LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Formale Sprachen und Komplexität
Theoretische Informatik für Studierende der Medieninformatik
Sommersemester 2024

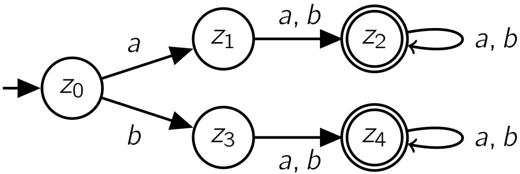
2c
Minimierung von deterministischen endlichen Automaten

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

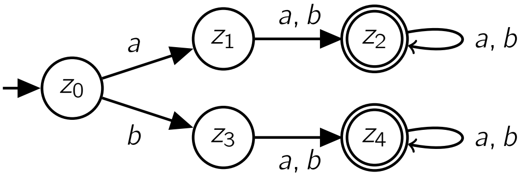
Stand: 11. Juni 2024
Basierend auf Folien von PD Dr. David Sabel

Beispiel für Minimalität

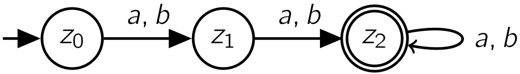
Nicht minimaler DFA: 

Beispiel für Minimalität

Nicht minimaler DFA:

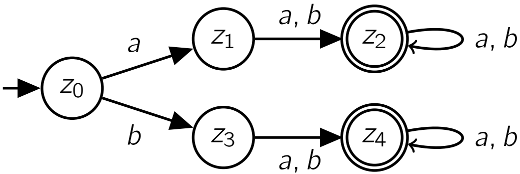


Minimaler DFA:

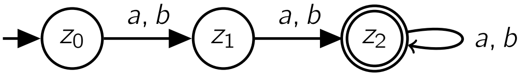


Beispiel für Minimalität

Nicht minimaler DFA:



Minimaler DFA:



Beide DFAs akzeptieren die gleiche Sprache,
aber der zweite hat weniger Zustände.

Vorteile der Minimierung von DFAs

- Minimale DFAs sind effizienter zu implementieren.
- Minimale DFAs sind oft einfacher zu verstehen oder zu analysieren.
- Da minimale DFAs (bis auf Umbenennung der Zustände) eindeutig sind, können sie Sprachen exakt darstellen.

Grundgedanke der Minimierung von DFAs

Schritte:

1. Entferne alle nicht erreichbaren Zustände.
2. Bilde eine Partition (d.h. disjunkte Zerlegung), indem jeweils alle Endzustände und alle Nicht-Endzustände verschmolzen werden.
3. Verfeinere diese Partition schrittweise, bis sie sich nicht mehr verändert.

Grundgedanke der Minimierung von DFAs

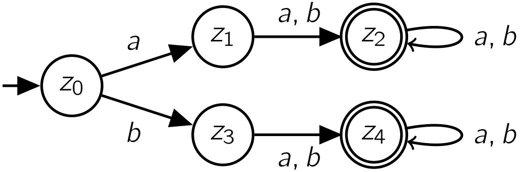
Schritte:

1. Entferne alle nicht erreichbaren Zustände.
2. Bilde eine Partition (d.h. disjunkte Zerlegung), indem jeweils alle Endzustände und alle Nicht-Endzustände verschmolzen werden.
3. Verfeinere diese Partition schrittweise, bis sie sich nicht mehr verändert.

Zwei Ansätze: graphisch und tabellarisch.

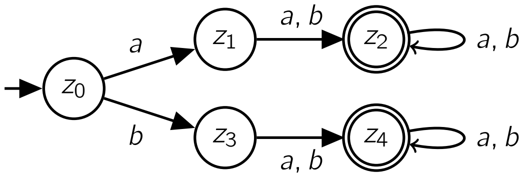
Beispiel für den graphischen Ansatz

DFA:

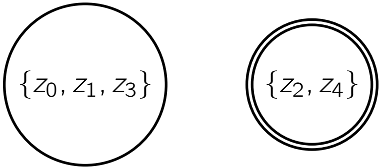


Beispiel für den graphischen Ansatz

DFA:

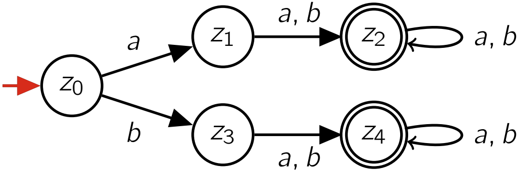


0.

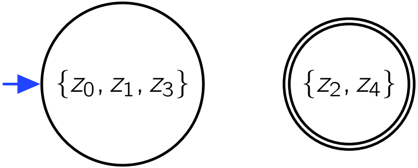


Beispiel für den graphischen Ansatz

DFA:

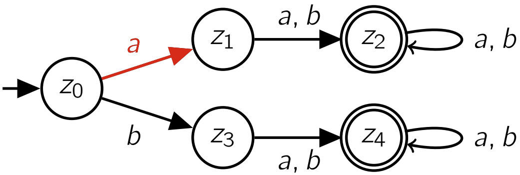


0.

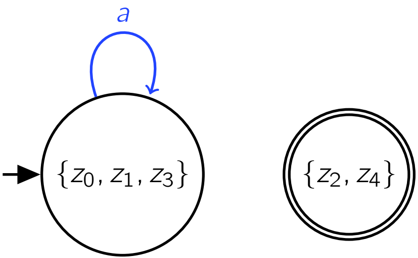


Beispiel für den graphischen Ansatz

DFA:

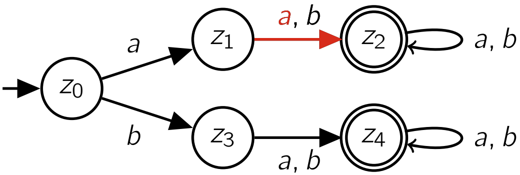


0.

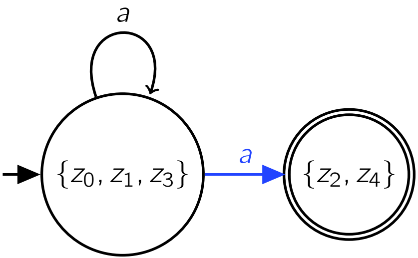


Beispiel für den graphischen Ansatz

DFA:

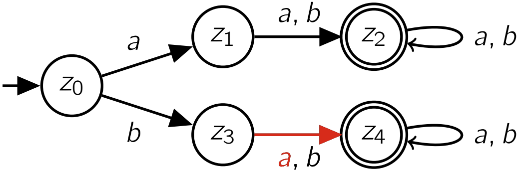


0.

