LMU
LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Formale Sprachen und Komplexität
Theoretische Informatik für Studierende der Medieninformatik
Sommersemester 2024

2b
Deterministische endliche Automaten

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 10. Mai 2024
Basiert auf Folien von PD Dr. David Sabel

Fragestellung

Formalismen, um formale Sprachen zu repräsentieren:

- Grammatiken: Sie erzeugen Wörter einer Sprache.
- Maschinenmodelle: Sie erkennen Wörter einer Sprache.

Welcher Formalismus besser ist, hängt von der konkreten Fragestellung ab.

Wichtige Fragestellung: **Welche Maschine akzeptiert welche Sprachklasse?**

Überblick über Grammatiken und Maschinenmodelle

alle Sprachen

rekursiv aufzählbar	Typ 0-Grammatik $\ell \to r$ beliebig	Turingmaschine (det. & nichtdet.)
kontextsensitiv	Typ 1-Grammatik $\ell \to r$: $\lvert\ell\rvert \leq \lvert r\rvert$	linear beschränkte Turingmaschine (nichtdet.)
kontextfrei	Typ 2-Grammatik $A \to r$	Kellerautomat (nichtdet.)
regulär	Typ 3-Grammatik $A \to a[B]$	endlicher Automat (det. & nichtdet.)

Überblick über Grammatiken und Maschinenmodelle

alle Sprachen

rekursiv aufzählbar	Typ 0-Grammatik $\ell \to r$ beliebig	Turingmaschine (det. & nichtdet.)
kontextsensitiv	Typ 1-Grammatik $\ell \to r$: $\lvert\ell\rvert \leq \lvert r\rvert$	linear beschränkte Turingmaschine (nichtdet.)
kontextfrei	Typ 2-Grammatik $A \to r$	Kellerautomat (nichtdet.)
regulär	Typ 3-Grammatik $A \to a[B]$	endlicher Automat (**det.** & nichtdet.)

Wiederholung: Reguläre Sprachen

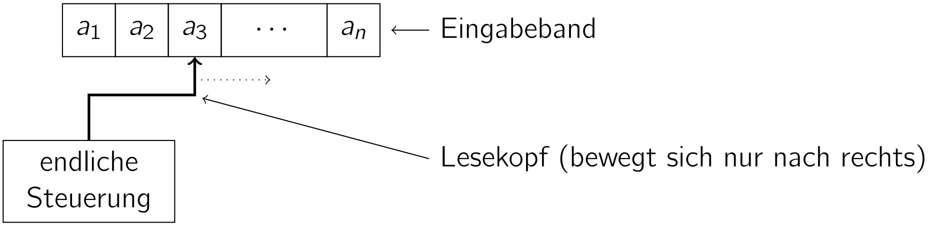
- Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ ist vom Typ 3 (alternativ regulär), wenn alle Produktionen in P von der Form $A \to r \in P$ sind, wobei $r = a$ oder $r = aA'$ für $a \in \Sigma, A' \in V$.
- Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist vom Typ 3 (alternativ regulär), falls es eine Typ 3-Grammatik G gibt, sodass $L(G) = L$ gilt.

Deterministische endliche Automaten

Informelle Kurzfassung:

- Deterministische endliche Automaten starten im Startzustand.
- Sie lesen zeichenweise ein Eingabewort.
- Sie wechseln dabei den Zustand (eindeutig). Es gibt nur endlich viele Zustände.
- Nach Lesen der Eingabe: akzeptieren oder verwerfen.
  - Akzeptieren = in einem Endzustand
  - Verwerfen = nicht in einem Endzustand
- Die akzeptierte Sprache besteht aus allen Wörter,
  für die der Automat akzeptiert.

Illustration eines endlichen Automaten

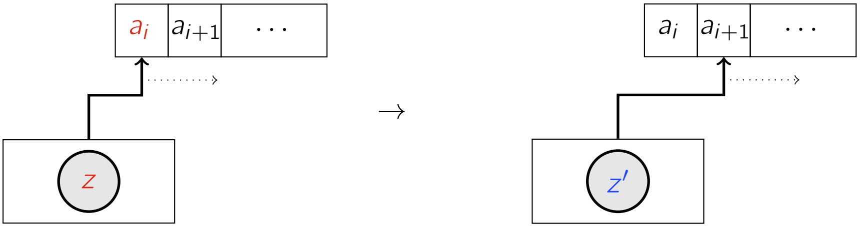


Definition

Ein deterministischer endlicher Automat (*deterministic finite automaton*, DFA) ist ein 5-Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$, wobei:

- Z ist eine endliche Menge von Zuständen
- Σ ist das (endliche) Eingabealphabet mit $Z \cap \Sigma = \emptyset$
- $\delta : Z \times \Sigma \to Z$ ist die (totale) Überführungsfunktion
- $z_0 \in Z$ ist der Startzustand
- $E \subseteq Z$ ist die Menge der Endzustände.

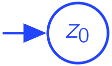
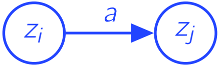
Illustration des Zustandsübergangs



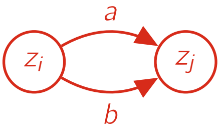
$\delta(z, a_i) = z'$ bedeutet:
Im Zustand z bei Eingabe a_i wechselt der DFA in z'.

