1b
Grammatiken und die Chomsky-Hierarchie

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 15. April 2024
Basiert auf Folien von PD Dr. David Sabel und Dr. Jan Johannsen

Formale Sprachen darstellen

- Sei Σ ein Alphabet.
- Eine Sprache über Σ ist eine Teilmenge von Σ^*.

Formale Sprachen darstellen

- Sei Σ ein Alphabet.
- Eine Sprache über Σ ist eine Teilmenge von Σ^*.
- Für $\Sigma = \{(,), +, -, *, /, a\}$ sei L_{ArEx} die Sprache aller korrekt geklammerten Ausdrücke.
  Z.B. $((a + a) - a) * a \in L_{ArEx}$ aber $(a-) + a) \notin L_{ArEx}$.
- Unsere bisherigen Operationen auf Sprachen (Mengen) können das nicht darstellen.

Formale Sprachen darstellen

- Sei Σ ein Alphabet.
- Eine Sprache über Σ ist eine Teilmenge von Σ^*.
- Für $\Sigma = \{(,), +, -, *, /, a\}$ sei L_{ArEx} die Sprache aller korrekt geklammerten Ausdrücke.
  Z.B. $((a + a) - a) * a \in L_{ArEx}$ aber $(a-) + a) \notin L_{ArEx}$.
- Unsere bisherigen Operationen auf Sprachen (Mengen) können das nicht darstellen.

Benötigt: Formalismus, um L_{ArEx} zu beschreiben

Formale Sprachen darstellen

Anforderungen:

- Beschreibung muss endlich sein.
- Sprache selbst muss aber auch unendlich viele Objekte erlauben.

Zwei wesentliche solchen Formalismen sind

- Grammatiken
- Automaten.

Grammatiken

Grammatik für einen sehr kleinen Teil der deutschen Sprache:

<Satz>	$\rightarrow$	<Subjekt><Prädikat><Objekt>
<Subjekt>	$\rightarrow$	<Artikel><Attribut><Nomen>
<Objekt>	$\rightarrow$	<Artikel><Attribut><Nomen>
<Artikel>	$\rightarrow$	ε
<Artikel>	$\rightarrow$	der
<Artikel>	$\rightarrow$	das
<Attribut>	$\rightarrow$	<Adjektiv>
<Attribut>	$\rightarrow$	<Adjektiv><Attribut>
<Adjektiv>	$\rightarrow$	kleine
<Adjektiv>	$\rightarrow$	große
<Adjektiv>	$\rightarrow$	nette
<Adjektiv>	$\rightarrow$	blaue
<Nomen>	$\rightarrow$	Frau
<Nomen>	$\rightarrow$	Mann
<Nomen>	$\rightarrow$	Auto
<Prädikat>	$\rightarrow$	fährt
<Prädikat>	$\rightarrow$	liebt

Grammatiken

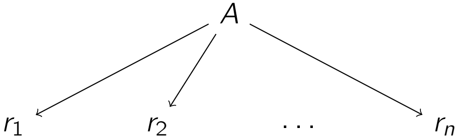
- Grammatik = endliche Menge von Regeln „linke Seite $\rightarrow$ rechte Seite"
- Symbole in spitzen Klammern wie <Artikel> sind Variablen,
  d.h. sie sind Platzhalter, die weiter ersetzt werden müssen.
- Z.B. kann

  der kleine nette Mann fährt das große blaue Auto

  durch die vorige Grammatik abgeleitet werden.

