LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

Formale Sprachen und Komplexität
Sommersemester 2024

2a

Grammatikbeispiele, Mehrdeutigkeit und Entfernen von ε-Produktionen

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 10. Mai 2024
Basiert auf Folien von PD Dr. David Sabel

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC, S \to aBC, CB \to BC, aB \to ab, bB \to bb, bC \to bc, cC \to cc\}$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC, S \to aBC, CB \to BC, aB \to ab, bB \to bb, bC \to bc, cC \to cc\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow aSBC$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC, S \to aBC, CB \to BC, aB \to ab, bB \to bb, bC \to bc, cC \to cc\}$

Ableitung:
$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC, S \to aBC, CB \to BC, aB \to ab, bB \to bb, bC \to bc, cC \to cc\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC, S \to aBC, CB \to BC, aB \to ab, bB \to bb, bC \to bc, cC \to cc\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC$
$\Rightarrow aaaabCBCBCBC$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$

Ableitung:

$$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC$$
$$\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC, S \to aBC, CB \to BC, aB \to ab, bB \to bb, bC \to bc, cC \to cc\}$

Ableitung:

$$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC$$
$$\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$

Ableitung:

$$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC$$
$$\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC$$
$$\Rightarrow aaaabbCBCCBC$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC, S \to aBC, CB \to BC, aB \to ab, bB \to bb, bC \to bc, cC \to cc\}$

Ableitung:

$$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC$$
$$\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC$$
$$\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBC$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBC \Rightarrow aaaabbBCCBCC \end{aligned}$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$

Ableitung:

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\
&\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\
&\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBC \Rightarrow aaaabbBCCBCC \\
&\Rightarrow aaaabbBCBCCC
\end{aligned}
$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned}
S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\
&\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\
&\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBC \Rightarrow aaaabbBCCBCC \\
&\Rightarrow aaaabbBCBCCC \Rightarrow aaaabbBBCCCC
\end{aligned}$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC, S \to aBC, CB \to BC, aB \to ab, bB \to bb, bC \to bc, cC \to cc\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\ &\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBC \Rightarrow aaaabbBCCBCC \\ &\Rightarrow aaaabbBCBCCC \Rightarrow aaaabbBBCCCC \Rightarrow aaaabbbBCCCC \end{aligned}$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\, S \to aBC,\, CB \to BC,\, aB \to ab,\, bB \to bb,\, bC \to bc,\, cC \to cc\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned}
S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\
&\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\
&\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBC \Rightarrow aaaabbBCCBCC \\
&\Rightarrow aaaabbBCBCCC \Rightarrow aaaabbBBCCCC \Rightarrow aaaabbbBCCCC \\
&\Rightarrow aaaabbbbCCCC
\end{aligned}$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned}
S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\
&\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\
&\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBC \Rightarrow aaaabbBCCBCC \\
&\Rightarrow aaaabbBCBCCC \Rightarrow aaaabbBBCCCC \Rightarrow aaaabbbBCCCC \\
&\Rightarrow aaaabbbbCCCC \Rightarrow aaaabbbbcCCC
\end{aligned}$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$

Ableitung:

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\
&\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\
&\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBC \Rightarrow aaaabbBCCBCC \\
&\Rightarrow aaaabbBCBCCC \Rightarrow aaaabbBBCCCC \Rightarrow aaaabbbBCCCC \\
&\Rightarrow aaaabbbbCCCC \Rightarrow aaaabbbbcCCC \Rightarrow aaaabbbbccCC
\end{aligned}
$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned}
S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\
&\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\
&\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBC \Rightarrow aaaabbBCCBCC \\
&\Rightarrow aaaabbBCBCCC \Rightarrow aaaabbBBCCCC \Rightarrow aaaabbbBCCCC \\
&\Rightarrow aaaabbbbCCCC \Rightarrow aaaabbbbcCCC \Rightarrow aaaabbbbcCCC \\
&\Rightarrow aaaabbbbcccC
\end{aligned}$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$

Ableitung:

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\
&\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\
&\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBC \Rightarrow aaaabbBCCBCC \\
&\Rightarrow aaaabbBCBCCC \Rightarrow aaaabbBBCCCC \Rightarrow aaaabbbBCCCC \\
&\Rightarrow aaaabbbbCCCC \Rightarrow aaaabbbbcCCC \Rightarrow aaaabbbbccCC \\
&\Rightarrow aaaabbbbcccC \Rightarrow aaaabbbbcccc
\end{aligned}
$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \rightarrow aSBC,\ S \rightarrow aBC,\ CB \rightarrow BC,\ aB \rightarrow ab,\ bB \rightarrow bb,\ bC \rightarrow bc,\ cC \rightarrow cc\}$

Ableitung:

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\
&\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\
&\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBC \Rightarrow aaaabbBCCBCC \\
&\Rightarrow aaaabbBCBCCC \Rightarrow aaaabbBBCCCC \Rightarrow aaaabbbBCCCC \\
&\Rightarrow aaaabbbbCCCC \Rightarrow aaaabbbbcCCC \Rightarrow aaaabbbbccCC \\
&\Rightarrow aaaabbbbcccC \Rightarrow aaaabbbbcccc
\end{aligned}
$$

Steckengebliebene Folge von Ableitungsschritten:

$$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaBCBC \Rightarrow aabCBC \Rightarrow aabcBC$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$

Ableitung:

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\
&\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\
&\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBC \Rightarrow aaaabbBCCBCC \\
&\Rightarrow aaaabbBCBCCC \Rightarrow aaaabbBBCCCC \Rightarrow aaaabbbBCCCC \\
&\Rightarrow aaaabbbbCCCC \Rightarrow aaaabbbbcCCC \Rightarrow aaaabbbbccCC \\
&\Rightarrow aaaabbbbcccC \Rightarrow aaaabbbbcccc
\end{aligned}
$$

Steckengebliebene Folge von Ableitungsschritten:

$$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaBCBC \Rightarrow aabCBC \Rightarrow aabcBC$$

$L(G) = ?$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$

Ableitung:

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow aSBC \Rightarrow aaSBCBC \Rightarrow aaaSBCBCBC \Rightarrow aaaaBCBCBCBC \\
&\Rightarrow aaaabCBCBCBC \Rightarrow aaaabBCCBCBC \Rightarrow aaaabbCCBCBC \\
&\Rightarrow aaaabbCBCCBC \Rightarrow aaaabbBCCCBC \Rightarrow aaaabbBCCBCC \\
&\Rightarrow aaaabbBCBCCC \Rightarrow aaaabbBBCCCC \Rightarrow aaaabbbBCCCC \\
&\Rightarrow aaaabbbbCCCC \Rightarrow aaaabbbbcCCC \Rightarrow aaaabbbbccCC \\
&\Rightarrow aaaabbbbcccC \Rightarrow aaaabbbbcccc
\end{aligned}
$$

Steckengebliebene Folge von Ableitungsschritten:

$$S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aaBCBC \Rightarrow aabCBC \Rightarrow aabcBC$$

$$L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis

$\supseteq$ Wir zeigen, dass $a^n b^n c^n \in L(G)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis

$\supseteq$ Wir zeigen, dass $a^n b^n c^n \in L(G)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

- Wende $n - 1$ mal $S \to aSBC$ und dann einmal $S \to aBC$ an:
  $S \Rightarrow^* a^{n-1} S (BC)^{n-1} \Rightarrow a^n (BC)^n$.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis

$\supseteq$ Wir zeigen, dass $a^n b^n c^n \in L(G)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

- Wende $n-1$ mal $S \to aSBC$ und dann einmal $S \to aBC$ an:
  $S \Rightarrow^* a^{n-1}S(BC)^{n-1} \Rightarrow a^n(BC)^n$.
- Wende $CB \to BC$ solange an, bis es kein Teilwort CB mehr gibt:
  $a^n(BC)^n \Rightarrow^* a^n B^n C^n$.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis

$\supseteq$ Wir zeigen, dass $a^n b^n c^n \in L(G)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

- Wende $n - 1$ mal $S \to aSBC$ und dann einmal $S \to aBC$ an:
  $S \Rightarrow^* a^{n-1}S(BC)^{n-1} \Rightarrow a^n(BC)^n$.
- Wende $CB \to BC$ solange an, bis es kein Teilwort CB mehr gibt:
  $a^n(BC)^n \Rightarrow^* a^n B^n C^n$.
- Wende $aB \to ab$ und anschließend $n - 1$ mal $bB \to bb$ an:
  $a^n B^n C^n \Rightarrow a^n b B^{n-1} C^n \Rightarrow^* a^n b^n C^n$.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis

$\supseteq$ Wir zeigen, dass $a^n b^n c^n \in L(G)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

- Wende $n - 1$ mal $S \to aSBC$ und dann einmal $S \to aBC$ an:
  $S \Rightarrow^* a^{n-1}S(BC)^{n-1} \Rightarrow a^n(BC)^n$.
- Wende $CB \to BC$ solange an, bis es kein Teilwort CB mehr gibt:
  $a^n(BC)^n \Rightarrow^* a^n B^n C^n$.
- Wende $aB \to ab$ und anschließend $n - 1$ mal $bB \to bb$ an:
  $a^n B^n C^n \Rightarrow a^n b B^{n-1} C^n \Rightarrow^* a^n b^n C^n$.
- Wende einmal $bC \to bc$ und anschließend $n - 1$ mal $cC \to cc$ an:
  $a^n b^n C^n \Rightarrow a^n b^n c C^{n-1} \Rightarrow^* a^n b^n c^n$.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis

$\supseteq$ Wir zeigen, dass $a^n b^n c^n \in L(G)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

- Wende $n-1$ mal $S \to aSBC$ und dann einmal $S \to aBC$ an:
  $S \Rightarrow^* a^{n-1}S(BC)^{n-1} \Rightarrow a^n(BC)^n$.
- Wende $CB \to BC$ solange an, bis es kein Teilwort CB mehr gibt:
  $a^n(BC)^n \Rightarrow^* a^n B^n C^n$.
- Wende $aB \to ab$ und anschließend $n-1$ mal $bB \to bb$ an:
  $a^n B^n C^n \Rightarrow a^n bB^{n-1}C^n \Rightarrow^* a^n b^n C^n$.
- Wende einmal $bC \to bc$ und anschließend $n-1$ mal $cC \to cc$ an:
  $a^n b^n C^n \Rightarrow a^n b^n cC^{n-1} \Rightarrow^* a^n b^n c^n$.

Zusammensetzen aller Ableitungsschritte zeigt $S \Rightarrow^* a^n b^n c^n$.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis (Fortsetzung)

$\subseteq$ Wir zeigen, dass alle Wörter in $L(G)$ von der Form $a^n b^n c^n$ sind.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC, S \to aBC, CB \to BC, aB \to ab, bB \to bb, bC \to bc, cC \to cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis (Fortsetzung)

$\subseteq$ Wir zeigen, dass alle Wörter in $L(G)$ von der Form $a^n b^n c^n$ sind.

Für $S \Rightarrow^*_G u$ mit u Satzform zeigen die Produktionen:
$\#_a(u) = \#_b(u) + \#_B(u) = \#_c(u) + \#_C(u)$.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis (Fortsetzung)

$\subseteq$ Wir zeigen, dass alle Wörter in $L(G)$ von der Form $a^n b^n c^n$ sind.

Für $S \Rightarrow_G^* u$ mit u Satzform zeigen die Produktionen:
$\#_a(u) = \#_b(u) + \#_B(u) = \#_c(u) + \#_C(u)$.

Für $S \Rightarrow_G^* w$ mit $w \in \{a, b, c\}^*$ gilt: a's werden ganz links erzeugt,
d.h. $w = a^n w'$ mit $w' \in \{b, c\}^*$ und $n = \#_b(w') = \#_c(w')$.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis (Fortsetzung)

$\subseteq$ Wir zeigen, dass alle Wörter in $L(G)$ von der Form $a^n b^n c^n$ sind.

Für $S \Rightarrow_G^* u$ mit u Satzform zeigen die Produktionen:
$\#_a(u) = \#_b(u) + \#_B(u) = \#_c(u) + \#_C(u)$.

Für $S \Rightarrow_G^* w$ mit $w \in \{a, b, c\}^*$ gilt: a's werden ganz links erzeugt,
d.h. $w = a^n w'$ mit $w' \in \{b, c\}^*$ und $n = \#_b(w') = \#_c(w')$.