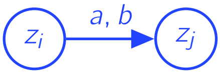
Zustandsgraph eines DFA

Für DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$:

- Für Zustand $z \in Z$ gibt es Knoten 
.
- Startzustand $z_0 \in Z$: eingehender Pfeil 
.
- Endzustände $z \in E$: doppelte Kreise 
.
- Übergänge $\delta(z_i, a) = z_j$ als Kante 

dargestellt

und statt 

zeichnen wir 
.

Beispiel für einen DFA

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

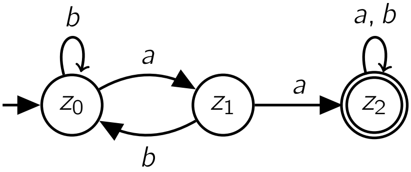
$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Beispiel für einen DFA

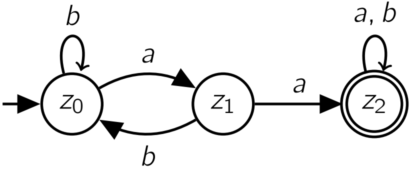
DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:

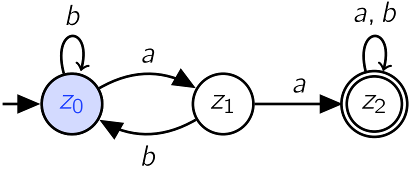


Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

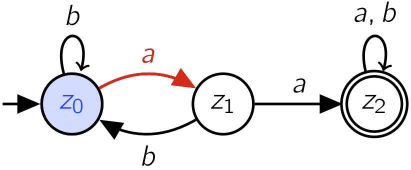
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

- Starte in z_0.

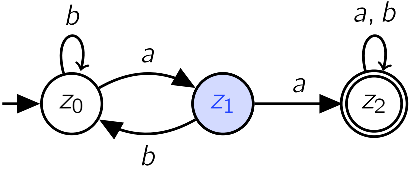
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

- Starte in z_0.
- Lies a

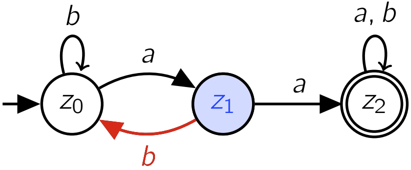
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

- Starte in z_0.
- Lies a und wechsle in z_1.

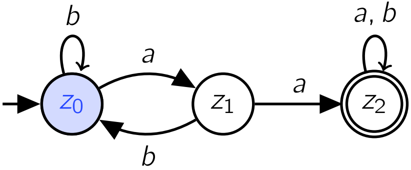
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

- Starte in z_0.
- Lies a und wechsle in z_1.
- Lies b

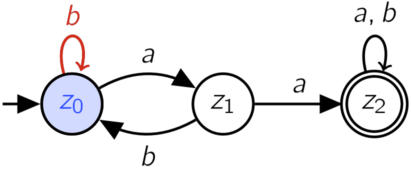
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

- Starte in z_0.
- Lies a und wechsle in z_1.
- Lies b und wechsle in z_0.

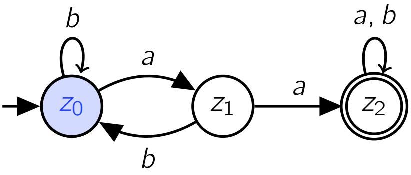
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

- Starte in z_0.
- Lies a und wechsle in z_1.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies b

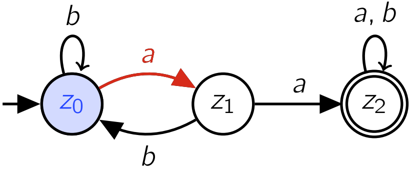
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

- Starte in z_0.
- Lies a und wechsle in z_1.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies b und wechsle in z_0.

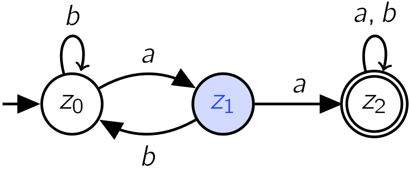
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe *abbaaa*:

- Starte in z_0.
- Lies a und wechsle in z_1.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies a

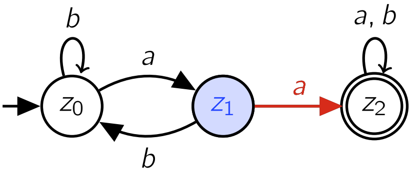
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

- Starte in z_0.
- Lies a und wechsle in z_1.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies a und wechsle in z_1.

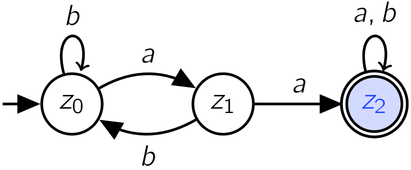
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

- Starte in z_0.
- Lies a und wechsle in z_1.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies a und wechsle in z_1.
- Lies a

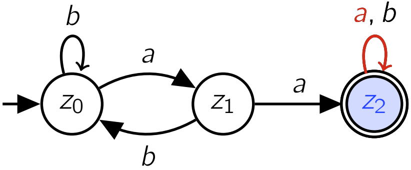
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

- Starte in z_0.
- Lies a und wechsle in z_1.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies a und wechsle in z_1.
- Lies a und wechsle in z_2.