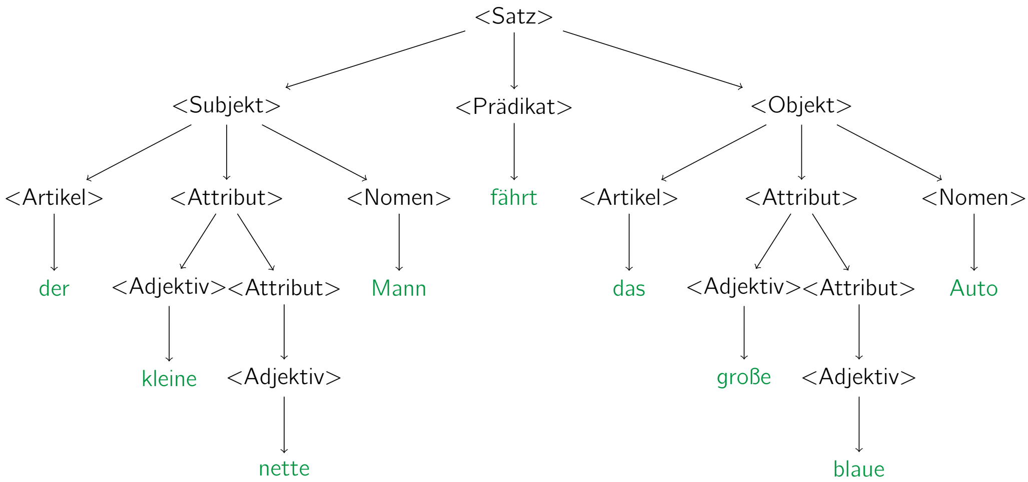
Syntaxbäume

- Ein Syntaxbaum stellt dar, wie ein Satz entsteht.
- Die Anwendung von $A \rightarrow r_1 r_2 \ldots r_n$ wird durch den Teilbaum



dargestellt.

Syntaxbaum zum Beispiel



Definition einer Grammatik

Definition

Eine Grammatik ist ein 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$ wobei:

- V ist eine endliche Menge von Variablen
- Σ (mit $V \cap \Sigma = \emptyset$) ist ein Alphabet von Zeichen
- P ist eine endliche Menge von Produktionen
  von der Form $\ell \to r$ wobei $\ell \in (V \cup \Sigma)^+$ und $r \in (V \cup \Sigma)^*$
- $S \in V$ ist das Startsymbol.

Definition einer Grammatik

Definition

Eine Grammatik ist ein 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$ wobei:

- V ist eine endliche Menge von Variablen (alternativ Nichtterminalen)
- Σ (mit $V \cap \Sigma = \emptyset$) ist ein Alphabet von Zeichen (alternativ Terminalen)
- P ist eine endliche Menge von Produktionen (alternativ Regeln) von der Form $\ell \to r$ wobei $\ell \in (V \cup \Sigma)^+$ und $r \in (V \cup \Sigma)^*$
- $S \in V$ ist das Startsymbol (alternativ Startvariable).

Definition einer Grammatik

Definition

Eine Grammatik ist ein 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$ wobei:

- V ist eine endliche Menge von Variablen (alternativ Nichtterminalen)
- Σ (mit $V \cap \Sigma = \emptyset$) ist ein Alphabet von Zeichen (alternativ Terminalen)
- P ist eine endliche Menge von Produktionen (alternativ Regeln) von der Form $\ell \to r$ wobei $\ell \in (V \cup \Sigma)^+$ und $r \in (V \cup \Sigma)^*$
- $S \in V$ ist das Startsymbol (alternativ Startvariable).

Produktionen mit ε auf der rechten Seite heißen ε-Produktionen.

Manchmal genügt es, die Produktionen P alleine zu notieren (wenn klar ist, was V, Σ und S sind).

Beispiel für eine Grammatik

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit
$V = \{E, M, Z\}$,
$\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und

$$
\begin{aligned}
P = \{&E \to M,\\
&E \to E + M,\\
&M \to Z,\\
&M \to M * Z,\\
&Z \to 1,\\
&Z \to 2,\\
&Z \to (E)\}
\end{aligned}
$$

Ableitungsschritte

Definition

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.
Eine Satzform ist ein Wort aus $(V \cup \Sigma)^*$.
Satzform u geht unter Grammatik G unmittelbar in Satzform v über, $u \Rightarrow_G v$, wenn

$$u = w_1 \ell w_2 \text{ und } v = w_1 r w_2 \text{ mit } \ell \to r \in P$$

- Wenn G klar ist, schreiben wir $u \Rightarrow v$ statt $u \Rightarrow_G v$.
- $\Rightarrow^*$ ist die reflexiv-transitive Hülle von $\Rightarrow$. Sie ist definiert durch folgende Regeln (und nur diese):
  - falls $u \Rightarrow v$, dann ist $u \Rightarrow^* v$
  - $u \Rightarrow^* u$
  - falls $u \Rightarrow^* v$ und $v \Rightarrow^* w$, dann ist $u \Rightarrow^* w$.

