \end{aligned}$$

  $$a_1 \cdots a_n \in L(M')$$

NFAs in DFAs transformieren

Beweis (Fortsetzung)

- Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:
  Zu zeigen: $a_1 \cdots a_n \in L(M)$ g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(M')$.

  $a_1 \cdots a_n \in L(M)$
  g.d.w. $\widetilde{\delta}(S, a_1 \cdots a_n) \cap E \neq \emptyset$
  g.d.w. es gibt $Z_1, \ldots, Z_n \subseteq Z$ mit $\left(\bigcup_{z \in S} \delta(z, a_1)\right) = Z_1$,
  $\left(\bigcup_{z \in Z_{i-1}} \delta(z, a_i)\right) = Z_i$ für $i \in \{2, \ldots, n\}$ und $Z_n \cap E \neq \emptyset$

  $\widetilde{\delta}'(S', a_1 \cdots a_n) \in E'$
  g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(M')$

NFAs in DFAs transformieren

Beweis (Fortsetzung)

- Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:
  Zu zeigen: $a_1 \cdots a_n \in L(M)$ g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(M')$.

  $a_1 \cdots a_n \in L(M)$
  g.d.w. $\widetilde{\delta}(S, a_1 \cdots a_n) \cap E \neq \emptyset$
  g.d.w. es gibt $Z_1, \ldots, Z_n \subseteq Z$ mit $\left(\bigcup_{z \in S} \delta(z, a_1)\right) = Z_1$,
  $\left(\bigcup_{z \in Z_{i-1}} \delta(z, a_i)\right) = Z_i$ für $i \in \{2, \ldots, n\}$ und $Z_n \cap E \neq \emptyset$
  es gibt $Z_1, \ldots, Z_n \subseteq Z$ mit $\delta'(S, a_1) = Z_1$,
  $\delta'(Z_{i-1}, a_i) = Z_i$ für $i \in \{2, \ldots, n\}$ und $Z_n \cap E \neq \emptyset$
  g.d.w. $\widetilde{\delta}'(S', a_1 \cdots a_n) \in E'$
  g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(M')$

NFAs in DFAs transformieren

Beweis (Fortsetzung)

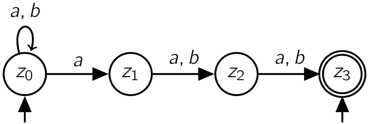
- Fall $w = a_1 \cdots a_n$ mit $n > 0$:
  Zu zeigen: $a_1 \cdots a_n \in L(M)$ g.d.w. $a_1 \cdots a_n \in L(M')$.

$$
\begin{aligned}
& a_1 \cdots a_n \in L(M) \\
\text{g.d.w. } & \widetilde{\delta}(S, a_1 \cdots a_n) \cap E \neq \emptyset \\
\text{g.d.w. } & \text{es gibt } Z_1, \ldots, Z_n \subseteq Z \text{ mit } \left(\bigcup_{z \in S} \delta(z, a_1)\right) = Z_1, \\
& \left(\bigcup_{z \in Z_{i-1}} \delta(z, a_i)\right) = Z_i \text{ für } i \in \{2, \ldots, n\} \text{ und } Z_n \cap E \neq \emptyset \\
\text{g.d.w. } & \text{es gibt } Z_1, \ldots, Z_n \subseteq Z \text{ mit } \delta'(S, a_1) = Z_1, \\
& \delta'(Z_{i-1}, a_i) = Z_i \text{ für } i \in \{2, \ldots, n\} \text{ und } Z_n \cap E \neq \emptyset \\
\text{g.d.w. } & \widetilde{\delta}'(S', a_1 \cdots a_n) \in E' \\
\text{g.d.w. } & a_1 \cdots a_n \in L(M')
\end{aligned}
$$

□

Beispiel für die Ausführung der Potenzmengenkonstruktion

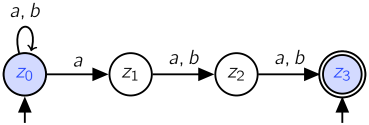
NFA M:



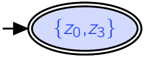
DFA M':

Beispiel für die Ausführung der Potenzmengenkonstruktion

NFA M:

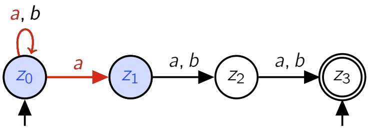


DFA M':

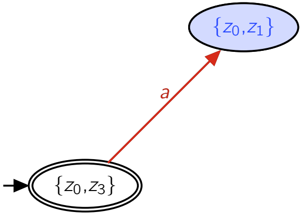


Beispiel für die Ausführung der Potenzmengenkonstruktion

NFA M:

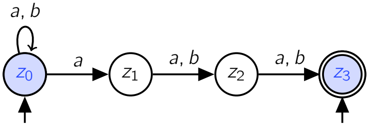


DFA M':

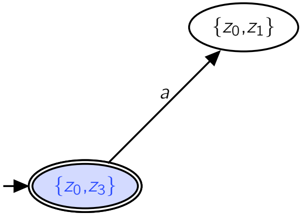


Beispiel für die Ausführung der Potenzmengenkonstruktion

NFA M:

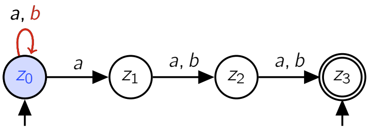


DFA M':

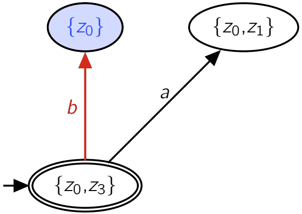


Beispiel für die Ausführung der Potenzmengenkonstruktion

NFA M:

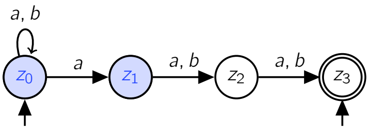


DFA M':

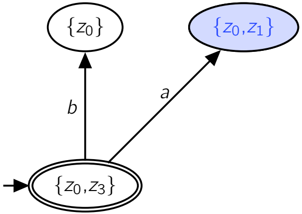


Beispiel für die Ausführung der Potenzmengenkonstruktion

NFA M:

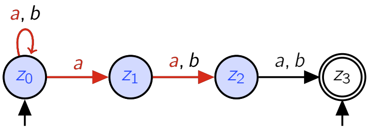


DFA M':

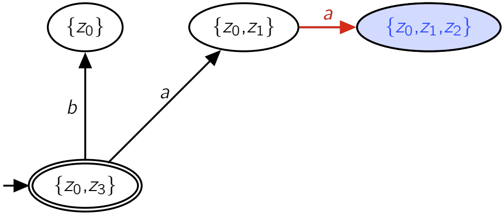


Beispiel für die Ausführung der Potenzmengenkonstruktion

NFA M:

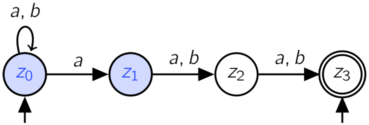


DFA M':

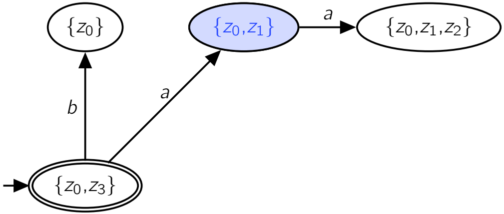


Beispiel für die Ausführung der Potenzmengenkonstruktion

NFA M:

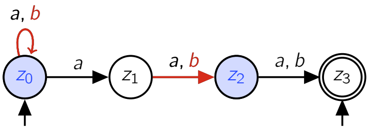


DFA M':

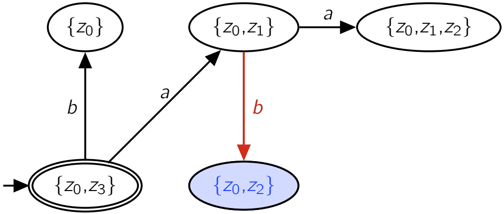


Beispiel für die Ausführung der Potenzmengenkonstruktion

NFA M:

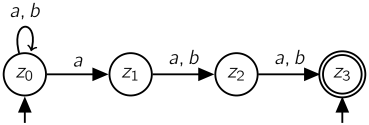


DFA M':

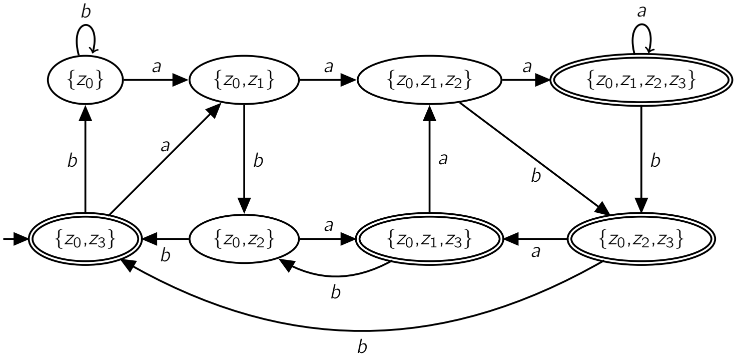


Beispiel für die Ausführung der Potenzmengenkonstruktion

NFA M:



DFA M':



Äquivalenz von regulären Sprachen und von DFAs bzw. NFAs

Theorem

DFAs und NFAs akzeptieren genau die regulären Sprachen.