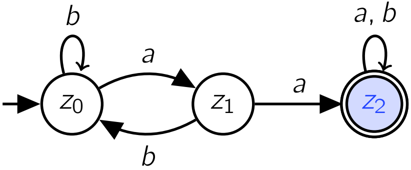
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

- Starte in z_0.
- Lies a und wechsle in z_1.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies a und wechsle in z_1.
- Lies a und wechsle in z_2.
- Lies a

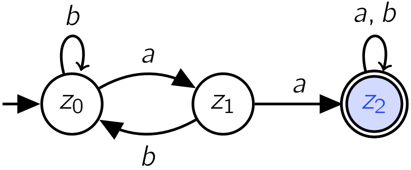
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

- Starte in z_0.
- Lies a und wechsle in z_1.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies a und wechsle in z_1.
- Lies a und wechsle in z_2.
- Lies a und wechsle in z_2.

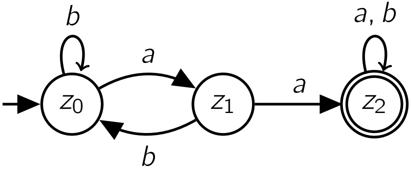
Beispiel für einen akzeptierenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

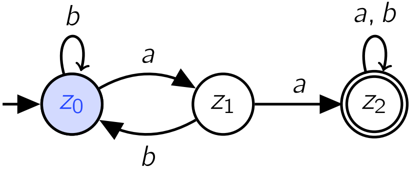
- Starte in z_0.
- Lies a und wechsle in z_1.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies a und wechsle in z_1.
- Lies a und wechsle in z_2.
- Lies a und wechsle in z_2.
- Akzeptiere.

Beispiel für einen verwerfenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

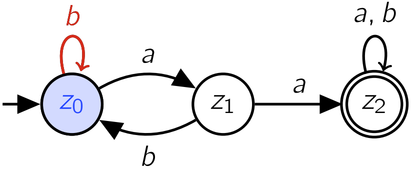
Beispiel für einen verwerfenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

- Starte in z_0.

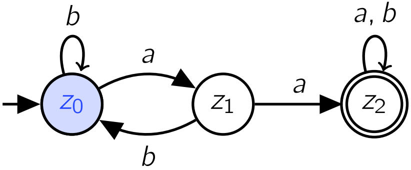
Beispiel für einen verwerfenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

- Starte in z_0.
- Lies b

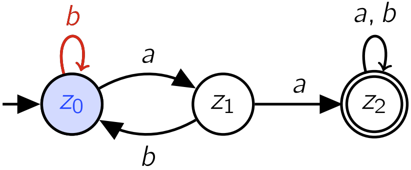
Beispiel für einen verwerfenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

- Starte in z_0.
- Lies b und wechsle in z_0.

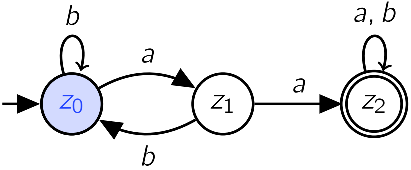
Beispiel für einen verwerfenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

- Starte in z_0.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies b

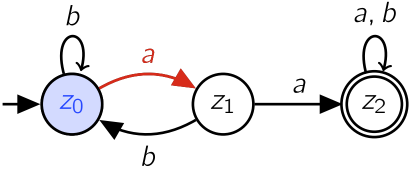
Beispiel für einen verwerfenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $b\textcolor{red}{b}ab$:

- Starte in z_0.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies b und wechsle in z_0.

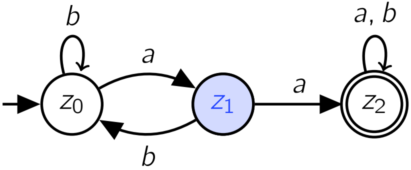
Beispiel für einen verwerfenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

- Starte in z_0.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies a

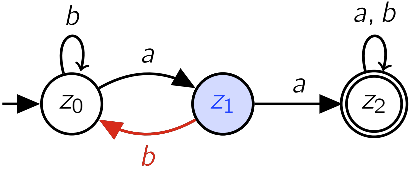
Beispiel für einen verwerfenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

- Starte in z_0.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies a und wechsle in z_1.

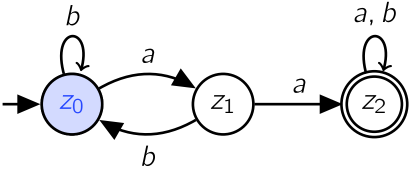
Beispiel für einen verwerfenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

- Starte in z_0.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies a und wechsle in z_1.
- Lies b

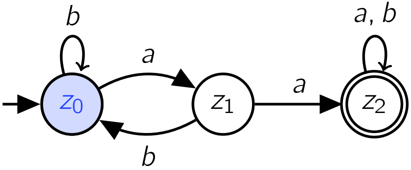
Beispiel für einen verwerfenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

- Starte in z_0.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies a und wechsle in z_1.
- Lies b und wechsle in z_0.

Beispiel für einen verwerfenden Lauf



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

- Starte in z_0.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Lies a und wechsle in z_1.
- Lies b und wechsle in z_0.
- Verwirf.