Ableitungen

Definition

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.
Eine Folge $(w_0, w_1, \ldots, w_n)$ mit $w_0 = S$, $w_n \in \Sigma^*$ und $w_{i-1} \Rightarrow w_i$ für $i = 1, \ldots, n$ heißt Ableitung von w_n.
Statt $(w_0, \ldots, w_n)$ schreiben wir auch $w_0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_n$.

Beispiel für eine Ableitung

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und
$P = \{E \to M, E \to E + M, M \to Z, M \to M * Z, Z \to 1, Z \to 2, Z \to (E)\}$

Eine Ableitung von $(2 + 1) * (2 + 2)$:

$E \Rightarrow M$

Beispiel für eine Ableitung

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und
$P = \{E \to M,\ E \to E + M,\ M \to Z,\ M \to M * Z,\ Z \to 1,\ Z \to 2,\ Z \to (E)\}$

Eine Ableitung von $(2 + 1) * (2 + 2)$:

$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z$

Beispiel für eine Ableitung

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und
$P = \{E \to M,\ E \to E + M,\ M \to Z,\ M \to M * Z,\ Z \to 1,\ Z \to 2,\ Z \to (E)\}$

Eine Ableitung von $(2 + 1) * (2 + 2)$:

$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z$

Beispiel für eine Ableitung

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und
$P = \{E \to M,\ E \to E + M,\ M \to Z,\ M \to M * Z,\ Z \to 1,\ Z \to 2,\ Z \to (E)\}$

Eine Ableitung von $(2 + 1) * (2 + 2)$:

$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E)$

Beispiel für eine Ableitung

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und
$P = \{E \to M, E \to E + M, M \to Z, M \to M * Z, Z \to 1, Z \to 2, Z \to (E)\}$

Eine Ableitung von $(2 + 1) * (2 + 2)$:

$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M)$

Beispiel für eine Ableitung

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und
$P = \{E \to M,\ E \to E + M,\ M \to Z,\ M \to M * Z,\ Z \to 1,\ Z \to 2,\ Z \to (E)\}$

Eine Ableitung von $(2 + 1) * (2 + 2)$:

$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M)$
$\Rightarrow (E) * (E + M)$

Beispiel für eine Ableitung

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und
$P = \{E \to M,\ E \to E + M,\ M \to Z,\ M \to M * Z,\ Z \to 1,\ Z \to 2,\ Z \to (E)\}$

Eine Ableitung von $(2 + 1) * (2 + 2)$:

$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M)$
$\Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z)$

Beispiel für eine Ableitung

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und
$P = \{E \to M,\ E \to E + M,\ M \to Z,\ M \to M * Z,\ Z \to 1,\ Z \to 2,\ Z \to (E)\}$

Eine Ableitung von $(2 + 1) * (2 + 2)$:

$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M)$
$\Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z)$

Beispiel für eine Ableitung

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und
$P = \{E \to M, E \to E + M, M \to Z, M \to M * Z, Z \to 1, Z \to 2, Z \to (E)\}$

Eine Ableitung von $(2 + 1) * (2 + 2)$:

$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M)$
$\Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z)$
$\Rightarrow (M + M) * (E + Z)$

Beispiel für eine Ableitung

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und
$P = \{E \to M, E \to E + M, M \to Z, M \to M * Z, Z \to 1, Z \to 2, Z \to (E)\}$

Eine Ableitung von $(2 + 1) * (2 + 2)$:

$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M)$
$\Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z)$
$\Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z)$

Beispiel für eine Ableitung

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und
$P = \{E \to M,\ E \to E + M,\ M \to Z,\ M \to M * Z,\ Z \to 1,\ Z \to 2,\ Z \to (E)\}$

Eine Ableitung von $(2 + 1) * (2 + 2)$:

$$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M)$$
$$\Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z)$$
$$\Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z)$$
$$\Rightarrow (M + M) * (Z + Z)$$

Beispiel für eine Ableitung

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und
$P = \{E \to M,\ E \to E + M,\ M \to Z,\ M \to M * Z,\ Z \to 1,\ Z \to 2,\ Z \to (E)\}$

Eine Ableitung von $(2 + 1) * (2 + 2)$:

$$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M)$$
$$\Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z)$$
$$\Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z)$$
$$\Rightarrow (M + M) * (Z + Z) \Rightarrow (M + M) * (Z + 2)$$