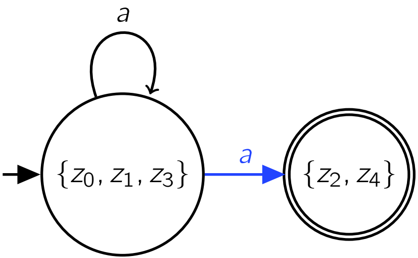


Beispiel für den graphischen Ansatz

DFA:

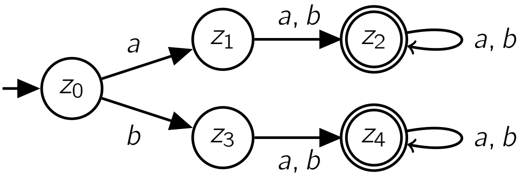


0.

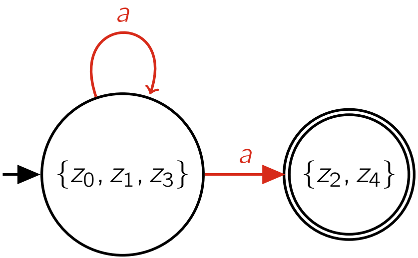


Beispiel für den graphischen Ansatz

DFA:



0.

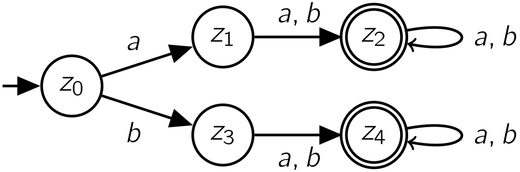


Wird kein DFA

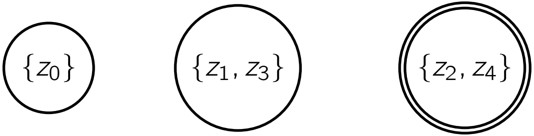
$\{z_0, z_1, z_3\}$ muss gespalten werden, damit ein DFA entsteht.

Beispiel für den graphischen Ansatz

DFA:

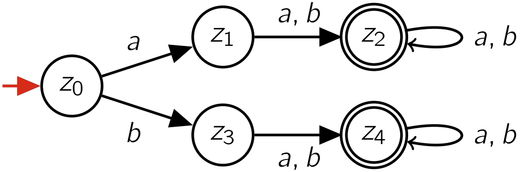


1.

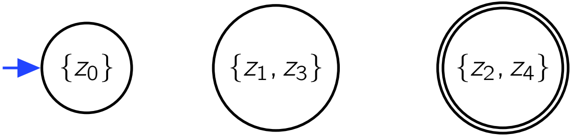


Beispiel für den graphischen Ansatz

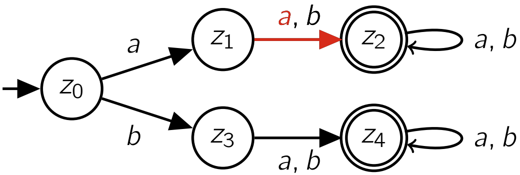
DFA:

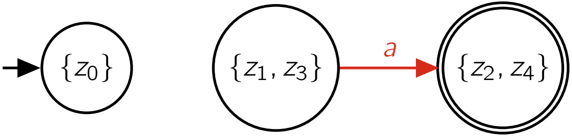


1.



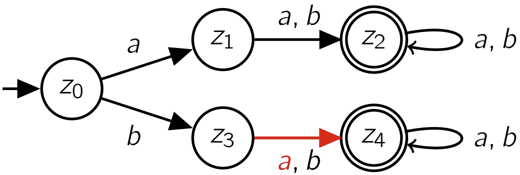
Beispiel für den graphischen Ansatz

DFA: 

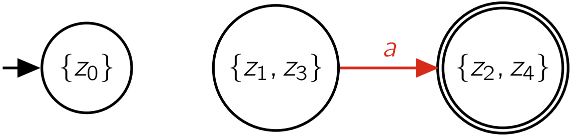
1. 

Beispiel für den graphischen Ansatz

DFA:

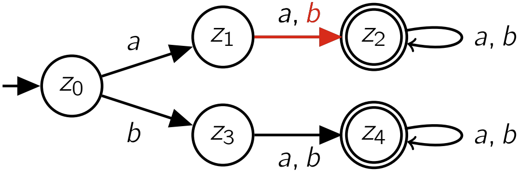


1.

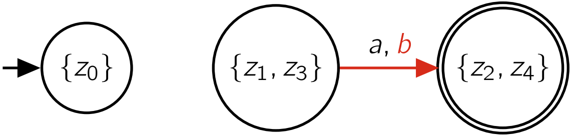


Beispiel für den graphischen Ansatz

DFA:

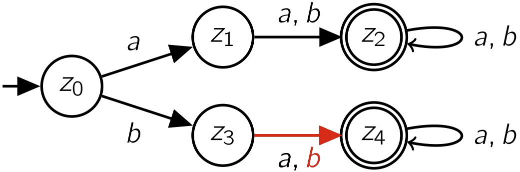


1.

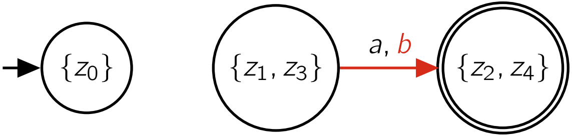


Beispiel für den graphischen Ansatz

DFA:

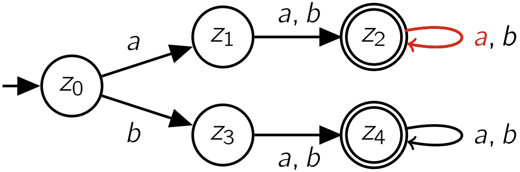


1.

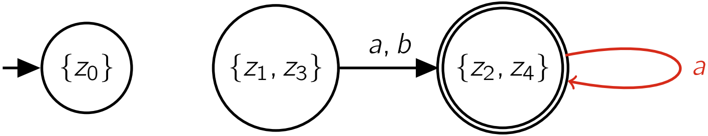


Beispiel für den graphischen Ansatz

DFA:

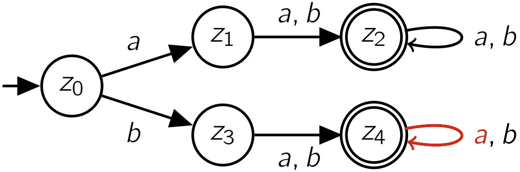


1.