Akzeptanz bei DFAs

Definition

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA.
Wir definieren $\widetilde{\delta} : Z \times \Sigma^* \to Z$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta}(z, \varepsilon) &:= z \\ \widetilde{\delta}(z, aw) &:= \widetilde{\delta}(\delta(z, a), w) \end{aligned}$$

Die von M akzeptierte Sprache ist

$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \widetilde{\delta}(z_0, w) \in E\}$$

Akzeptanz bei DFAs

Definition

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA.
Wir definieren $\widetilde{\delta} : Z \times \Sigma^* \to Z$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta}(z, \varepsilon) &:= z \\ \widetilde{\delta}(z, aw) &:= \widetilde{\delta}(\delta(z, a), w) \end{aligned}$$

Die von M akzeptierte Sprache ist

$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \widetilde{\delta}(z_0, w) \in E\}$$

Alternativ:

$$\widetilde{\delta}(z, a_1 a_2 \ldots a_n) = \delta(\ldots \delta(\delta(z, a_1), a_2) \ldots, a_n)$$

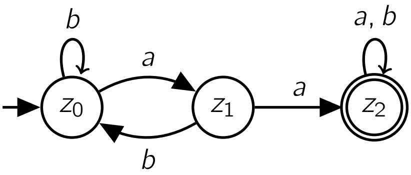
$\widetilde{\delta}$ wendet δ solange an, bis das Eingabewort abgearbeitet ist.

Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

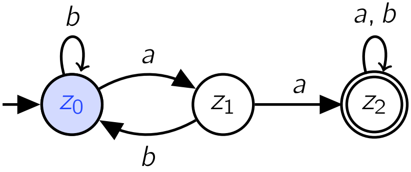
$$\widetilde{\delta}(z_0, abbaaa) = \delta(\delta(\delta(\delta(\delta(\delta(z_0, a), b), b), a), a), a)$$

Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

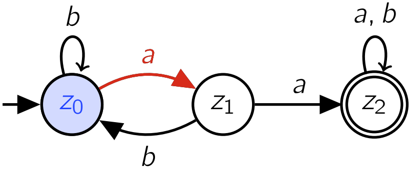
$$\widetilde{\delta}(z_0, abbaaa) = \delta(\delta(\delta(\delta(\delta(\delta(z_0, a), b), b), a), a), a)$$

Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

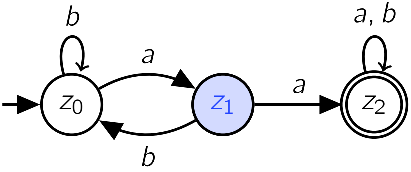
$$\widetilde{\delta}(z_0, abbaaa) = \delta(\delta(\delta(\delta(\delta(\delta(z_0, a), b), b), a), a), a)$$

Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

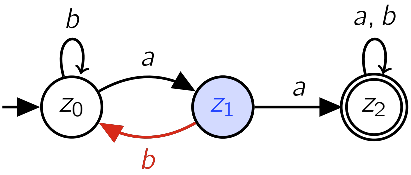
$$\widetilde{\delta}(z_0, abbaaa) = \delta(\delta(\delta(\delta(\delta(z_1, b), b), a), a), a)$$

Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

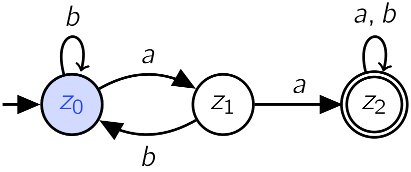
$$\widetilde{\delta}(z_0, abbaaa) = \delta(\delta(\delta(\delta(\delta(z_1, b), b), a), a), a)$$

Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

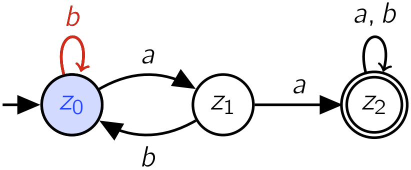
$$\widetilde{\delta}(z_0, abbaaa) = \delta(\delta(\delta(\delta(z_0, b), a), a), a)$$

Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

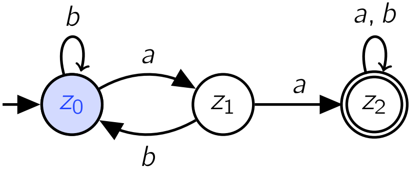
$$\widetilde{\delta}(z_0, abbaaa) = \delta(\delta(\delta(\delta(z_0, b), a), a), a)$$

Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

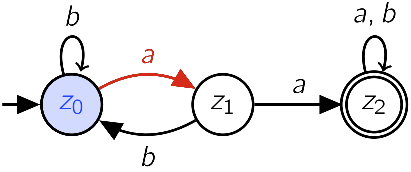
$$\widetilde{\delta}(z_0, abbaaa) = \delta(\delta(\delta(z_0, a), a), a)$$

Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

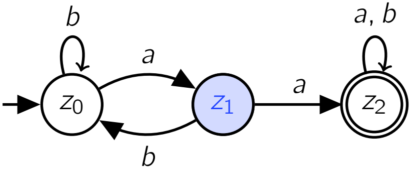
$$\widetilde{\delta}(z_0, abbaaa) = \delta(\delta(\delta(z_0, a), a), a)$$

Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

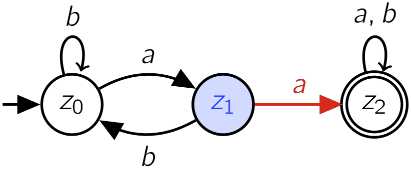
$$\widetilde{\delta}(z_0, abbaaa) = \delta(\delta(z_1, a), a)$$

Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

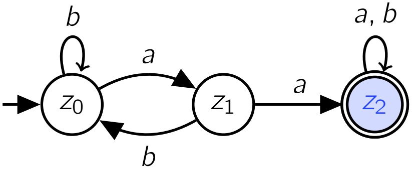
$$\widetilde{\delta}(z_0, abbaaa) = \delta(\delta(z_1, a), a)$$

Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

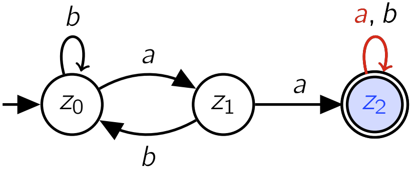
$$\widetilde{\delta}(z_0, abbaaa) = \delta(z_2, a)$$

Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

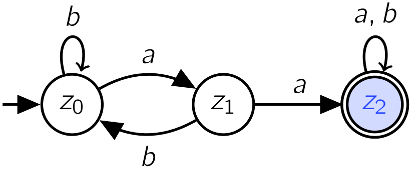
$$\widetilde{\delta}(z_0, abbaaa) = \delta(z_2, a)$$

Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

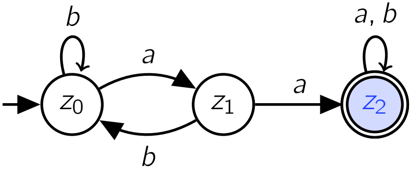
$$\widetilde{\delta}(z_0, abbaaa) = z_2$$

Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $abbaaa$:

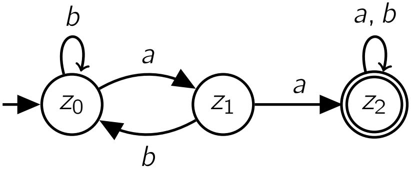
$$\widetilde{\delta}(z_0, abbaaa) = z_2 \in E$$

Weiteres Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

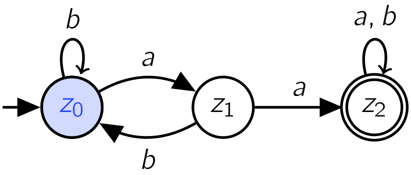
$$\widetilde{\delta}(z_0, bbab) = \delta(\delta(\delta(\delta(z_0, b), b), a), b)$$

Weiteres Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

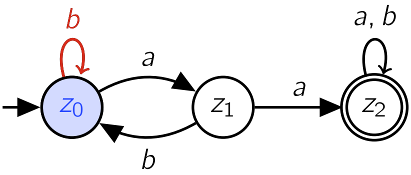
$$\widetilde{\delta}(z_0, bbab) = \delta(\delta(\delta(\delta(z_0, b), b), a), b)$$

Weiteres Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

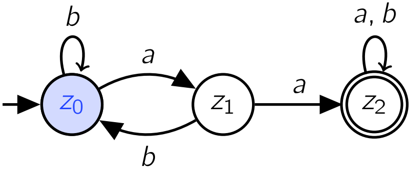
$$\widetilde{\delta}(z_0, bbab) = \delta(\delta(\delta(\delta(z_0, b), b), a), b)$$

Weiteres Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

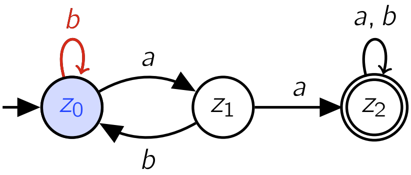
$$\widetilde{\delta}(z_0, bbab) = \delta(\delta(\delta(z_0, b), a), b)$$

Weiteres Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

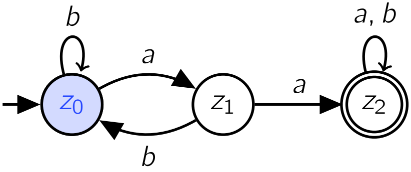
$$\widetilde{\delta}(z_0, bbab) = \delta(\delta(\delta(z_0, b), a), b)$$

Weiteres Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

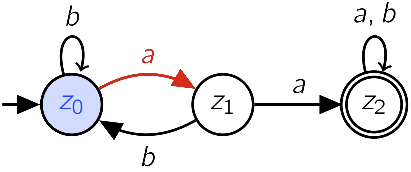
$$\widetilde{\delta}(z_0, bbab) = \delta(\delta(z_0, a), b)$$

Weiteres Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

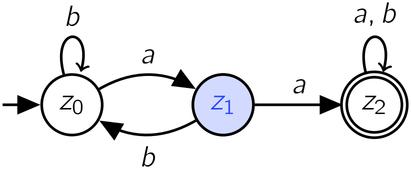
$$\widetilde{\delta}(z_0, bbab) = \delta(\delta(z_0, a), b)$$

Weiteres Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

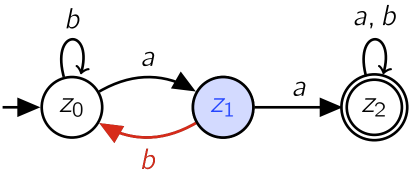
$$\widetilde{\delta}(z_0, bbab) = \delta(z_1, b)$$

Weiteres Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

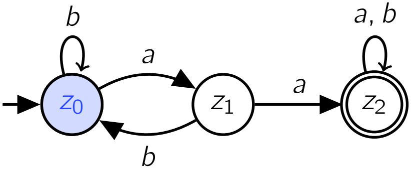
$$\widetilde{\delta}(z_0, bbab) = \delta(z_1, b)$$

Weiteres Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

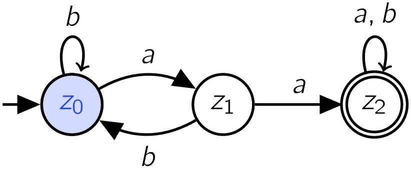
$$\widetilde{\delta}(z_0, bbab) = z_0$$

Weiteres Beispiel für die $\widetilde{\delta}$-Funktion

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Abarbeitung der Eingabe $bbab$:

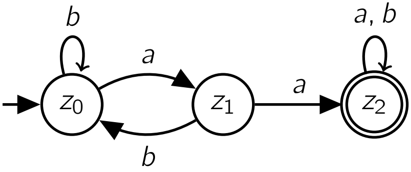
$$\widetilde{\delta}(z_0, bbab) = z_0 \notin E$$

Akzeptierte Sprache des Beispiels

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



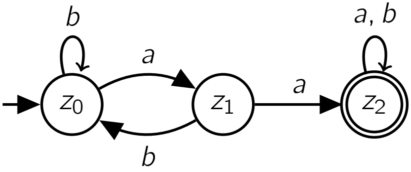
Akzeptierte Sprache = ?