Beispiel für eine Ableitung

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und
$P = \{E \to M,\ E \to E + M,\ M \to Z,\ M \to M * Z,\ Z \to 1,\ Z \to 2,\ Z \to (E)\}$

Eine Ableitung von $(2 + 1) * (2 + 2)$:

$$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M)$$
$$\Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z)$$
$$\Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z)$$
$$\Rightarrow (M + M) * (Z + Z) \Rightarrow (M + M) * (Z + 2)$$
$$\Rightarrow (M + Z) * (Z + 2)$$

Beispiel für eine Ableitung

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und
$P = \{E \to M,\ E \to E + M,\ M \to Z,\ M \to M * Z,\ Z \to 1,\ Z \to 2,\ Z \to (E)\}$

Eine Ableitung von $(2 + 1) * (2 + 2)$:

$$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M)$$
$$\Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z)$$
$$\Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z)$$
$$\Rightarrow (M + M) * (Z + Z) \Rightarrow (M + M) * (Z + 2)$$
$$\Rightarrow (M + Z) * (Z + 2) \Rightarrow (M + Z) * (2 + 2)$$

Beispiel für eine Ableitung

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und
$P = \{E \to M,\ E \to E + M,\ M \to Z,\ M \to M * Z,\ Z \to 1,\ Z \to 2,\ Z \to (E)\}$

Eine Ableitung von $(2 + 1) * (2 + 2)$:

$$
\begin{aligned}
&E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M)\\
&\Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z)\\
&\Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z)\\
&\Rightarrow (M + M) * (Z + Z) \Rightarrow (M + M) * (Z + 2)\\
&\Rightarrow (M + Z) * (Z + 2) \Rightarrow (M + Z) * (2 + 2)\\
&\Rightarrow (Z + Z) * (2 + 2)
\end{aligned}
$$

Beispiel für eine Ableitung

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und
$P = \{E \to M,\ E \to E + M,\ M \to Z,\ M \to M * Z,\ Z \to 1,\ Z \to 2,\ Z \to (E)\}$

Eine Ableitung von $(2 + 1) * (2 + 2)$:

$$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M)$$
$$\Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z)$$
$$\Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z)$$
$$\Rightarrow (M + M) * (Z + Z) \Rightarrow (M + M) * (Z + 2)$$
$$\Rightarrow (M + Z) * (Z + 2) \Rightarrow (M + Z) * (2 + 2)$$
$$\Rightarrow (Z + Z) * (2 + 2) \Rightarrow (2 + Z) * (2 + 2)$$

Beispiel für eine Ableitung

$G = (V, \Sigma, P, E)$ mit $V = \{E, M, Z\}$ und $\Sigma = \{+, *, 1, 2, (,)\}$ und
$P = \{E \to M,\ E \to E + M,\ M \to Z,\ M \to M * Z,\ Z \to 1,\ Z \to 2,\ Z \to (E)\}$

Eine Ableitung von $(2 + 1) * (2 + 2)$:

$$
\begin{aligned}
&E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M)\\
&\Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z)\\
&\Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z)\\
&\Rightarrow (M + M) * (Z + Z) \Rightarrow (M + M) * (Z + 2)\\
&\Rightarrow (M + Z) * (Z + 2) \Rightarrow (M + Z) * (2 + 2)\\
&\Rightarrow (Z + Z) * (2 + 2) \Rightarrow (2 + Z) * (2 + 2) \Rightarrow (2 + 1) * (2 + 2)
\end{aligned}
$$

Ableitungen sind nicht eindeutig

Ableitung von letzter Folie:

$$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M)$$
$$\Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z)$$
$$\Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z)$$
$$\Rightarrow (M + M) * (Z + Z) \Rightarrow (M + M) * (Z + 2)$$
$$\Rightarrow (M + Z) * (Z + 2) \Rightarrow (M + Z) * (2 + 2)$$
$$\Rightarrow (Z + Z) * (2 + 2) \Rightarrow (2 + Z) * (2 + 2) \Rightarrow (2 + 1) * (2 + 2)$$