Es gilt $w' = bw''$, da jedes auf a folgende Symbol durch $aB \to ab$ erzeugt wird und die Produktionen keine Terminalsymbole vertauschen.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis (Fortsetzung)

Ebenso können die Terminalsymbole des Wortes $w' \in \{b, c\}^*$ nur durch $bB \to bb$, $bC \to bc$ und $cC \to cc$ erzeugt worden sein.
Diese Produktionen erlauben nur einen Wechsel von b zu c und keine Wechsel von c zu b. Auch ein Umordnen der Terminalsymbole ist nicht möglich.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis (Fortsetzung)

Ebenso können die Terminalsymbole des Wortes $w' \in \{b, c\}^*$ nur durch $bB \to bb$, $bC \to bc$ und $cC \to cc$ erzeugt worden sein.
Diese Produktionen erlauben nur einen Wechsel von b zu c und keine Wechsel von c zu b. Auch ein Umordnen der Terminalsymbole ist nicht möglich.

Daher gilt $w' = b^i c^j$ und mit $n = \#_b(w') = \#_c(w')$ sogar $w' = b^n c^n$.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis (Fortsetzung)

Ebenso können die Terminalsymbole des Wortes $w' \in \{b, c\}^*$ nur durch $bB \to bb$, $bC \to bc$ und $cC \to cc$ erzeugt worden sein.
Diese Produktionen erlauben nur einen Wechsel von b zu c und keine Wechsel von c zu b. Auch ein Umordnen der Terminalsymbole ist nicht möglich.

Daher gilt $w' = b^i c^j$ und mit $n = \#_b(w') = \#_c(w')$ sogar $w' = b^n c^n$.

Also ist $w = a^n b^n c^n$.

Beispiel für eine kontextsensitive Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$
gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

Beweis (Fortsetzung)

Ebenso können die Terminalsymbole des Wortes $w' \in \{b, c\}^*$ nur durch $bB \to bb$, $bC \to bc$ und $cC \to cc$ erzeugt worden sein.
Diese Produktionen erlauben nur einen Wechsel von b zu c und keine Wechsel von c zu b. Auch ein Umordnen der Terminalsymbole ist nicht möglich.

Daher gilt $w' = b^i c^j$ und mit $n = \#_b(w') = \#_c(w')$ sogar $w' = b^n c^n$.

Also ist $w = a^n b^n c^n$.

Aber w war beliebig gewählt. Daher sind alle $w \in L(G)$ von der Form $a^n b^n c^n$. $\square$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S) \text{ mit}$$

$$P = \{S \to \$T\$,\ T \to aAT,\ T \to bBT,\ T \to \varepsilon,\ \$a \to a\$,\ \$b \to b\$,\ Aa \to aA,$$
$$Ab \to bA,\ Ba \to aB,\ Bb \to bB,\ A\$ \to \$a,\ B\$ \to \$b,\ \$\$ \to \varepsilon\}$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to \$T\$,\ T \to aAT,\ T \to bBT,\ T \to \varepsilon,\ \$a \to a\$,\ \$b \to b\$,\ Aa \to aA,$
$Ab \to bA,\ Ba \to aB,\ Bb \to bB,\ A\$ \to \$a,\ B\$ \to \$b,\ \$\$ \to \varepsilon\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow \$T\$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to \$T\$,\ T \to aAT,\ T \to bBT,\ T \to \varepsilon,\ \$a \to a\$,\ \$b \to b\$,\ Aa \to aA,$
$\quad Ab \to bA,\ Ba \to aB,\ Bb \to bB,\ A\$ \to \$a,\ B\$ \to \$b,\ \$\$ \to \varepsilon\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to \$T\$,\ T \to aAT,\ T \to bBT,\ T \to \varepsilon,\ \$a \to a\$,\ \$b \to b\$,\ Aa \to aA,$
$\quad Ab \to bA,\ Ba \to aB,\ Bb \to bB,\ A\$ \to \$a,\ B\$ \to \$b,\ \$\$ \to \varepsilon\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to \$T\$,\ T \to aAT,\ T \to bBT,\ T \to \varepsilon,\ \$a \to a\$,\ \$b \to b\$,\ Aa \to aA,$
$\quad Ab \to bA,\ Ba \to aB,\ Bb \to bB,\ A\$ \to \$a,\ B\$ \to \$b,\ \$\$ \to \varepsilon\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \rightarrow \$T\$,\ T \rightarrow aAT,\ T \rightarrow bBT,\ T \rightarrow \varepsilon,\ \$a \rightarrow a\$,\ \$b \rightarrow b\$,\ Aa \rightarrow aA,$
$Ab \rightarrow bA,\ Ba \rightarrow aB,\ Bb \rightarrow bB,\ A\$ \rightarrow \$a,\ B\$ \rightarrow \$b,\ \$\$ \rightarrow \varepsilon\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$$
$\Rightarrow \$aAaAbB\$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to \$T\$,\ T \to aAT,\ T \to bBT,\ T \to \varepsilon,\ \$a \to a\$,\ \$b \to b\$,\ Aa \to aA,$
$\quad Ab \to bA,\ Ba \to aB,\ Bb \to bB,\ A\$ \to \$a,\ B\$ \to \$b,\ \$\$ \to \varepsilon\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$$
$\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to \$T\$,\ T \to aAT,\ T \to bBT,\ T \to \varepsilon,\ \$a \to a\$,\ \$b \to b\$,\ Aa \to aA,$
$\quad Ab \to bA,\ Ba \to aB,\ Bb \to bB,\ A\$ \to \$a,\ B\$ \to \$b,\ \$\$ \to \varepsilon\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$$
$\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to \$T\$,\ T \to aAT,\ T \to bBT,\ T \to \varepsilon,\ \$a \to a\$,\ \$b \to b\$,\ Aa \to aA,$
$\quad Ab \to bA,\ Ba \to aB,\ Bb \to bB,\ A\$ \to \$a,\ B\$ \to \$b,\ \$\$ \to \varepsilon\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$$
$\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to \$T\$,\ T \to aAT,\ T \to bBT,\ T \to \varepsilon,\ \$a \to a\$,\ \$b \to b\$,\ Aa \to aA,$
$\quad Ab \to bA,\ Ba \to aB,\ Bb \to bB,\ A\$ \to \$a,\ B\$ \to \$b,\ \$\$ \to \varepsilon\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$$
$\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$$
$\Rightarrow \$aabAA\$b$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to \$T\$,\ T \to aAT,\ T \to bBT,\ T \to \varepsilon,\ \$a \to a\$,\ \$b \to b\$,\ Aa \to aA,$
$\quad Ab \to bA,\ Ba \to aB,\ Bb \to bB,\ A\$ \to \$a,\ B\$ \to \$b,\ \$\$ \to \varepsilon\}$