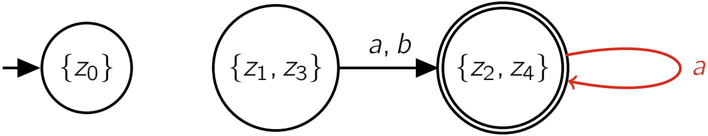


Beispiel für den graphischen Ansatz

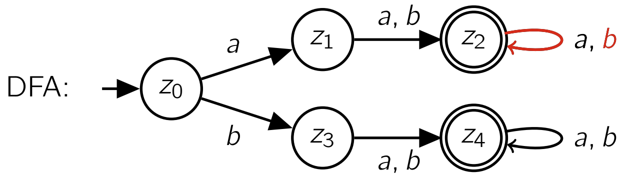
DFA:

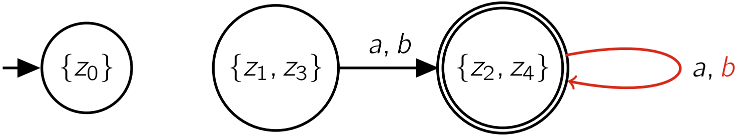


1.



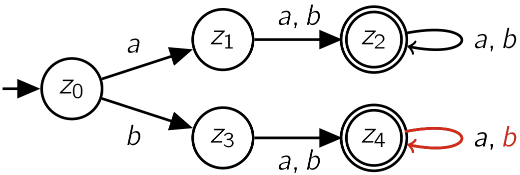
Beispiel für den graphischen Ansatz



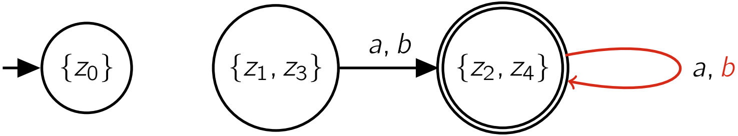
1. 

Beispiel für den graphischen Ansatz

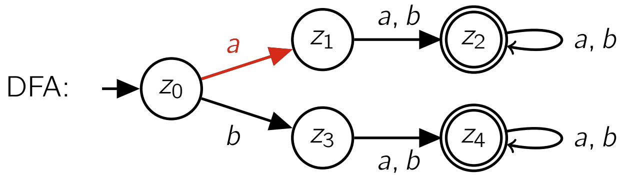
DFA:

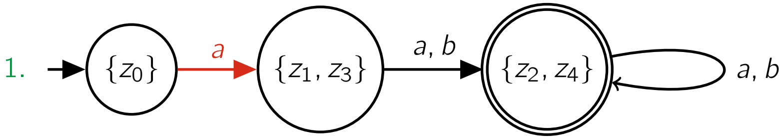


1.



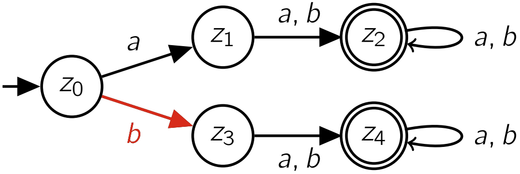
Beispiel für den graphischen Ansatz



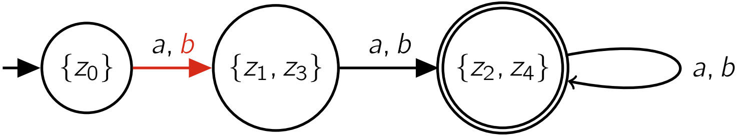


Beispiel für den graphischen Ansatz

DFA:

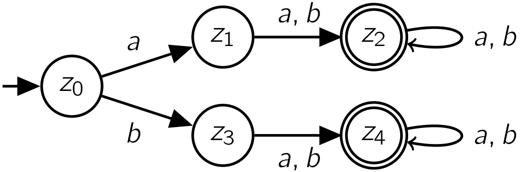


1.

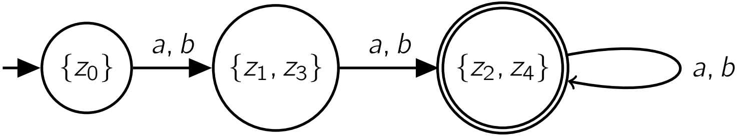


Beispiel für den graphischen Ansatz

DFA:



1.



Minimaler DFA

Minimierung eines DFAs mit dem tabellarischen Ansatz

Sei M ein DFA.

Intuitiver Ansatz:

1. Entferne alle nicht erreichbaren Zustände von M.
2. Konstruiere die Partitionstabelle.
3. Bilde den minimalen DFA M', indem Zustände derselben Klasse verschmolzen werden, basiert auf der letzten Reihe der Partitionstabelle.

Der tabellarische Ansatz

DFA $M = (Z, \Sigma, z_0, E)$

Der tabellarische Ansatz

DFA $M = (Z, \Sigma, z_0, E)$

Schritte:

2.1 Bilde eine Partition $\mathcal{P}$ von Z mit folgenden Klassen:
Endzustände E (falls nicht leer) und Nicht-Endzustände $Z \setminus E$ (falls nicht leer).

Der tabellarische Ansatz

DFA $M = (Z, \Sigma, z_0, E)$

Schritte:

2.1 Bilde eine Partition $\mathcal{P}$ von Z mit folgenden Klassen:
Endzustände E (falls nicht leer) und Nicht-Endzustände $Z \setminus E$ (falls nicht leer).

2.2 Wiederhole bis $\mathcal{P}$ sich nicht mehr verändert:

- 2.2.1 Für jede Klasse $K \in \mathcal{P}$ mit $|K| \geq 2$ und für jedes $a \in \Sigma$:
  - 2.2.1.1 Berechne für jeden Zustand $z \in K$ die Klasse $L \in \mathcal{P}$, sodass $\delta(z, a) \in L$.
  - 2.2.1.2 Partitioniere K in Teilklassen je nach L.
  - 2.2.1.3 Falls es mehrere Teilklassen gibt, ersetze K in $\mathcal{P}$ durch die Teilklassen.

Der tabellarische Ansatz

DFA $M = (Z, \Sigma, z_0, E)$

Schritte:

2.1 Bilde eine Partition $\mathcal{P}$ von Z mit folgenden Klassen:
Endzustände E (falls nicht leer) und Nicht-Endzustände $Z \setminus E$ (falls nicht leer).

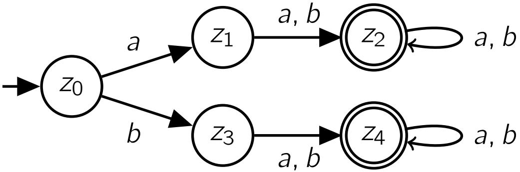
2.2 Wiederhole bis $\mathcal{P}$ sich nicht mehr verändert:

- 2.2.1 Für jede Klasse $K \in \mathcal{P}$ mit $|K| \geq 2$ und für jedes $a \in \Sigma$:
  - 2.2.1.1 Berechne für jeden Zustand $z \in K$ die Klasse $L \in \mathcal{P}$, sodass $\delta(z, a) \in L$.
  - 2.2.1.2 Partitioniere K in Teilklassen je nach L.
  - 2.2.1.3 Falls es mehrere Teilklassen gibt, ersetze K in $\mathcal{P}$ durch die Teilklassen.