Ableitungen sind nicht eindeutig

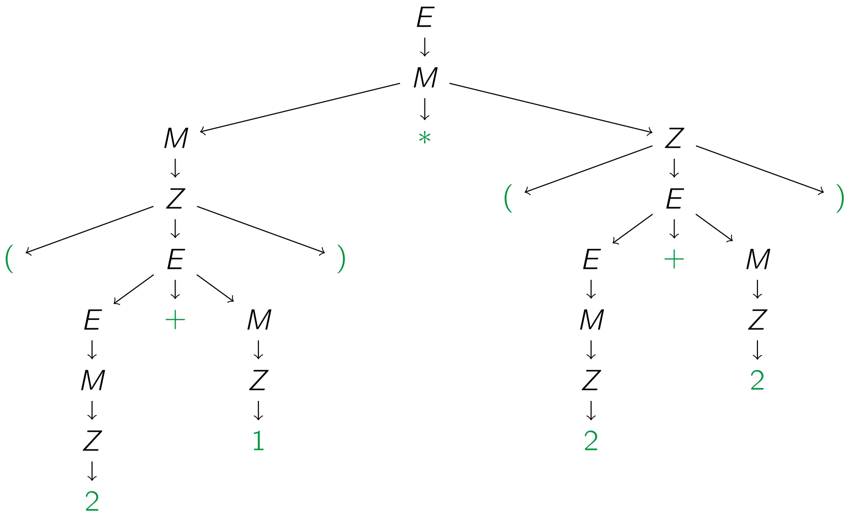
Ableitung von letzter Folie:

$$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow Z * (E) \Rightarrow Z * (E + M)$$
$$\Rightarrow (E) * (E + M) \Rightarrow (E) * (E + Z) \Rightarrow (E + M) * (E + Z)$$
$$\Rightarrow (M + M) * (E + Z) \Rightarrow (M + M) * (M + Z)$$
$$\Rightarrow (M + M) * (Z + Z) \Rightarrow (M + M) * (Z + 2)$$
$$\Rightarrow (M + Z) * (Z + 2) \Rightarrow (M + Z) * (2 + 2)$$
$$\Rightarrow (Z + Z) * (2 + 2) \Rightarrow (2 + Z) * (2 + 2) \Rightarrow (2 + 1) * (2 + 2)$$

Linksableitung (ersetzt immer die linkeste Variable):

$$E \Rightarrow M \Rightarrow M * Z \Rightarrow Z * Z \Rightarrow (E) * Z$$
$$\Rightarrow (E + M) * Z \Rightarrow (M + M) * Z \Rightarrow (Z + M) * Z$$
$$\Rightarrow (2 + M) * Z \Rightarrow (2 + Z) * Z \Rightarrow (2 + 1) * Z \Rightarrow (2 + 1) * (E)$$
$$\Rightarrow (2 + 1) * (E + M) \Rightarrow (2 + 1) * (M + M) \Rightarrow (2 + 1) * (Z + M)$$
$$\Rightarrow (2 + 1) * (2 + M) \Rightarrow (2 + 1) * (2 + Z) \Rightarrow (2 + 1) * (2 + 2)$$

Syntaxbaum zu beiden Ableitungen



Nichtdeterminismus beim Ableiten

Für eine Satzform u kann es verschiedene Satzformen v geben mit $u \Rightarrow_G v$.

Quellen des Nichtdeterminismus:

- Wähle welche Produktion $\ell \to r$ aus P angewendet wird.
- Wähle die Position des Teilworts ℓ in u, das durch r ersetzt wird.

Aber: Es gibt nur endlich viele Satzformen v für jeden Schritt.

Erzeugte Sprache

Definition

Die von einer Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ erzeugte Sprache $L(G)$ ist

$$L(G) := \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}$$

Beispiele für erzeugte Sprache

$G_1 = (\{S\}, \{a\}, \{S \to aS\}, S)$
$L(G_1) = ?$

$G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS,\ S \to b\}, S)$
$L(G_2) = ?$

Beispiele für erzeugte Sprache

$G_1 = (\{S\}, \{a\}, \{S \to aS\}, S)$
$L(G_1) = ?$

- $S \Rightarrow aS \Rightarrow aaS \Rightarrow \cdots$ endet nie.
- Andere Ableitungen gibt es nicht.
- Daher sind keine Wörter aus $\{a\}^*$ ableitbar.