Ableitung:

$$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$$$
$$\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$$$
$$\Rightarrow \$aabAA\$b \Rightarrow \$aabA\$ab$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to \$T\$,\ T \to aAT,\ T \to bBT,\ T \to \varepsilon,\ \$a \to a\$,\ \$b \to b\$,\ Aa \to aA,$
$\quad Ab \to bA,\ Ba \to aB,\ Bb \to bB,\ A\$ \to \$a,\ B\$ \to \$b,\ \$\$ \to \varepsilon\}$

Ableitung:

$$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$$$
$$\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$$$
$$\Rightarrow \$aabAA\$b \Rightarrow \$aabA\$ab \Rightarrow \$aab\$aab$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$P = \{S \to \$T\$,\ T \to aAT,\ T \to bBT,\ T \to \varepsilon,\ \$a \to a\$,\ \$b \to b\$,\ Aa \to aA,$
$\quad Ab \to bA,\ Ba \to aB,\ Bb \to bB,\ A\$ \to \$a,\ B\$ \to \$b,\ \$\$ \to \varepsilon\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$$
$\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$$
$\Rightarrow \$aabAA\$b \Rightarrow \$aabA\$ab \Rightarrow \$aab\$aab \Rightarrow a\$ab\$aab$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to \$T\$,\ T \to aAT,\ T \to bBT,\ T \to \varepsilon,\ \$a \to a\$,\ \$b \to b\$,\ Aa \to aA,$
$\quad Ab \to bA,\ Ba \to aB,\ Bb \to bB,\ A\$ \to \$a,\ B\$ \to \$b,\ \$\$ \to \varepsilon\}$

Ableitung:

$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$$
$\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$$
$\Rightarrow \$aabAA\$b \Rightarrow \$aabA\$ab \Rightarrow \$aab\$aab \Rightarrow a\$ab\$aab$
$\Rightarrow aa\$b\$aab$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to \$T\$, T \to aAT, T \to bBT, T \to \varepsilon, \$a \to a\$, \$b \to b\$, Aa \to aA,$
$Ab \to bA, Ba \to aB, Bb \to bB, A\$ \to \$a, B\$ \to \$b, \$\$ \to \varepsilon\}$

Ableitung:

$$S \Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$$$
$$\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$$$
$$\Rightarrow \$aabAA\$b \Rightarrow \$aabA\$ab \Rightarrow \$aab\$aab \Rightarrow a\$ab\$aab$$
$$\Rightarrow aa\$b\$aab \Rightarrow aab\$\$aab$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \rightarrow \$T\$,\ T \rightarrow aAT,\ T \rightarrow bBT,\ T \rightarrow \varepsilon,\ \$a \rightarrow a\$,\ \$b \rightarrow b\$,\ Aa \rightarrow aA,$
$\quad Ab \rightarrow bA,\ Ba \rightarrow aB,\ Bb \rightarrow bB,\ A\$ \rightarrow \$a,\ B\$ \rightarrow \$b,\ \$\$ \rightarrow \varepsilon\}$

Ableitung:

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$ \\
&\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$ \\
&\Rightarrow \$aabAA\$b \Rightarrow \$aabA\$ab \Rightarrow \$aab\$aab \Rightarrow a\$ab\$aab \\
&\Rightarrow aa\$b\$aab \Rightarrow aab\$\$aab \Rightarrow aabaab
\end{aligned}
$$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to \$T\$,\ T \to aAT,\ T \to bBT,\ T \to \varepsilon,\ \$a \to a\$,\ \$b \to b\$,\ Aa \to aA,$
$\quad Ab \to bA,\ Ba \to aB,\ Bb \to bB,\ A\$ \to \$a,\ B\$ \to \$b,\ \$\$ \to \varepsilon\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$ \\ &\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$ \\ &\Rightarrow \$aabAA\$b \Rightarrow \$aabA\$ab \Rightarrow \$aab\$aab \Rightarrow a\$ab\$aab \\ &\Rightarrow aa\$b\$aab \Rightarrow aab\$\$aab \Rightarrow aabaab \end{aligned}$$

$L(G) = ?$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

$G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to \$T\$,\ T \to aAT,\ T \to bBT,\ T \to \varepsilon,\ \$a \to a\$,\ \$b \to b\$,\ Aa \to aA,$
$\quad Ab \to bA,\ Ba \to aB,\ Bb \to bB,\ A\$ \to \$a,\ B\$ \to \$b,\ \$\$ \to \varepsilon\}$

Ableitung:

$$\begin{aligned}S &\Rightarrow \$T\$ \Rightarrow \$aAT\$ \Rightarrow \$aAaAT\$ \Rightarrow \$aAaAbBT\$\\ &\Rightarrow \$aAaAbB\$ \Rightarrow \$aaAAbB\$ \Rightarrow \$aaAbAB\$ \Rightarrow \$aabAAB\$\\ &\Rightarrow \$aabAA\$b \Rightarrow \$aabA\$ab \Rightarrow \$aab\$aab \Rightarrow a\$ab\$aab\\ &\Rightarrow aa\$b\$aab \Rightarrow aab\$\$aab \Rightarrow aabaab\end{aligned}$$

$L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to \$T\$,\ T \to aAT,\ T \to bBT,\ T \to \varepsilon,\ \$a \to a\$,\ \$b \to b\$,\ Aa \to aA,$
$\quad Ab \to bA,\ Ba \to aB,\ Bb \to bB,\ A\$ \to \$a,\ B\$ \to \$b,\ \$\$ \to \varepsilon\}$
gilt $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to \$T\$, T \to aAT, T \to bBT, T \to \varepsilon, \$a \to a\$, \$b \to b\$, Aa \to aA,$
$Ab \to bA, Ba \to aB, Bb \to bB, A\$ \to \$a, B\$ \to \$b, \$\$ \to \varepsilon\}$
gilt $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Beweis

"$\supseteq$" Wir zeigen, dass $ww \in L(G)$ für alle $w \in \{a, b\}^*$.