Akzeptierte Sprache des Beispiels

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, E)$ mit $E = \{z_2\}$ und

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Zustandsgraph zu M:



Akzeptierte Sprache $= \{uaav \mid u, v \in \{a, b\}^*\}$

Läufe von DFAs

Definition

Seien $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA und $w \in \Sigma^*$ ein Wort der Länge n.
Die Folge von Zuständen $z_0, \ldots, z_n$ mit $z_i = \delta(z_{i-1}, w[i])$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist ein Lauf von M für w.

Läufe von DFAs

Definition

Seien $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA und $w \in \Sigma^*$ ein Wort der Länge n.
Die Folge von Zuständen $z_0, \ldots, z_n$ mit $z_i = \delta(z_{i-1}, w[i])$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist ein Lauf von M für w.

Für einen Lauf schreiben wir auch

$$z_0 \xrightarrow{w[1]} z_1 \xrightarrow{w[2]} \cdots \xrightarrow{w[n-1]} z_{n-1} \xrightarrow{w[n]} z_n$$

Beispiele für Läufe

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Beispiele für Läufe

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Lauf für $abbaaa$ (akzeptierend):

$$z_0 \xrightarrow{a} z_1 \xrightarrow{b} z_0 \xrightarrow{b} z_0 \xrightarrow{a} z_1 \xrightarrow{a} z_2 \xrightarrow{a} z_2$$

Beispiele für Läufe

DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2\}, \{a, b\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ mit

$$\begin{array}{lll} \delta(z_0, a) = z_1 & \delta(z_1, a) = z_2 & \delta(z_2, a) = z_2 \\ \delta(z_0, b) = z_0 & \delta(z_1, b) = z_0 & \delta(z_2, b) = z_2 \end{array}$$

Lauf für $abbaaa$ (akzeptierend):

$$z_0 \xrightarrow{a} z_1 \xrightarrow{b} z_0 \xrightarrow{b} z_0 \xrightarrow{a} z_1 \xrightarrow{a} z_2 \xrightarrow{a} z_2$$

Lauf für $bbab$ (verwerfend):

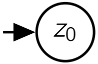
$$z_0 \xrightarrow{b} z_0 \xrightarrow{b} z_0 \xrightarrow{a} z_1 \xrightarrow{b} z_0$$

Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über $\{a, b\}$, der alle Wörter akzeptiert,
die mit $abaa$ beginnen und mit bab enden (z.B. $abaabab$, $abaaaabab$, $abaababab$):

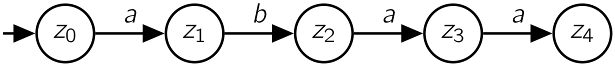
Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über $\{a, b\}$, der alle Wörter akzeptiert,
die mit *abaa* beginnen und mit *bab* enden (z.B. *abaabab*, *abaaaabab*, *abaababab*):



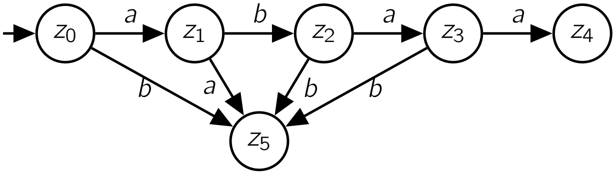
Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über $\{a, b\}$, der alle Wörter akzeptiert, die mit *abaa* beginnen und mit *bab* enden (z.B. *abaabab*, *abaaaabab*, *abaababab*):



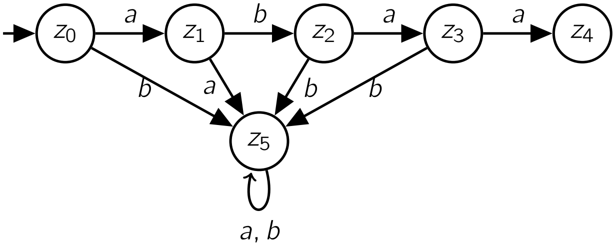
Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über $\{a, b\}$, der alle Wörter akzeptiert,
die mit *abaa* beginnen und mit *bab* enden (z.B. *abaabab*, *abaaaabab*, *abaababab*):



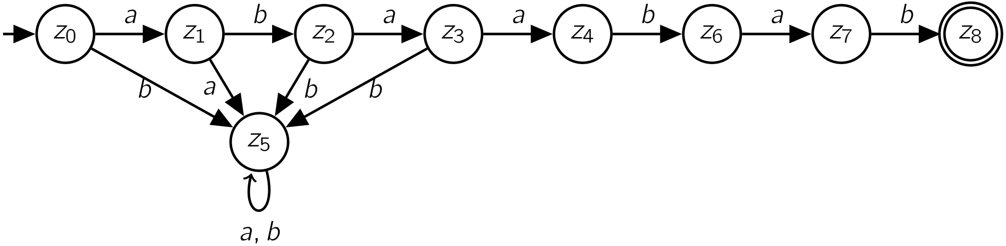
Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über $\{a, b\}$, der alle Wörter akzeptiert, die mit *abaa* beginnen und mit *bab* enden (z.B. *abaabab*, *abaaaabab*, *abaababab*):