$G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS,\ S \to b\}, S)$
$L(G_2) = ?$

Beispiele für erzeugte Sprache

$G_1 = (\{S\}, \{a\}, \{S \to aS\}, S)$
$L(G_1) = \emptyset$

- $S \Rightarrow aS \Rightarrow aaS \Rightarrow \cdots$ endet nie.
- Andere Ableitungen gibt es nicht.
- Daher sind keine Wörter aus $\{a\}^*$ ableitbar.

$G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS,\ S \to b\}, S)$
$L(G_2) = ?$

Beispiele für erzeugte Sprache

$G_1 = (\{S\}, \{a\}, \{S \to aS\}, S)$
$L(G_1) = \emptyset$

- $S \Rightarrow aS \Rightarrow aaS \Rightarrow \cdots$ endet nie.
- Andere Ableitungen gibt es nicht.
- Daher sind keine Wörter aus $\{a\}^*$ ableitbar.

$G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS,\ S \to b\}, S)$
$L(G_2) = ?$

- $$\begin{array}{ccccccccccc} S & \Longrightarrow & aS & \Longrightarrow & aaS & \Longrightarrow & aaaS & \Longrightarrow & aaaaS & \Longrightarrow & \cdots \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\ b & & ab & & aab & & aaab & & aaaab & & \end{array}$$
- Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $S \Rightarrow^i a^i S \Rightarrow a^i b$.

Beispiele für erzeugte Sprache

$G_1 = (\{S\}, \{a\}, \{S \to aS\}, S)$
$L(G_1) = \emptyset$

- $S \Rightarrow aS \Rightarrow aaS \Rightarrow \cdots$ endet nie.
- Andere Ableitungen gibt es nicht.
- Daher sind keine Wörter aus $\{a\}^*$ ableitbar.

$G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS,\ S \to b\}, S)$
$L(G_2) = \{a^n b \mid n \in \mathbb{N}\}$

- $$\begin{tikzcd} S \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & aS \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & aaS \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & aaaS \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & aaaaS \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \cdots \\ b & ab & aab & aaab & aaaab & \end{tikzcd}$$
- Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $S \Rightarrow^i a^i S \Rightarrow a^i b$.

Die Chomsky-Hierarchie

Noam Chomsky teilte die Grammatiken in Typen 0 bis 3
nach Art der erlaubten Regeln.

Definition

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.

Die Chomsky-Hierarchie

Noam Chomsky teilte die Grammatiken in Typen 0 bis 3
nach Art der erlaubten Regeln.

Definition

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.

- G ist automatisch vom Typ 0.

Die Chomsky-Hierarchie

Noam Chomsky teilte die Grammatiken in Typen 0 bis 3
nach Art der erlaubten Regeln.

Definition

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.

- G ist automatisch vom Typ 0.
- G ist vom Typ 1 (alternativ kontextsensitiv), wenn:
  für alle $\ell \to r \in P$ gilt $|\ell| \leq |r|$.

Die Chomsky-Hierarchie

Noam Chomsky teilte die Grammatiken in Typen 0 bis 3
nach Art der erlaubten Regeln.

Definition

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.

- G ist automatisch vom Typ 0.
- G ist vom Typ 1 (alternativ kontextsensitiv), wenn: für alle $\ell \to r \in P$ gilt $|\ell| \leq |r|$.
- G ist vom Typ 2 (alternativ kontextfrei), wenn: G ist vom Typ 1 und für alle $\ell \to r \in P$ gilt $\ell \in V$.

Die Chomsky-Hierarchie

Noam Chomsky teilte die Grammatiken in Typen 0 bis 3 nach Art der erlaubten Regeln.

Definition

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.

- G ist automatisch vom Typ 0.
- G ist vom Typ 1 (alternativ kontextsensitiv), wenn: für alle $\ell \to r \in P$ gilt $|\ell| \leq |r|$.
- G ist vom Typ 2 (alternativ kontextfrei), wenn: G ist vom Typ 1 und für alle $\ell \to r \in P$ gilt $\ell \in V$.
- G ist vom Typ 3 (alternativ regulär), wenn: G ist vom Typ 2 und für alle $A \to r \in P$ gilt $r = a$ oder $r = aA'$ für $a \in \Sigma, A' \in V$ (d.h. die rechten Seiten sind Satzformen aus $\Sigma \cup \Sigma V$).

Typ i-Sprachen

Definition

Für $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ nennt man eine formale Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ vom Typ i, falls es eine Typ i-Grammatik G gibt, sodass $L(G) = L$ gilt.