Am Ende besteht $\mathcal{P}$ aus den verschmolzenen Zuständen.

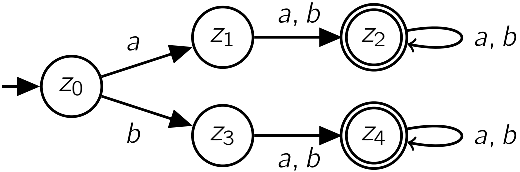
Erstes Beispiel für den tabellarischen Ansatz

DFA M:



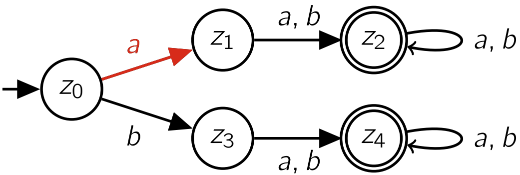
Erstes Beispiel für den tabellarischen Ansatz

DFA M:



0.	z_0	z_1	z_3	z_2	z_4

Erstes Beispiel für den tabellarischen Ansatz

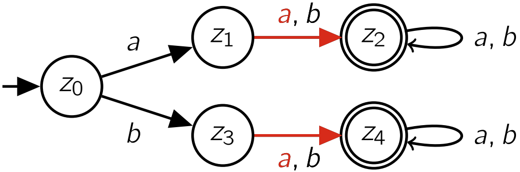
DFA M: 

0.

z_0	z_1	z_3	z_2	z_4

- z_0 mit a landet in der ersten Klasse.

Erstes Beispiel für den tabellarischen Ansatz

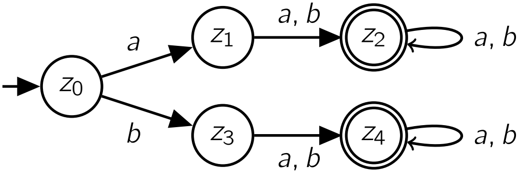
DFA M: 

0.

z_0	z_1	z_3	z_2	z_4

- z_0 mit a landet in der ersten Klasse.
- z_1 und z_3 mit a landen in der zweiten Klasse.

Erstes Beispiel für den tabellarischen Ansatz

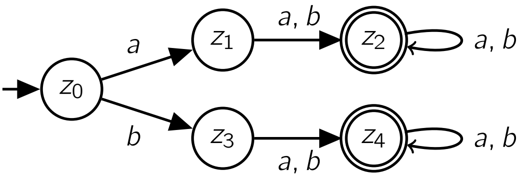
DFA M: 

0.

z_0	z_1	z_3	z_2	z_4

- z_0 mit a landet in der ersten Klasse.
- z_1 und z_3 mit a landen in der zweiten Klasse.
- z_0 muss daher von z_1 und z_3 getrennt werden.

Erstes Beispiel für den tabellarischen Ansatz

DFA M: 

0.

z_0	z_1	z_3	z_2	z_4

- z_0 mit a landet in der ersten Klasse.
- z_1 und z_3 mit a landen in der zweiten Klasse.
- z_0 muss daher von z_1 und z_3 getrennt werden.

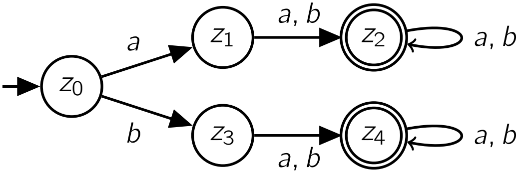
1.

z_0	z_1	z_3	z_2	z_4

mit a

Erstes Beispiel für den tabellarischen Ansatz

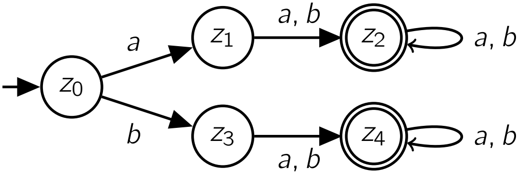
DFA M:



0. $z_0 \quad z_1 \quad z_3 \mid z_2 \quad z_4$
   - z_0 mit a landet in der ersten Klasse.
   - z_1 und z_3 mit a landen in der zweiten Klasse.
   - z_0 muss daher von z_1 und z_3 getrennt werden.
1. $z_0 \mid z_1 \quad z_3 \mid z_2 \quad z_4$ mit a
   - Keine weitere Partition möglich.

Erstes Beispiel für den tabellarischen Ansatz

DFA M:

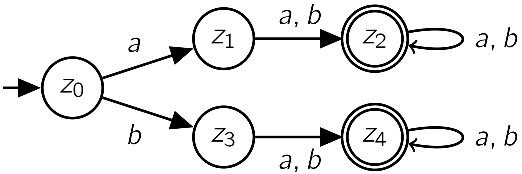


0. $z_0 \quad z_1 \quad z_3 \;\big|\; z_2 \quad z_4$
   - z_0 mit a landet in der ersten Klasse.
   - z_1 und z_3 mit a landen in der zweiten Klasse.
   - z_0 muss daher von z_1 und z_3 getrennt werden.

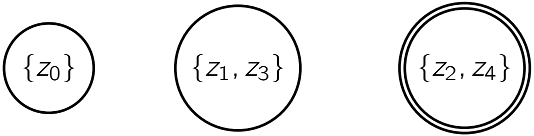
1. $z_0 \;\big|\; z_1 \quad z_3 \;\big|\; z_2 \quad z_4$ mit a
   - Keine weitere Partition möglich.
   - Der minimale DFA hat drei Zustände: $\{z_0\}$, $\{z_1, z_3\}$, $\{z_2, z_4\}$.