- Mit $S \to \$T\$$ wird zunächst eine Umrahmung mit \$\$ erzeugt.

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to \$T\$,\ T \to aAT,\ T \to bBT,\ T \to \varepsilon,\ \$a \to a\$,\ \$b \to b\$,\ Aa \to aA,$
$Ab \to bA,\ Ba \to aB,\ Bb \to bB,\ A\$ \to \$a,\ B\$ \to \$b,\ \$\$ \to \varepsilon\}$
gilt $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Beweis

"$\supseteq$" Wir zeigen, dass $ww \in L(G)$ für alle $w \in \{a, b\}^*$.

- Mit $S \to \$T\$$ wird zunächst eine Umrahmung mit $\$\$$ erzeugt.
- Mit $T \to aAT$, $T \to bBT$, $T \to \varepsilon$ wird eine Satzform aus Blöcken aA, bB erzeugt.

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to \$T\$,\ T \to aAT,\ T \to bBT,\ T \to \varepsilon,\ \$a \to a\$,\ \$b \to b\$,\ Aa \to aA,$
$\quad Ab \to bA,\ Ba \to aB,\ Bb \to bB,\ A\$ \to \$a,\ B\$ \to \$b,\ \$\$ \to \varepsilon\}$
gilt $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Beweis

"$\supseteq$" Wir zeigen, dass $ww \in L(G)$ für alle $w \in \{a, b\}^*$.

- Mit $S \to \$T\$$ wird zunächst eine Umrahmung mit \$\$ erzeugt.
- Mit $T \to aAT$, $T \to bBT$, $T \to \varepsilon$ wird eine Satzform aus Blöcken aA, bB erzeugt.
- Mit $Aa \to aA$, $Ab \to bA$, $Ba \to aB$, $Bb \to bB$ kommen A's und B's bis vor \$.

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to \$T\$,\ T \to aAT,\ T \to bBT,\ T \to \varepsilon,\ \$a \to a\$,\ \$b \to b\$,\ Aa \to aA,$
$\quad Ab \to bA,\ Ba \to aB,\ Bb \to bB,\ A\$ \to \$a,\ B\$ \to \$b,\ \$\$ \to \varepsilon\}$
gilt $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Beweis

"$\supseteq$" Wir zeigen, dass $ww \in L(G)$ für alle $w \in \{a, b\}^*$.

- Mit $S \to \$T\$$ wird zunächst eine Umrahmung mit \$\$ erzeugt.
- Mit $T \to aAT$, $T \to bBT$, $T \to \varepsilon$ wird eine Satzform aus Blöcken aA, bB erzeugt.
- Mit $Aa \to aA$, $Ab \to bA$, $Ba \to aB$, $Bb \to bB$ kommen A's und B's bis vor \$.
- Mit $A\$ \to \$a$, $B\$ \to \$b$ werden die A's und B's in a's und b's verwandelt.

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to \$T\$,\ T \to aAT,\ T \to bBT,\ T \to \varepsilon,\ \$a \to a\$,\ \$b \to b\$,\ Aa \to aA,$
$\quad Ab \to bA,\ Ba \to aB,\ Bb \to bB,\ A\$ \to \$a,\ B\$ \to \$b,\ \$\$ \to \varepsilon\}$
gilt $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Beweis

"$\supseteq$" Wir zeigen, dass $ww \in L(G)$ für alle $w \in \{a, b\}^*$.

- Mit $S \to \$T\$$ wird zunächst eine Umrahmung mit $\$\$$ erzeugt.
- Mit $T \to aAT$, $T \to bBT$, $T \to \varepsilon$ wird eine Satzform aus Blöcken aA, bB erzeugt.
- Mit $Aa \to aA$, $Ab \to bA$, $Ba \to aB$, $Bb \to bB$ kommen A's und B's bis vor \$.
- Mit $A\$ \to \$a$, $B\$ \to \$b$ werden die A's und B's in a's und b's verwandelt.
- Mit $\$a \to a\$$, $\$b \to b\$$ wird das linke \$ zum rechten geschoben, mit $\$\$ \to \varepsilon$ werden die beiden \$'s dann eliminiert.

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to \$T\$,\ T \to aAT,\ T \to bBT,\ T \to \varepsilon,\ \$a \to a\$,\ \$b \to b\$,\ Aa \to aA,$
$\quad Ab \to bA,\ Ba \to aB,\ Bb \to bB,\ A\$ \to \$a,\ B\$ \to \$b,\ \$\$ \to \varepsilon\}$
gilt $L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Beweis

"$\supseteq$" Wir zeigen, dass $ww \in L(G)$ für alle $w \in \{a, b\}^*$.

- Mit $S \to \$T\$$ wird zunächst eine Umrahmung mit \$\$ erzeugt.
- Mit $T \to aAT$, $T \to bBT$, $T \to \varepsilon$ wird eine Satzform aus Blöcken aA, bB erzeugt.
- Mit $Aa \to aA$, $Ab \to bA$, $Ba \to aB$, $Bb \to bB$ kommen A's und B's bis vor \$.
- Mit $A\$ \to \$a$, $B\$ \to \$b$ werden die A's und B's in a's und b's verwandelt.
- Mit $\$a \to a\$$, $\$b \to b\$$ wird das linke \$ zum rechten geschoben, mit $\$\$ \to \varepsilon$ werden die beiden \$'s dann eliminiert.
- Die relative Lage aller a's zu b's bzw. aller A's zu B's wird nie geändert.

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$$P = \{S \to \$T\$,\ T \to aAT,\ T \to bBT,\ T \to \varepsilon,\ \$a \to a\$,\ \$b \to b\$,\ Aa \to aA,\ Ab \to bA,\ Ba \to aB,\ Bb \to bB,\ A\$ \to \$a,\ B\$ \to \$b,\ \$\$ \to \varepsilon\}.$$ gilt
$L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Beweis (Fortsetzung)

"$\subseteq$" Wir zeigen, dass alle Wörter in $L(G)$ von der Form ww sind.