Äquivalenz von regulären Sprachen und von DFAs bzw. NFAs

Theorem

DFAs und NFAs akzeptieren genau die regulären Sprachen.

Beweis

$\supseteq$ Für jede reguläre Sprache gibt es einen DFA bzw. NFA, der sie erkennt.
Das folgt aus:

- Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.
- Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

Äquivalenz von regulären Sprachen und von DFAs bzw. NFAs

Theorem

DFAs und NFAs akzeptieren genau die regulären Sprachen.

Beweis

$\supseteq$ Für jede reguläre Sprache gibt es einen DFA bzw. NFA, der sie erkennt.
Das folgt aus:

- Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NFA M mit $L(M) = L$.
- Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.

$\subseteq$ Die akzeptierte Sprache eines DFA bzw. NFA ist regulär.
Das folgt aus:

- Jede von einem NFA akzeptierte Sprache ist auch durch einen DFA akzeptierbar.
- Sei M ein DFA. Dann ist $L(M)$ regulär. $\square$

Größe des DFA vs. NFA

- Sei ein NFA mit n Zuständen.
- Der durch die Potenzmengenkonstruktion erstellte DFA hat 2^n Zustände.
  Der Platz explodiert uns.
- Geht es besser?

Größe des DFA vs. NFA

- Sei ein NFA mit n Zuständen.
- Der durch die Potenzmengenkonstruktion erstellte DFA hat 2^n Zustände.
  Der Platz explodiert uns.
- Geht es besser? Nicht wirklich.

Größe des DFA vs. NFA

Lemma

Sei $L = \{uav \mid u \in \Sigma^*, v \in \Sigma^{n-1}\}$ für $\Sigma = \{a, b\}$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$
(d.h. die Sprache aller Wörter aus Σ^*, die an n-letzter Stelle ein a haben).

1. Es gibt einen NFA M mit $L(M) = L$ und M hat $n + 1$ Zustände.
2. Jeder DFA M' mit $L(M') = L$ hat mindestens 2^n Zustände.

Größe des DFA vs. NFA

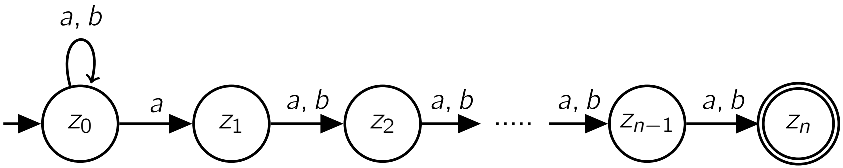
Lemma

Sei $L = \{uav \mid u \in \Sigma^*, v \in \Sigma^{n-1}\}$ für $\Sigma = \{a, b\}$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$
(d.h. die Sprache aller Wörter aus Σ^*, die an n-letzter Stelle ein a haben).

1. Es gibt einen NFA M mit $L(M) = L$ und M hat $n + 1$ Zustände.
2. Jeder DFA M' mit $L(M') = L$ hat mindestens 2^n Zustände.

Beweis

1. Sei M der folgende NFA:



Größe des DFA vs. NFA

Beweis (Fortsetzung)

2. Durch Widerspruch.

Größe des DFA vs. NFA

Beweis (Fortsetzung)

2. Durch Widerspruch.

   Wir nehmen an, es gibt einen DFA $M' = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L = \{uav \mid u \in \Sigma^*, v \in \Sigma^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$.

Größe des DFA vs. NFA

Beweis (Fortsetzung)

2. Durch Widerspruch.

   Wir nehmen an, es gibt einen DFA $M' = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L = \{uav \mid u \in \Sigma^*, v \in \Sigma^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$.

   Die Menge Σ^n enthält 2^n Wörter der Länge n und da $|Z| < 2^n$, muss es $w, w' \in \Sigma^n$ geben mit $w \neq w'$ und $\widetilde{\delta}(z_0, w) = \widetilde{\delta}(z_0, w') = z$.

Größe des DFA vs. NFA

Beweis (Fortsetzung)

2. Durch Widerspruch.

   Wir nehmen an, es gibt einen DFA $M' = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L = \{uav \mid u \in \Sigma^*, v \in \Sigma^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$.