Beispiel für die Konstruktion des minimalen DFA

DFA M:

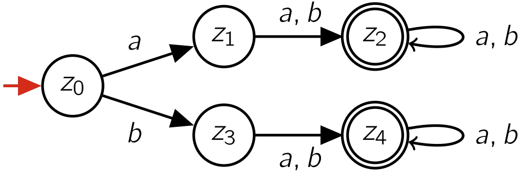


Minimaler DFA M':

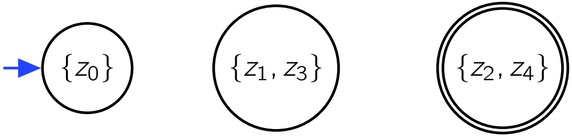


Beispiel für die Konstruktion des minimalen DFA

DFA M:



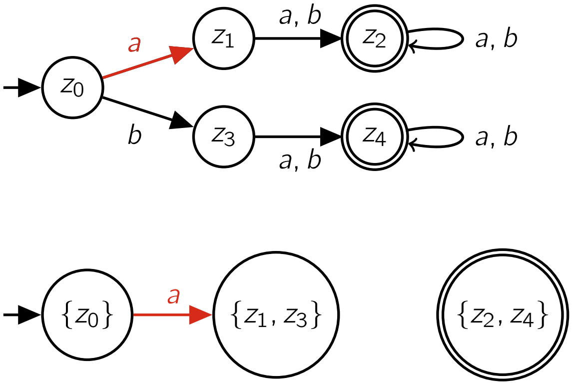
Minimaler DFA M':



Beispiel für die Konstruktion des minimalen DFA

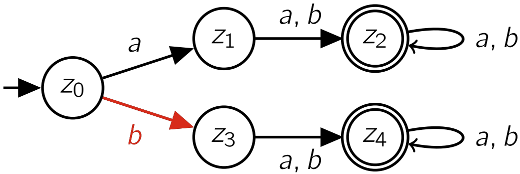
DFA M:

Minimaler DFA M':

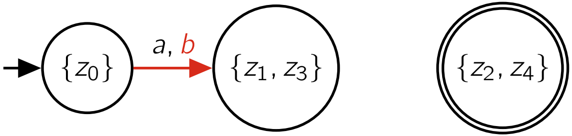


Beispiel für die Konstruktion des minimalen DFA

DFA M:

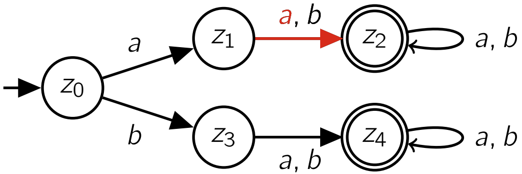


Minimaler DFA M':

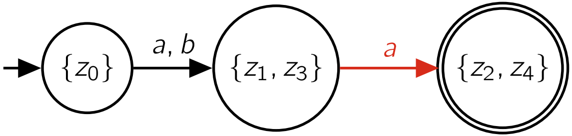


Beispiel für die Konstruktion des minimalen DFA

DFA M:

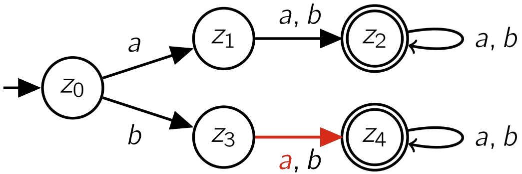


Minimaler DFA M':

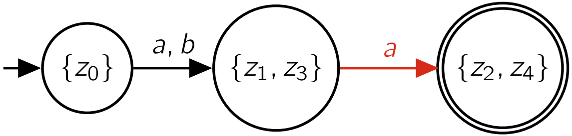


Beispiel für die Konstruktion des minimalen DFA

DFA M:

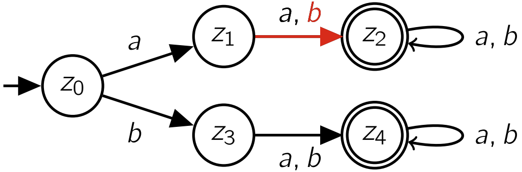


Minimaler DFA M':

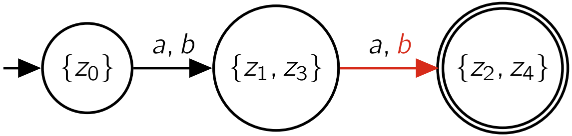


Beispiel für die Konstruktion des minimalen DFA

DFA M:

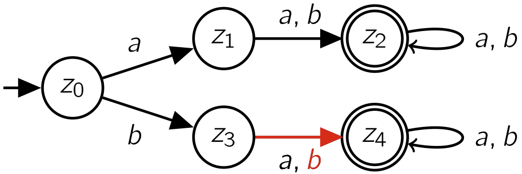


Minimaler DFA M':

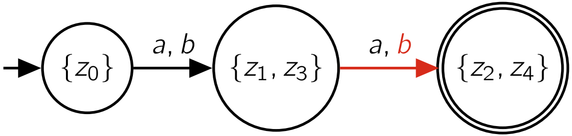


Beispiel für die Konstruktion des minimalen DFA

DFA M:

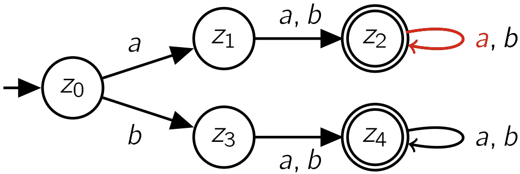


Minimaler DFA M':

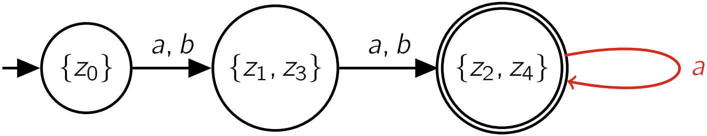


Beispiel für die Konstruktion des minimalen DFA

DFA M:

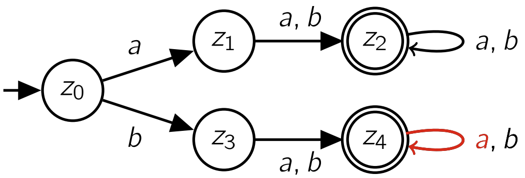


Minimaler DFA M':

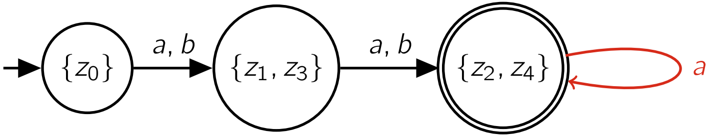


Beispiel für die Konstruktion des minimalen DFA

DFA M:

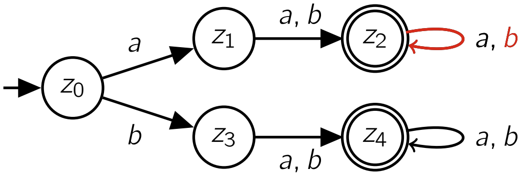


Minimaler DFA M':