Beispiel für eine Typ 0-Grammatik

Satz

Für $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to \$T\$,\ T \to aAT,\ T \to bBT,\ T \to \varepsilon,\ \$a \to a\$,\ \$b \to b\$,\ Aa \to aA,$
$\quad Ab \to bA,\ Ba \to aB,\ Bb \to bB,\ A\$ \to \$a,\ B\$ \to \$b,\ \$\$ \to \varepsilon\}.$ gilt
$L(G) = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Beweis (Fortsetzung)

"$\subseteq$" Wir zeigen, dass alle Wörter in $L(G)$ von der Form ww sind.

Alle Ableitungen müssen mit unwesentlichen Abweichungen von der unter "$\supseteq$" angegebenen Form sein und deshalb zu ww führen. $\square$

Mehrdeutige Grammatiken

Beispiel: $(E, \{*, +, 1, 2\}, P, E)$ mit $P = \{E \to E * E,\ E \to E + E,\ E \to 1,\ E \to 2\}$

Zwei Ableitungen für $1 + 2 * 2$:

- $E \Rightarrow E * E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow 1 + E * E \Rightarrow 1 + 2 * E \Rightarrow 1 + 2 * 2$
- $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow 1 + E * E \Rightarrow 1 + 2 * E \Rightarrow 1 + 2 * 2$

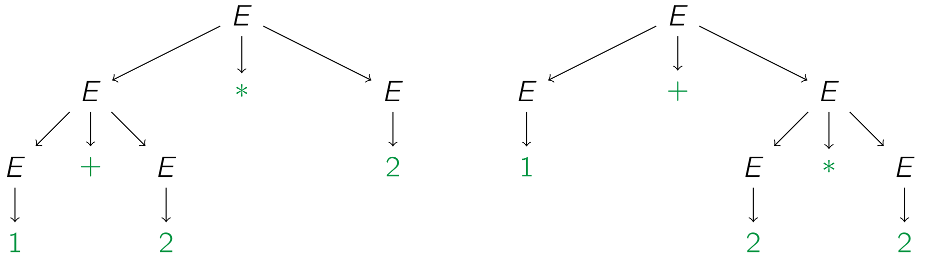
Mehrdeutige Grammatiken

Beispiel: $(E, \{*, +, 1, 2\}, P, E)$ mit $P = \{E \to E * E,\ E \to E + E,\ E \to 1,\ E \to 2\}$

Zwei Ableitungen für $1 + 2 * 2$:

- $E \Rightarrow E * E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow 1 + E * E \Rightarrow 1 + 2 * E \Rightarrow 1 + 2 * 2$
- $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E \Rightarrow 1 + E * E \Rightarrow 1 + 2 * E \Rightarrow 1 + 2 * 2$

Syntaxbäume dazu:



Mehrdeutige Grammatiken

Definition

Eine Typ 2-Grammatik ist mehrdeutig, wenn es verschieden strukturierte Syntaxbäume für dasselbe Wort w gibt.

Definition

Eine Typ 2-Sprache ist inhärent mehrdeutig, wenn es nur mehrdeutige Grammatiken gibt, die diese Sprache erzeugen.

Mehrdeutige Grammatiken

Definition

Eine Typ 2-Grammatik ist mehrdeutig, wenn es verschieden strukturierte Syntaxbäume für dasselbe Wort w gibt.

Definition

Eine Typ 2-Sprache ist inhärent mehrdeutig, wenn es nur mehrdeutige Grammatiken gibt, die diese Sprache erzeugen.

Die Sprache

$$\{a^m b^m c^n d^n \mid m, n \in \mathbb{N}_{>0}\} \cup \{a^m b^n c^n d^m \mid m, n \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

ist inhärent mehrdeutig (Beweis in Hopcroft et al. 2006).

ε-Produktionen: 1. Sonderregel

- Das leere Wort ε kann bisher nicht für Typ 1, 2, 3-Grammatiken erzeugt werden. Produktion $S \to \varepsilon$ erfüllt die Typ 1-Bedingung $|S| \leq |\varepsilon|$ nicht.

ε-Produktionen: 1. Sonderregel

- Das leere Wort ε kann bisher nicht für Typ 1, 2, 3-Grammatiken erzeugt werden. Produktion $S \to \varepsilon$ erfüllt die Typ 1-Bedingung $|S| \leq |\varepsilon|$ nicht.

Daher:

1. Sonderregel: ε-Produktion in Typ 1, 2, 3-Grammatiken

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ vom Typ 1, 2 oder 3 darf eine Produktion $S \to \varepsilon \in P$ enthalten, vorausgesetzt, dass S auf keiner rechten Seite einer Produktion in P vorkommt.

ε-Produktionen: 1. Sonderregel

- Das leere Wort ε kann bisher nicht für Typ 1, 2, 3-Grammatiken erzeugt werden. Produktion $S \to \varepsilon$ erfüllt die Typ 1-Bedingung $|S| \leq |\varepsilon|$ nicht.

Daher:

1. Sonderregel: ε-Produktion in Typ 1, 2, 3-Grammatiken

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ vom Typ 1, 2 oder 3 darf eine Produktion $S \to \varepsilon \in P$ enthalten, vorausgesetzt, dass S auf keiner rechten Seite einer Produktion in P vorkommt.

Sonderregel erlaubt nicht:

$G = (\{S\}, \{a\}, \{S \to \varepsilon, S \to aSa\}, S)$

Sonderregel erlaubt:

$G = (\{S', S\}, \{a\}, \{S' \to \varepsilon, S' \to aSa, S \to aSa\}, S')$

Leeres Wort hinzufügen geht mit 1. Sonderregel immer

Satz (Anwendung von 1. Sonderregel)

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ vom Typ $i \in \{1, 2, 3\}$ mit $\varepsilon \notin L(G)$. Sei $S' \notin V$.
Dann erzeugt $G' = (V \cup \{S'\}, \Sigma, P \cup \{S' \to \varepsilon\} \cup \{S' \to r \mid S \to r \in P\}, S')$ die Sprache $L(G') = L(G) \cup \{\varepsilon\}$, G' erfüllt die 1. Sonderregel und G' ist vom Typ i.

Leeres Wort hinzufügen geht mit 1. Sonderregel immer

Satz (Anwendung von 1. Sonderregel)

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ vom Typ $i \in \{1, 2, 3\}$ mit $\varepsilon \notin L(G)$. Sei $S' \notin V$.
Dann erzeugt $G' = (V \cup \{S'\}, \Sigma, P \cup \{S' \to \varepsilon\} \cup \{S' \to r \mid S \to r \in P\}, S')$ die Sprache $L(G') = L(G) \cup \{\varepsilon\}$, G' erfüllt die 1. Sonderregel und G' ist vom Typ i.