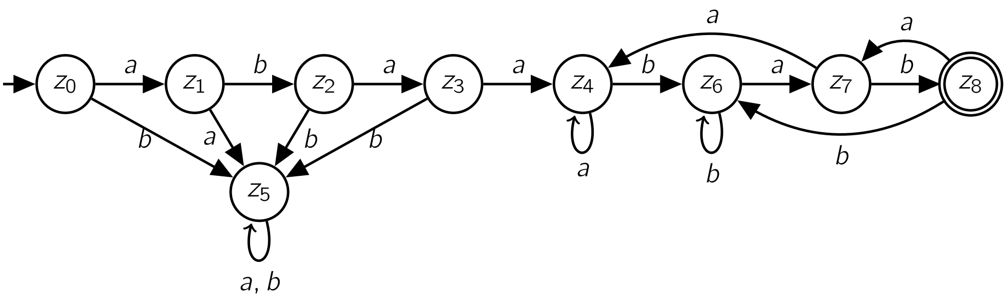
Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über $\{a, b\}$, der alle Wörter akzeptiert,
die mit *abaa* beginnen und mit *bab* enden (z.B. *abaabab*, *abaaaabab*, *abaababab*):



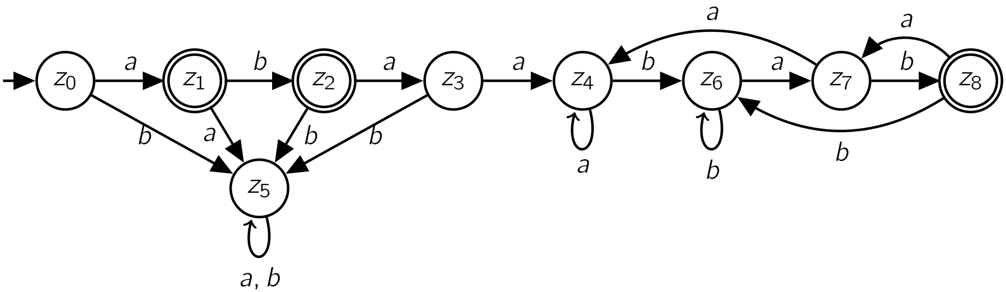
Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über $\{a, b\}$, der alle Wörter akzeptiert,
die mit *abaa* beginnen und mit *bab* enden (z.B. *abaabab*, *abaaaabab*, *abaababab*):

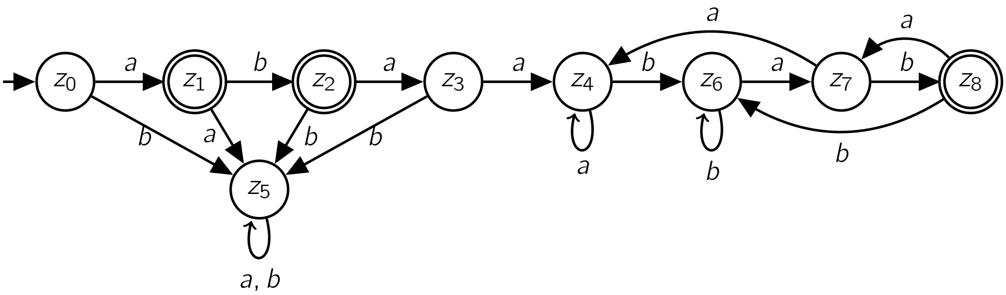


Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Zusätzlich die Wörter a und ab akzeptieren:



Beispiel für die Konstruktion eines DFA



Bedeutung der Zustände:

$z_0 = \varepsilon$ wurde gelesen

$z_1 = a$ wurde gelesen

$z_2 = ab$ wurde gelesen

$z_3 = aba$ wurde gelesen

$z_4 = abaa$ wurde gelesen

$z_5 =$ ein falsches Präfix wurde gelesen (Müllzustand)

$z_6 = abaa\ldots b$ wurde gelesen

$z_7 = abaa\ldots ba$ wurde gelesen

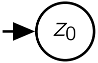
$z_8 = abaa\ldots bab$ wurde gelesen

Weiteres Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über
$\Sigma = \{+, -, ., 0, \ldots, 9\}$,
der alle Wörter akzeptiert,
die Gleitkommazahlen
darstellen
(z.B. $+27$, -3.14, $.666$):

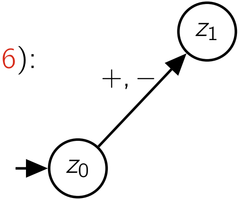
Weiteres Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über
$\Sigma = \{+, -, ., 0, \ldots, 9\}$,
der alle Wörter akzeptiert,
die Gleitkommazahlen
darstellen
(z.B. $+27$, -3.14, $.666$):



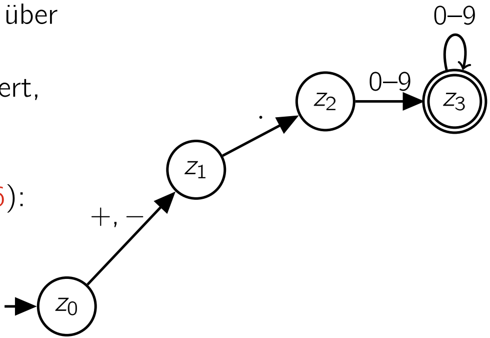
Weiteres Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über
$\Sigma = \{+, -, ., 0, \ldots, 9\}$,
der alle Wörter akzeptiert,
die Gleitkommazahlen
darstellen
(z.B. $+27$, -3.14, $.666$):