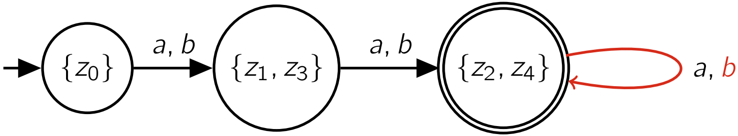


Beispiel für die Konstruktion des minimalen DFA

DFA M:

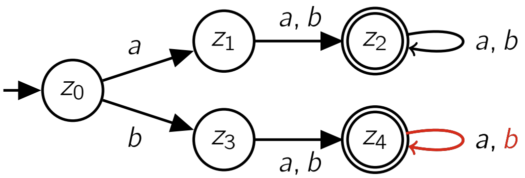


Minimaler DFA M':

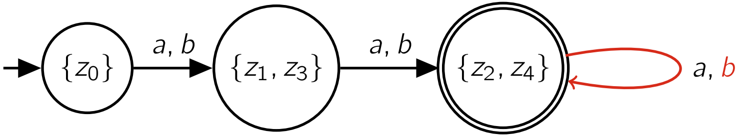


Beispiel für die Konstruktion des minimalen DFA

DFA M:

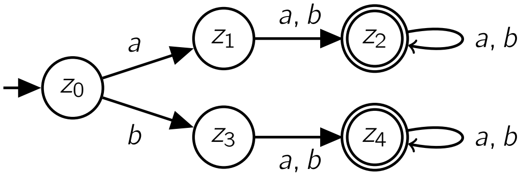


Minimaler DFA M':

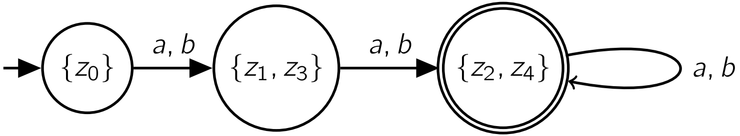


Beispiel für die Konstruktion des minimalen DFA

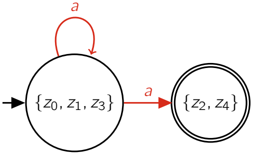
DFA M:



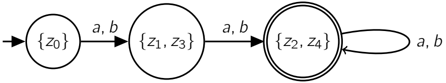
Minimaler DFA M':



Äquivalenz des graphischen und des tabellarischen Ansatzes



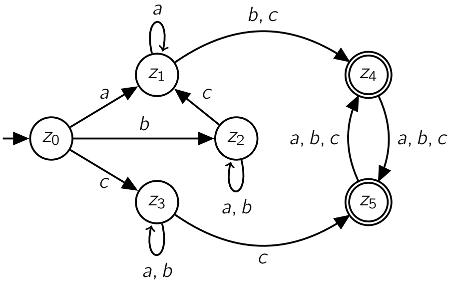
$$= \quad z_0 \quad z_1 \quad z_3 \;\Big|\; z_2 \quad z_4$$



$$= \quad z_0 \;\Big|\; z_1 \quad z_3 \;\Big|\; z_2 \quad z_4$$

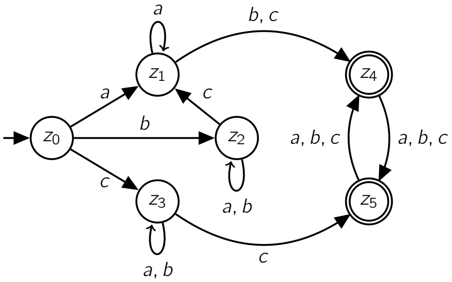
Zweites Beispiel für den tabellarischen Ansatz

DFA M:



Zweites Beispiel für den tabellarischen Ansatz

DFA M:

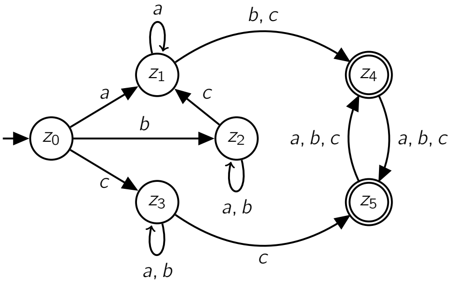


Partitionstabelle:

0.	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5

Zweites Beispiel für den tabellarischen Ansatz

DFA M:

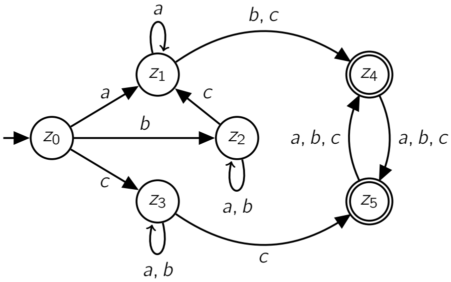


Partitionstabelle:

0. $z_0 \quad z_1 \quad z_2 \quad z_3 \;\big|\; z_4 \quad z_5$
1. $z_1 \;\big|\; z_0 \quad z_2 \quad z_3 \;\big|\; z_4 \quad z_5$ mit b

Zweites Beispiel für den tabellarischen Ansatz

DFA M:

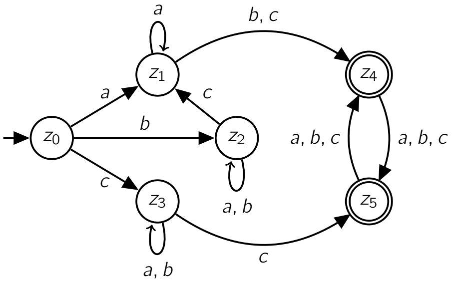


Partitionstabelle:

0.	$z_0\ z_1\ z_2\ z_3 \mid z_4\ z_5$	
1.	$z_1 \mid z_0\ z_2\ z_3 \mid z_4\ z_5$	mit b
2.	$z_1 \mid z_0 \mid z_2 \mid z_3 \mid z_4\ z_5$	mit c

Zweites Beispiel für den tabellarischen Ansatz

DFA M:



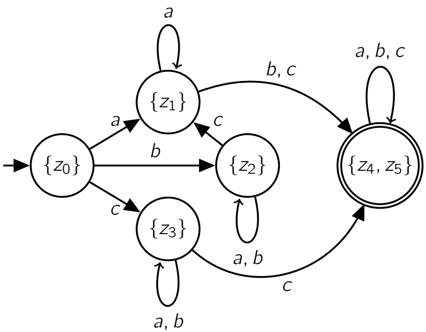
Partitionstabelle:

0. $z_0 \quad z_1 \quad z_2 \quad z_3 \mid z_4 \quad z_5$

1. $z_1 \mid z_0 \quad z_2 \quad z_3 \mid z_4 \quad z_5$ mit b

2. $z_1 \mid z_0 \mid z_2 \mid z_3 \mid z_4 \quad z_5$ mit c

Minimaler DFA M':



Äquivalenzklassenautomat

Beide Ansätze basieren auf dem Äquivalenzklassenautomaten.