Beweis

1. $L(G') = L(G) \cup \{\varepsilon\}$: Da $S' \Rightarrow \varepsilon$, gilt $\varepsilon \in L(G')$.

   Für $w \neq \varepsilon$ gilt:
   $S \Rightarrow_G^* w$. g.d.w. $S' \Rightarrow_{G'}^* w$. Der jeweils erste Ableitungsschritt muss ausgetauscht werden, d.h. $S \Rightarrow_G r$ vs. $S' \Rightarrow_{G'} r$.
2. Da S' neu ist, kommt S' auf keiner rechten Seite vor.
3. Da $S \to r \in P$ vom Typ i sind, sind auch $S' \to r$ vom Typ i. $\square$

ε-Produktionen: 2. Sonderregel

Weitere Sonderregel:

2. Sonderregel: ε-Produktionen in Typ 2- und Typ 3-Grammatiken

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ vom Typ 2 oder 3 darf Produktionen von der Form $A \to \varepsilon \in P$ enthalten, wo $A \in V \setminus \{S\}$.

ε-Produktionen: 2. Sonderregel

Weitere Sonderregel:

2. Sonderregel: ε-Produktionen in Typ 2- und Typ 3-Grammatiken

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ vom Typ 2 oder 3 darf Produktionen von der Form $A \to \varepsilon \in P$ enthalten, wo $A \in V \setminus \{S\}$.

Das ist keine echte Erweiterung, denn:

Satz (Entfernen von ε-Produktionen)

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Typ i-Grammatik (mit 1. und 2. Sonderregel), wo $i \in \{2, 3\}$. Dann gibt es eine Typ i-Grammatik G' mit $L(G') = L(G)$ und G' enthält keine ε-Produktionen außer $S \to \varepsilon$, falls vorhanden.

ε-Produktionen: 2. Sonderregel

Weitere Sonderregel:

2. Sonderregel: ε-Produktionen in Typ 2- und Typ 3-Grammatiken

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ vom Typ 2 oder 3 darf Produktionen von der Form $A \to \varepsilon \in P$ enthalten, wo $A \in V \setminus \{S\}$.

Das ist keine echte Erweiterung, denn:

Satz (Entfernen von ε-Produktionen)

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Typ i-Grammatik (mit 1. und 2. Sonderregel), wo $i \in \{2, 3\}$. Dann gibt es eine Typ i-Grammatik G' mit $L(G') = L(G)$ und G' enthält keine ε-Produktionen außer $S \to \varepsilon$, falls vorhanden.

Beweis Algorithmus 1 auf späterer Folie erzeugt G'. $\square$

Entfernen von ε-Produktionen

Intuitiver Ansatz:

1. Wiederhole bis alle ε-Produktionen (außer $S \to \varepsilon$, falls vorhanden) entfernt sind:
   1.1 Sei $A \to \varepsilon \in P$, wo $A \neq S$.
   1.2 Entferne $A \to \varepsilon$.
   1.3 Für jede Produktion $B \to uAv$ füge eine neue Produktion $B \to uv$ hinzu, die den Ableitungsschritt $A \Rightarrow \varepsilon$ vorwegnimmt.

Entfernen von ε-Produktionen

Intuitiver Ansatz:

1. Wiederhole bis alle ε-Produktionen (außer $S \to \varepsilon$, falls vorhanden) entfernt sind:
   1.1 Sei $A \to \varepsilon \in P$, wo $A \neq S$.
   1.2 Entferne $A \to \varepsilon$.
   1.3 Für jede Produktion $B \to uAv$ füge eine neue Produktion $B \to uv$ hinzu, die den Ableitungsschritt $A \Rightarrow \varepsilon$ vorwegnimmt.

Mit anderen Worten: Statt $B \to uAv$ gefolgt von $A \to \varepsilon$ anzuwenden, können wir also $B \to uv$ direkt anwenden. Dann brauchen wir $A \to \varepsilon$ nicht mehr.

Entfernen von ε-Produktionen

Intuitiver Ansatz:

1. Wiederhole bis alle ε-Produktionen (außer $S \to \varepsilon$, falls vorhanden) entfernt sind:
   1.1 Sei $A \to \varepsilon \in P$, wo $A \neq S$.
   1.2 Entferne $A \to \varepsilon$.
   1.3 Für jede Produktion $B \to uAv$ füge eine neue Produktion $B \to uv$ hinzu, die den Ableitungsschritt $A \Rightarrow \varepsilon$ vorwegnimmt.

Mit anderen Worten: Statt $B \to uAv$ gefolgt von $A \to \varepsilon$ anzuwenden, können wir also $B \to uv$ direkt anwenden. Dann brauchen wir $A \to \varepsilon$ nicht mehr.

Für eine reguläre Produktion $B \to aA$ wird $B \to a$ hinzugefügt.
Die Grammatik bleibt regulär.

Entfernen von ε-Produktionen

Intuitiver Ansatz:

1. Wiederhole bis alle ε-Produktionen (außer $S \to \varepsilon$, falls vorhanden) entfernt sind:
   1.1 Sei $A \to \varepsilon \in P$, wo $A \neq S$.
   1.2 Entferne $A \to \varepsilon$.
   1.3 Für jede Produktion $B \to uAv$ füge eine neue Produktion $B \to uv$ hinzu, die den Ableitungsschritt $A \Rightarrow \varepsilon$ vorwegnimmt.

Mit anderen Worten: Statt $B \to uAv$ gefolgt von $A \to \varepsilon$ anzuwenden, können wir also $B \to uv$ direkt anwenden. Dann brauchen wir $A \to \varepsilon$ nicht mehr.

Für eine reguläre Produktion $B \to aA$ wird $B \to a$ hinzugefügt.
Die Grammatik bleibt regulär.

Algorithmus 1 basiert auf dieser Idee, entfernt aber alle ε-Produktionen gleichzeitig.