   Die Menge Σ^n enthält 2^n Wörter der Länge n und da $|Z| < 2^n$, muss es $w, w' \in \Sigma^n$ geben mit $w \neq w'$ und $\widetilde{\delta}(z_0, w) = \widetilde{\delta}(z_0, w') = z$.

   Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$ die erste Position, an der sich w und w' unterscheiden.

Größe des DFA vs. NFA

Beweis (Fortsetzung)

2. Durch Widerspruch.

   Wir nehmen an, es gibt einen DFA $M' = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L = \{uav \mid u \in \Sigma^*, v \in \Sigma^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$.

   Die Menge Σ^n enthält 2^n Wörter der Länge n und da $|Z| < 2^n$, muss es $w, w' \in \Sigma^n$ geben mit $w \neq w'$ und $\widetilde{\delta}(z_0, w) = \widetilde{\delta}(z_0, w') = z$.

   Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$ die erste Position, an der sich w und w' unterscheiden.

   w ist von der Form uav und w' ist von der Form ubv' (oder umgekehrt) mit $|v| = |v'| = n - j$. Da $\widetilde{\delta}(z_0, uav) = \widetilde{\delta}(z_0, ubv') = z$, muss dann gelten $\widetilde{\delta}(z_0, uavb^{j-1}) = \widetilde{\delta}(z_0, ubv'b^{j-1}) = z'$ für einen Zustand z'.

Größe des DFA vs. NFA

Beweis (Fortsetzung)

2. Durch Widerspruch.

   Wir nehmen an, es gibt einen DFA $M' = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ mit $L(M') = L = \{uav \mid u \in \Sigma^*, v \in \Sigma^{n-1}\}$ und $|Z| < 2^n$.

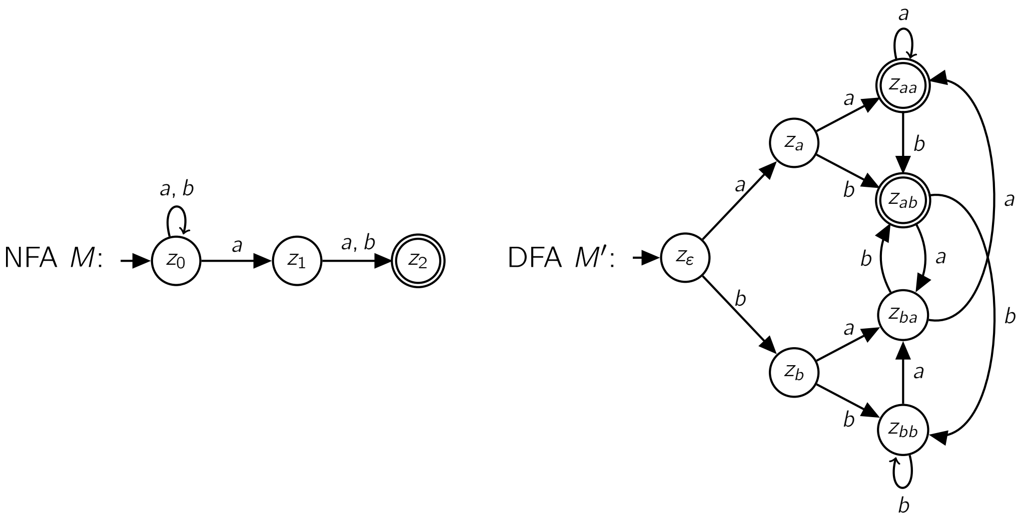
   Die Menge Σ^n enthält 2^n Wörter der Länge n und da $|Z| < 2^n$, muss es $w, w' \in \Sigma^n$ geben mit $w \neq w'$ und $\widetilde{\delta}(z_0, w) = \widetilde{\delta}(z_0, w') = z$.

   Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$ die erste Position, an der sich w und w' unterscheiden.

   w ist von der Form uav und w' ist von der Form ubv' (oder umgekehrt) mit $|v| = |v'| = n - j$. Da $\widetilde{\delta}(z_0, uav) = \widetilde{\delta}(z_0, ubv') = z$, muss dann gelten $\widetilde{\delta}(z_0, uavb^{j-1}) = \widetilde{\delta}(z_0, ubv'b^{j-1}) = z'$ für einen Zustand z'.

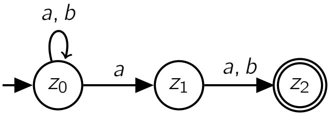
   Aber $uavb^{j-1} \in L$ und $ubv'b^{j-1} \notin L$, daher $z' \in E$ und $z' \notin E$. Widerspruch. $\square$

Beispiel wenn $n = 2$



Beispiel wenn $n = 2$

NFA M:



DFA M' (minimiert):