Definition

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA.
Wir nennen zwei Zustände $z, z' \in Z$ äquivalent und schreiben $z \equiv_M z'$ (alternativ $z \equiv z'$), falls gilt: $\widetilde{\delta}(z, w) \in E$ g.d.w. $\widetilde{\delta}(z', w) \in E$ für alle $w \in \Sigma^*$.

Äquivalenzklassenautomat

Beide Ansätze basieren auf dem Äquivalenzklassenautomaten.

Definition

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA.
Wir nennen zwei Zustände $z, z' \in Z$ äquivalent und schreiben $z \equiv_M z'$ (alternativ $z \equiv z'$), falls gilt: $\widetilde{\delta}(z, w) \in E$ g.d.w. $\widetilde{\delta}(z', w) \in E$ für alle $w \in \Sigma^*$.

Der Äquivalenzklassenautomat zu M ist der DFA $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ mit

$$
\begin{aligned}
Z' &:= \{[z]_\equiv \mid z \in Z\} \\
z_0' &:= [z_0]_\equiv \\
E' &:= \{[z]_\equiv \mid z \in E\} \\
\delta'([z]_\equiv, a) &:= [\delta(z, a)]_\equiv
\end{aligned}
$$

Äquivalenzklassenautomat

Beide Ansätze basieren auf dem Äquivalenzklassenautomaten.

Definition

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA.
Wir nennen zwei Zustände $z, z' \in Z$ äquivalent und schreiben $z \equiv_M z'$ (alternativ $z \equiv z'$), falls gilt: $\widetilde{\delta}(z, w) \in E$ g.d.w. $\widetilde{\delta}(z', w) \in E$ für alle $w \in \Sigma^*$.

Der Äquivalenzklassenautomat zu M ist der DFA $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ mit

$$\begin{aligned} Z' &:= \{[z]_\equiv \mid z \in Z\} \\ z_0' &:= [z_0]_\equiv \\ E' &:= \{[z]_\equiv \mid z \in E\} \\ \delta'([z]_\equiv, a) &:= [\delta(z, a)]_\equiv \end{aligned}$$

Informell: Zwei Zustände sind äquivalent, wenn sie die gleiche „Sprache“ darstellen.

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Satz

Seien $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ der Äquivalenzklassenautomat zu M. Dann gilt

1. $L(M') = L(M)$.
2. Falls alle Zustände in Z von z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal, d.h. jeder DFA M'' mit $L(M'') = L(M')$ hat mindestens so viele Zustände wie M'.

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Satz

Seien $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ der Äquivalenzklassenautomat zu M. Dann gilt

1. $L(M') = L(M)$.
2. Falls alle Zustände in Z von z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal, d.h. jeder DFA M'' mit $L(M'') = L(M')$ hat mindestens so viele Zustände wie M'.

Beweis

1. Wir zeigen: $w \in L(M')$ g.d.w. $w \in L(M)$. Sei $w \in \Sigma^*$.

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Satz

Seien $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ der Äquivalenzklassenautomat zu M. Dann gilt

1. $L(M') = L(M)$.
2. Falls alle Zustände in Z von z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal, d.h. jeder DFA M'' mit $L(M'') = L(M')$ hat mindestens so viele Zustände wie M'.

Beweis

1. Wir zeigen: $w \in L(M')$ g.d.w. $w \in L(M)$. Sei $w \in \Sigma^*$.

   M durchläuft $z_0, \ldots, z_{|w|}$ entlang w und akzeptiert w g.d.w. $z_{|w|} \in E$.

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Satz

Seien $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ der Äquivalenzklassenautomat zu M. Dann gilt

1. $L(M') = L(M)$.
2. Falls alle Zustände in Z von z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal, d.h. jeder DFA M'' mit $L(M'') = L(M')$ hat mindestens so viele Zustände wie M'.

Beweis

1. Wir zeigen: $w \in L(M')$ g.d.w. $w \in L(M)$. Sei $w \in \Sigma^*$.

   M durchläuft $z_0, \ldots, z_{|w|}$ entlang w und akzeptiert w g.d.w. $z_{|w|} \in E$.
   M' durchläuft $[z_0]_\equiv, \ldots, [z_{|w|}]_\equiv$ und akzeptiert w g.d.w. $[z_{|w|}]_\equiv \in E'$.

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Satz

Seien $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ der Äquivalenzklassenautomat zu M. Dann gilt

1. $L(M') = L(M)$.
2. Falls alle Zustände in Z von z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal, d.h. jeder DFA M'' mit $L(M'') = L(M')$ hat mindestens so viele Zustände wie M'.

Beweis

1. Wir zeigen: $w \in L(M')$ g.d.w. $w \in L(M)$. Sei $w \in \Sigma^*$.

   M durchläuft $z_0, \ldots, z_{|w|}$ entlang w und akzeptiert w g.d.w. $z_{|w|} \in E$.
   M' durchläuft $[z_0]_\equiv, \ldots, [z_{|w|}]_\equiv$ und akzeptiert w g.d.w. $[z_{|w|}]_\equiv \in E'$.

   Da per Definition $[z_{|w|}]_\equiv \in E'$ äquivalent zu $z_{|w|} \in E$ ist, folgt, dass $L(M') = L(M)$.

Korrektheit und Minimalität des Äquivalenzklassenautomaten

Satz

Seien $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA und $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E')$ der Äquivalenzklassenautomat zu M. Dann gilt

1. $L(M') = L(M)$.
2. Falls alle Zustände in Z von z_0 erreichbar sind, dann ist M' minimal, d.h. jeder DFA M'' mit $L(M'') = L(M')$ hat mindestens so viele Zustände wie M'.

Beweis (Fortsetzung)

2. Wird in späterer Vorlesung gezeigt (nur FSK). $\square$

Algorithmus 3: Berechnung aller äquivalenten Zustände

Eingabe: DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$, der keine unerreichbaren Zustände hat
Ausgabe: Partition $\mathcal{P} = \{[z_1]_\equiv, \ldots, [z_m]_\equiv\}$ von Z
Beginn
  initialisiere Partition $\mathcal{P}$ mit E (falls nicht leer) und $Z \setminus E$ (falls nicht leer);
  wiederhole
    für jedes $K = \{z_1, \ldots, z_m\} \in \mathcal{P}$ *mit* $|m| \geq 2$ **tue**
      für jedes $a \in \Sigma$ **tue**
        berechne die Partition $\mathcal{Q}$ von $\{z_1, \ldots, z_m\}$ über dem Wert von $[\delta(z_i, a)]$ für jedes i;
        $\mathcal{P} := (\mathcal{P} \setminus \{K\}) \cup \mathcal{Q}$;
      Ende
    Ende
  bis *sich* $\mathcal{P}$ *nicht mehr verändert*;
  return $\mathcal{P}$
Ende

Korrektheit von Algorithmus 3

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA, der keine unerreichbaren Zustände hat.
Algorithmus 3 berechnet die Äquivalenzklassen bezüglich $\equiv$.