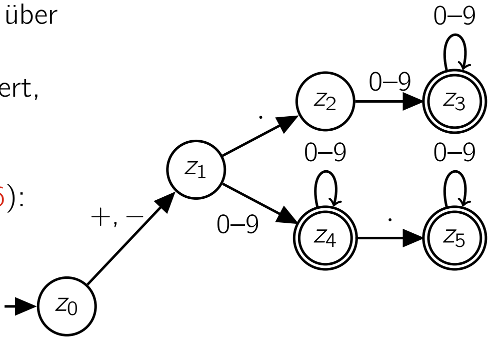
Weiteres Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über
$\Sigma = \{+, -, ., 0, \ldots, 9\}$,
der alle Wörter akzeptiert,
die Gleitkommazahlen
darstellen
(z.B. $+27$, -3.14, $.666$):



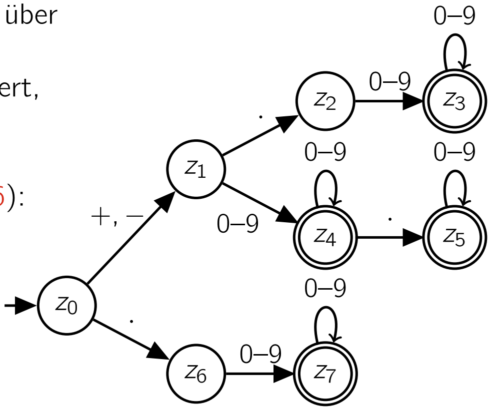
Weiteres Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über
$\Sigma = \{+, -, ., 0, \ldots, 9\}$,
der alle Wörter akzeptiert,
die Gleitkommazahlen
darstellen
(z.B. +27, −3.14, .666):



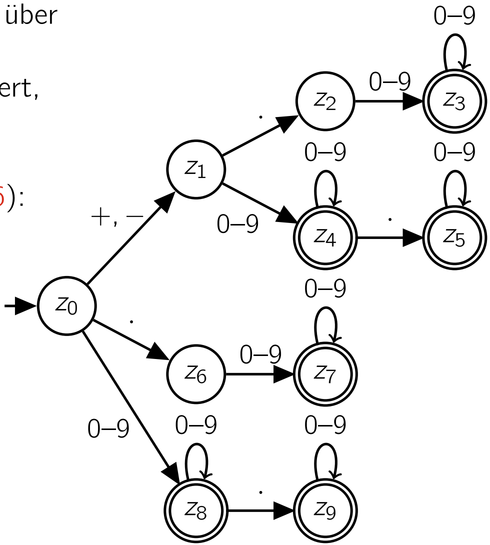
Weiteres Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über
$\Sigma = \{+, -, ., 0, \ldots, 9\}$,
der alle Wörter akzeptiert,
die Gleitkommazahlen
darstellen
(z.B. $+27$, -3.14, $.666$):



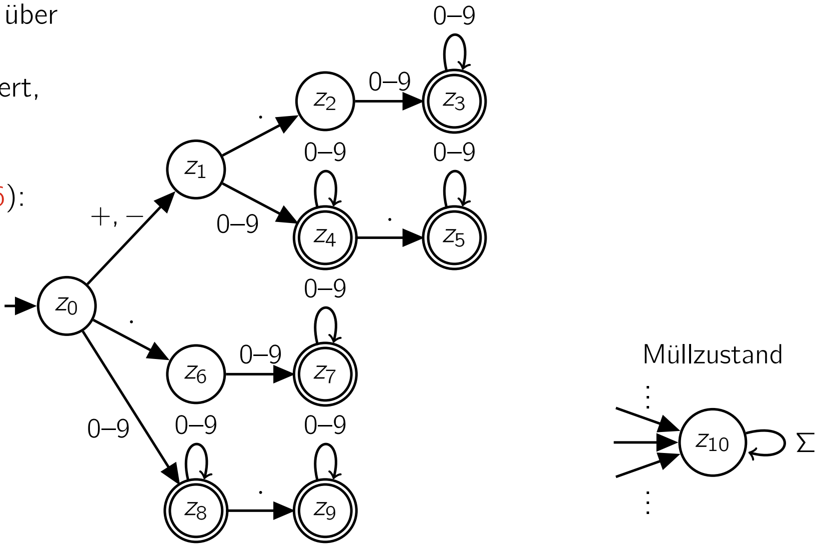
Weiteres Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über
$\Sigma = \{+, -, ., 0, \ldots, 9\}$,
der alle Wörter akzeptiert,
die Gleitkommazahlen
darstellen
(z.B. $+27$, -3.14, $.666$):



Weiteres Beispiel für die Konstruktion eines DFA

Konstruiere einen DFA über $\Sigma = \{+, -, ., 0, \ldots, 9\}$, der alle Wörter akzeptiert, die Gleitkommazahlen darstellen (z.B. $+27$, -3.14, $.666$):



Anwendungen von Automaten

- Automaten werden zur Spezifikation von Systemen und Protokollen verwendet.
- Sie werden zur Textsuche und Texterkennung verwendet.
- Sie dienen als Implementierung für reguläre Ausdrücke (mehr hierzu später).