Beispiel für das Entfernen von ε-Produktionen

Typ 2-Grammatik mit ε-Produktion:
$G = (\{A, S\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit $P = \{S \to AA1,\ A \to 0,\ A \to \varepsilon\}$

Beispiel für das Entfernen von ε-Produktionen

Typ 2-Grammatik mit ε-Produktion:
$G = (\{A, S\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit $P = \{S \to AA1,\ A \to 0,\ A \to \varepsilon\}$

$L(G) = \{001, 01, 1\}$

Beispiel für das Entfernen von ε-Produktionen

Typ 2-Grammatik mit ε-Produktion:
$G = (\{A, S\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit $P = \{S \to AA1,\ A \to 0,\ A \to \varepsilon\}$

$L(G) = \{001, 01, 1\}$

Äquivalente Typ 2-Grammatik ohne ε-Produktion:
$G' = (\{A, S\}, \{0, 1\}, P', S)$ mit $P' = \{S \to AA1,\ S \to A1,\ S \to 1,\ A \to 0\}$

Beispiel für das Entfernen von ε-Produktionen

Typ 2-Grammatik mit ε-Produktion:
$G = (\{A, S\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit $P = \{S \to AA1,\ A \to 0,\ A \to \varepsilon\}$

$L(G) = \{001, 01, 1\}$

Äquivalente Typ 2-Grammatik ohne ε-Produktion:
$G' = (\{A, S\}, \{0, 1\}, P', S)$ mit $P' = \{S \to AA1,\ S \to A1,\ S \to 1,\ A \to 0\}$

$L(G') = \{001, 01, 1\}$

Beispiel für das Entfernen von ε-Produktionen

Typ 2-Grammatik mit ε-Produktion:
$G = (\{A, S\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit $P = \{S \to AA1,\ A \to 0,\ A \to \varepsilon\}$

$L(G) = \{001, 01, 1\}$

Äquivalente Typ 2-Grammatik ohne ε-Produktion:
$G' = (\{A, S\}, \{0, 1\}, P', S)$ mit $P' = \{S \to AA1,\ S \to A1,\ S \to 1,\ A \to 0\}$

$L(G') = \{001, 01, 1\}$

Die neuen Produktionen $S \to A1$, $S \to 1$ nehmen den Ableitungsschritt $A \Rightarrow \varepsilon$ vorweg.

Algorithmus 1: Entfernen von ε-Produktionen

Eingabe: Typ i-Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit ε-Produktionen, $i \in \{2, 3\}$
Ausgabe: Typ i-Grammatik G' ohne ε-Produktionen (außer $S \to \varepsilon$, falls vorhanden), sodass $L(G') = L(G)$
Beginn
  finde die Menge $W \subseteq V$ aller Variablen A für die gilt $A \Rightarrow^* \varepsilon$:
  Beginn
    $W := \{A \mid A \to \varepsilon \in P \text{ und } A \neq S\}$;
    wiederhole
      füge alle A zu W hinzu mit $A \to A_1 \ldots A_n \in P$ und $\forall i : A_i \in W$;
    bis *sich W nicht mehr ändert*;
  Ende
  $P' := P \setminus \{A \to \varepsilon \mid A \to \varepsilon \in P \text{ und } A \neq S\}$; /* *lösche Produktionen $A \to \varepsilon$* */
  wiederhole
    für alle *Produktionen $B \to uAv \in P'$ mit $|uv| > 0$ und $A \in W$* **tue**
      füge die Produktion $B \to uv$ zu P' hinzu;
      /* *für $B \to u'Av'Aw'$ gibt es (mindestens) zwei Hinzufügungen: Für das Vorkommen von A direkt nach u' als auch für das Vorkommen direkt vor w'* */
    Ende
  bis *sich P' nicht mehr ändert*;
  gib $G' = (V, \Sigma, P', S)$ als Ergebnisgrammatik aus;
Ende

Weiteres Beispiel für das Entfernen von ε-Produktionen

$$G = (\{A, B, C, D, S\}, \{0, 1\}, P, S) \text{ mit}$$
$$P = \{S \to 1A,\ A \to AB,\ A \to DA,\ A \to \varepsilon,\ B \to 0,$$
$$B \to 1,\ C \to AAA,\ D \to 1AC\}$$

Weiteres Beispiel für das Entfernen von ε-Produktionen

$G = (\{A, B, C, D, S\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to 1A,\ A \to AB,\ A \to DA,\ A \to \varepsilon,\ B \to 0,$
$\quad B \to 1,\ C \to AAA,\ D \to 1AC\}$

1. Finde Menge W der Variablen, die ε herleiten:

   $W = \{A, C\}$ da $A \to \varepsilon$ und $C \to AAA$

Weiteres Beispiel für das Entfernen von ε-Produktionen

$$G = (\{A, B, C, D, S\}, \{0, 1\}, P, S) \text{ mit}$$
$$P = \{S \to 1A,\ A \to AB,\ A \to DA,\ A \to \varepsilon,\ B \to 0,$$
$$B \to 1,\ C \to AAA,\ D \to 1AC\}$$

1. Finde Menge W der Variablen, die ε herleiten:

   $W = \{A, C\}$ da $A \to \varepsilon$ und $C \to AAA$
2. Starte mit
   $$P' = \{S \to 1A,\ A \to AB,\ A \to DA,\ B \to 0,$$
   $$B \to 1,\ C \to AAA,\ D \to 1AC\}$$

Weiteres Beispiel für das Entfernen von ε-Produktionen

$$G = (\{A, B, C, D, S\}, \{0, 1\}, P, S) \text{ mit}$$
$$P = \{S \to 1A,\ A \to AB,\ A \to DA,\ A \to \varepsilon,\ B \to 0,$$
$$B \to 1,\ C \to AAA,\ D \to 1AC\}$$

1. Finde Menge W der Variablen, die ε herleiten:

   $W = \{A, C\}$ da $A \to \varepsilon$ und $C \to AAA$

2. Starte mit
   $$P' = \{S \to 1A,\ A \to AB,\ A \to DA,\ B \to 0,$$
   $$B \to 1,\ C \to AAA,\ D \to 1AC\}$$

3. Füge Produktionen für Vorkommen von A und C hinzu:
   $$P' = \{S \to 1A,\ S \to 1,\ A \to AB,\ A \to B,\ A \to DA,\ A \to D,$$
   $$B \to 0,\ B \to 1,\ C \to AAA,\ C \to AA,\ C \to A,$$
   $$D \to 1AC,\ D \to 1A,\ D \to 1C,\ D \to 1\}$$