Korrektheit von Algorithmus 3

Satz

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA, der keine unerreichbaren Zustände hat.
Algorithmus 3 berechnet die Äquivalenzklassen bezüglich $\equiv$.

Beweis Wir führen den Beweis in zwei Schritten:

1. Wenn $z \equiv z'$, dann sind z und z' in derselben Klasse von $\mathcal{P}$.
2. Wenn $z \not\equiv z'$, dann sind z und z' in verschiedenen Klassen von $\mathcal{P}$.

Korrektheit des tabellarischen Ansatzes

Beweis (Fortsetzung)

1. Wir zeigen die Kontraposition: Wenn z und z' in verschiedenen Klassen von $\mathcal{P}$ sind, dann $z \not\equiv z'$.

Korrektheit des tabellarischen Ansatzes

Beweis (Fortsetzung)

1. Wir zeigen die Kontraposition: Wenn z und z' in verschiedenen Klassen von $\mathcal{P}$ sind, dann $z \not\equiv z'$. Und um $z \not\equiv z'$ zu zeigen, reicht es, ein Wort w zu finden, sodass $\widetilde{\delta}(z, w) \in E$ und $\widetilde{\delta}(z', w) \notin E$ oder umgekehrt.

Korrektheit des tabellarischen Ansatzes

Beweis (Fortsetzung)

1. Wir zeigen die Kontraposition: Wenn z und z' in verschiedenen Klassen von $\mathcal{P}$ sind, dann $z \not\equiv z'$. Und um $z \not\equiv z'$ zu zeigen, reicht es, ein Wort w zu finden, sodass $\widetilde{\delta}(z, w) \in E$ und $\widetilde{\delta}(z', w) \notin E$ oder umgekehrt.

   Durch Induktion über die Anzahl n der Schleifeniterationen bis z und z' getrennt wurden.

Korrektheit des tabellarischen Ansatzes

Beweis (Fortsetzung)

1. Wir zeigen die Kontraposition: Wenn z und z' in verschiedenen Klassen von $\mathcal{P}$ sind, dann $z \not\equiv z'$. Und um $z \not\equiv z'$ zu zeigen, reicht es, ein Wort w zu finden, sodass $\widetilde{\delta}(z, w) \in E$ und $\widetilde{\delta}(z', w) \notin E$ oder umgekehrt.

   Durch Induktion über die Anzahl n der Schleifeniterationen bis z und z' getrennt wurden.

   - Fall $n = 0$: Da z und z' schon vor der ersten Iteration getrennt wurden, müssen $z \in E$ und $z' \notin E$ oder umgekehrt gelten. Wir nehmen $w = \varepsilon$: $\widetilde{\delta}(z, \varepsilon) \in E$ und $\widetilde{\delta}(z', \varepsilon) \notin E$ oder umgekehrt.

Korrektheit des tabellarischen Ansatzes

Beweis (Fortsetzung)

1. Wir zeigen die Kontraposition: Wenn z und z' in verschiedenen Klassen von $\mathcal{P}$ sind, dann $z \not\equiv z'$. Und um $z \not\equiv z'$ zu zeigen, reicht es, ein Wort w zu finden, sodass $\widetilde{\delta}(z, w) \in E$ und $\widetilde{\delta}(z', w) \notin E$ oder umgekehrt.

   Durch Induktion über die Anzahl n der Schleifeniterationen bis z und z' getrennt wurden.

   - Fall $n = 0$: Da z und z' schon vor der ersten Iteration getrennt wurden, müssen $z \in E$ und $z' \notin E$ oder umgekehrt gelten. Wir nehmen $w = \varepsilon$: $\widetilde{\delta}(z, \varepsilon) \in E$ und $\widetilde{\delta}(z', \varepsilon) \notin E$ oder umgekehrt.
   - Fall $n > 0$: Da z und z' in Iteration n getrennt wurden, muss es $a \in \Sigma$ geben, sodass $\delta(z, a)$ und $\delta(z', a)$ schon in Iteration $n - 1$ getrennt waren. Die Induktionshypothese liefert ein Wort w' mit $\widetilde{\delta}(\delta(z, a), w') \in E$ und $\widetilde{\delta}(\delta(z', a), w') \notin E$ oder umgekehrt. Wir nehmen $w = aw'$: $\widetilde{\delta}(z, aw') \in E$ und $\widetilde{\delta}(z', aw') \notin E$ oder umgekehrt.

Korrektheit des tabellarischen Ansatzes

Beweis (Fortsetzung)

2. Wir müssen zeigen, dass wenn $z \not\equiv z'$, dann sind z und z' in zwei verschiedenen Klassen von $\mathcal{P}$. Sei w ein Wort sodass $\widetilde{\delta}(z, w) \in E$ und $\widetilde{\delta}(z', w) \notin E$ oder umgekehrt.

   Durch Induktion über $|w|$.

   - Fall $w = \varepsilon$: Dann haben wir $\widetilde{\delta}(z, \varepsilon) \in E$ und $\widetilde{\delta}(z', \varepsilon) \notin E$ oder umgekehrt. Die Initialisierungsphase sorgt dafür, dass z und z' getrennt werden.
   - Fall w ist von der Form aw': Dann haben wir $\widetilde{\delta}(z, aw') = \widetilde{\delta}(\delta(z, a), w') \in E$ und $\widetilde{\delta}(z', aw') = \widetilde{\delta}(\delta(z', a), w') \notin E$ oder umgekehrt. Per Induktionshypothese müssen $\delta(z, a)$ und $\delta(z', a)$ getrennt sein. Der Algorithmus muss z und z' trennen, wenn a betrachtet wird. $\square$

Algorithmus 4: Minimierung von DFAs

Eingabe: DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$
Ausgabe: Minimaler DFA M' mit $L(M') = L(M)$
Beginn
entferne Zustände aus M, die nicht vom Startzustand aus erreichbar sind;
berechne äquivalente Zustände mit Algorithmus 3;
erzeuge den Äquivalenzklassenautomat, indem die berechneten äquivalenten Zustände verschmolzen werden;
Ende