Spricht man von dem Typ einer formalen Sprache, so ist meistens der größtmögliche Typ gemeint.

Beispiele für die Chomsky-Hierarchie

$G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS, S \to b\}, S)$ ist vom Typ 3 (regulär).

Beispiele für die Chomsky-Hierarchie

$G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS,\ S \to b\}, S)$ ist vom Typ 3 (regulär).

$G_2 = (\{E, M, Z\}, \{+, *, 1, 2, (,)\}, P, E)$ mit
$P = \{E \to M,\ E \to E + M,\ M \to Z,\ M \to M * Z,$
$Z \to 1,\ Z \to 2,\ Z \to (E)\}$ ist vom Typ 2 (kontextfrei).

Beispiele für die Chomsky-Hierarchie

$G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS,\ S \to b\}, S)$ ist vom Typ 3 (regulär).

$G_2 = (\{E, M, Z\}, \{+, *, 1, 2, (,)\}, P, E)$ mit
$P = \{E \to M,\ E \to E + M,\ M \to Z,\ M \to M * Z,$
$\quad Z \to 1,\ Z \to 2,\ Z \to (E)\}$ ist vom Typ 2 (kontextfrei).

$G_3 = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,$
$\quad bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$ ist vom Typ 1 (kontextsensitiv).

Beispiele für die Chomsky-Hierarchie

$G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aS,\ S \to b\}, S)$ ist vom Typ 3 (regulär).

$G_2 = (\{E, M, Z\}, \{+, *, 1, 2, (,)\}, P, E)$ mit
$P = \{E \to M,\ E \to E + M,\ M \to Z,\ M \to M * Z,$
$\quad Z \to 1,\ Z \to 2,\ Z \to (E)\}$ ist vom Typ 2 (kontextfrei).

$G_3 = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to aSBC,\ S \to aBC,\ CB \to BC,\ aB \to ab,$
$\quad bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\}$ ist vom Typ 1 (kontextsensitiv).

$G_4 = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to \$T\$,\ T \to aAT,\ T \to bBT,\ T \to \varepsilon,\ \$a \to a\$,$
$\quad \$b \to b\$,\ Aa \to aA,\ Ab \to bA,\ Ba \to aB,\ Bb \to bB,$
$\quad A\$ \to \$a,\ B\$ \to \$b,\ \$\$ \to \varepsilon\}$ ist vom Typ 0.

Sonderregeln für ϵ-Produktionen

- Das leere Wort ε kann bisher nicht für Typ 1, 2, 3-Grammatiken erzeugt werden. Die Produktion $S \to \varepsilon$ erfüllt die Typ 1-Bedingung $|S| \leq |\varepsilon|$ nicht.

Sonderregeln für ϵ-Produktionen

- Das leere Wort ε kann bisher nicht für Typ 1, 2, 3-Grammatiken erzeugt werden. Die Produktion $S \to \varepsilon$ erfüllt die Typ 1-Bedingung $|S| \leq |\varepsilon|$ nicht.

Daher:

1. Sonderregel: ε-Produktion in Typ 1, 2, 3-Grammatiken

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ vom Typ 1, 2 oder 3 darf eine Produktion $S \to \varepsilon \in P$ enthalten, vorausgesetzt, dass S auf keiner rechten Seite einer Produktion in P vorkommt.

Sonderregeln für ϵ-Produktionen

- Das leere Wort ε kann bisher nicht für Typ 1, 2, 3-Grammatiken erzeugt werden. Die Produktion $S \to \varepsilon$ erfüllt die Typ 1-Bedingung $|S| \leq |\varepsilon|$ nicht.

Daher:

1. Sonderregel: ε-Produktion in Typ 1, 2, 3-Grammatiken

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ vom Typ 1, 2 oder 3 darf eine Produktion $S \to \varepsilon \in P$ enthalten, vorausgesetzt, dass S auf keiner rechten Seite einer Produktion in P vorkommt.

Zudem:

2. Sonderregel: ε-Produktionen in Typ 2, 3-Grammatiken

Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ vom Typ 2 oder 3 darf Produktionen von der Form $A \to \varepsilon \in P$ enthalten, wo $A \in V \setminus \{S\}$.

Begründung in der nächsten Vorlesung (nur FSK).