Institut für Informatik der Ludwig-Maximilians-Universität München | SoSe 2023
Prof. Dr. Jasmin Blanchette | 02.08.2023
Lydia Kondylidou
Jannis Limperg

Lösung zur Klausur zur Vorlesung
Theoretische Informatik für Medieninformatiker

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**. Hilfsmittel sind nicht erlaubt, auch das Mitführen ausgeschalteter elektronischer Geräte wird als Betrug gewertet. Schreiben Sie Ihren vollständigen Namen und Ihre Matrikelnummer deutlich lesbar auf dieses Deckblatt, sowie Ihren Namen in die Kopfzeile auf **jedem Blatt** der Klausurangabe. Geben Sie alle Blätter ab, lassen Sie diese zusammengeheftet. Verwenden Sie nur **dokumentenechte Stifte** und **weder** die Farben **rot noch grün**.

Kontrollieren Sie, ob Sie alle Aufgabenblätter erhalten haben. Aufgabenstellungen befinden sich auf den **Seiten 1–10**. Sie dürfen die Rückseiten für Nebenrechnungen nutzen. Falls Sie die Rückseiten für Antworten nutzen, so markieren Sie klar, was zu welcher Aufgabe gehört und geben Sie in der entsprechenden Aufgabe an, wo alle Teile Ihrer Antwort zu finden sind. Streichen Sie alles durch, was nicht korrigiert werden soll.

Lesen Sie die Aufgabenstellungen vollständig durch, bevor Sie mit der Bearbeitung der Aufgaben beginnen. Es gibt 4 unterschiedlich gewichtete Aufgaben zu insgesamt 75 Punkten. Mit 38 Punkten haben Sie sicherlich bestanden. Die Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur in ausreichend guter gesundheitlicher Verfassung sind und diese Klausurprüfung verbindlich annehmen.

Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Die Klausur soll gewertet werden: ☐ **JA** ☐ **NEIN**

Hinweis: Ist keines der beiden Felder angekreuzt, so wird **JA** angenommen.

Hiermit erkläre ich die Richtigkeit der obigen Angaben: ____________________
(Unterschrift)

Die folgende Tabelle **NICHT** ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$	Bonus	Note
Punkte	29	18	16	12	**75**		
Erreicht							

Lösung Aufgabe 1 (Reguläre Sprachen): **(29 Punkte)**

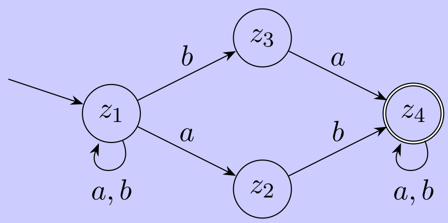
a) Die Sprache $L_1 \subseteq \{a,b\}^*$ sei definiert als

$$L_1 := \{uabv \mid u,v \in \{a,b\}^*\} \cup \{ubav \mid u,v \in \{a,b\}^*\}$$

L_1 enthält daher genau alle Wörter über $\{a,b\}$, die ab oder ba als Teilwort haben.

Geben Sie den Zustandsgraphen eines nichtdeterministischen endlichen Automaten (ohne ε-Übergänge) A_1 an, für den gilt: $L(A_1) = L_1$. (7 Punkte)

LÖSUNG: A_1:



7 Punkte, wenn alles stimmt
1 Punkt Abzug bei fehlendem Startzustand
1 Punkt Abzug bei fehlendem Endzustand
1 Punkt Abzug bei falschem Übergang

Die Aufgabe wird auf dem nächsten Blatt fortgesetzt.

Fortsetzung von Aufgabe 1:

b) Die Sprache $L_2 \subseteq \{a, b, c\}^*$ sei definiert als

$$L_2 := \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_c(w) = 3\}$$

Die Sprache L_2 enthält daher alle Wörter über $\{a, b, c\}$, die genau drei c's enthalten.

Geben Sie einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L_2$ an. (5 Punkte)

LÖSUNG:

$\alpha = ((a|b)^*c(a|b)^*c(a|b)^*c(a|b)^*)$

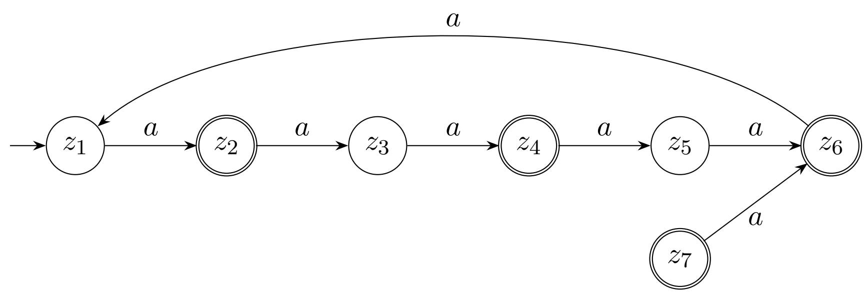
2 Punkte Abzug falls ≥ 3 oder ≤ 3 statt $= 3$
1 Punkt Abzug für jeden fehlenden $(a|b)^*$ Block
1 Punkt Abzug für jeden fehlenden c Block
1 Punkt falls nur 3 c's
2 Punkte Abzug für Sprachen-Ausdruck statt Regex (z.B. $\{a, b\}^*$ statt $(a|b)^*$)

Die Aufgabe wird auf dem nächsten Blatt fortgesetzt.

Fortsetzung von Aufgabe 1:

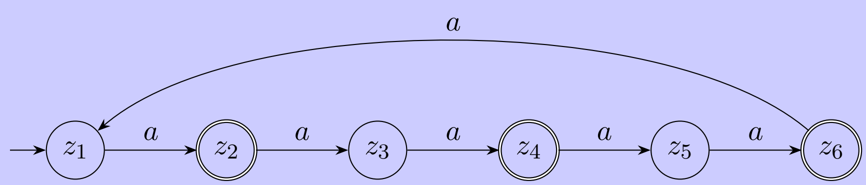
c) Berechnen Sie für den folgenden deterministischen endlichen Automaten A_2 (der Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{a\}$ verarbeitet) den **Minimalautomaten**, d.h. einen deterministischen endlichen Automaten, der die gleiche Sprache akzeptiert und eine minimale Anzahl an Zuständen benutzt.

Erläutern Sie Ihre Berechnung, indem Sie die Minimierungstabelle angeben, und geben Sie den Minimalautomaten als Zustandsgraphen an.

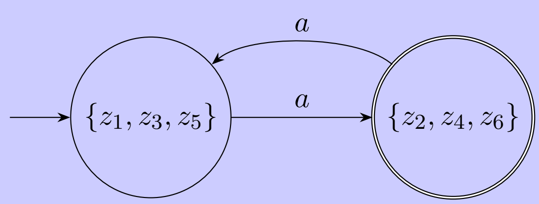


(11 Punkte)

LÖSUNG: Der DFA nach dem Entfernen nicht erreichbarer Zustände ist wie folgt:



Minimaler DFA:



Berechnung:

z_2	X				
z_3		X			
z_4	X		X		
z_5		X		X	
z_6	X		X		X
	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5

Notation: X: Als verschieden erkannt in der Initialisierung.

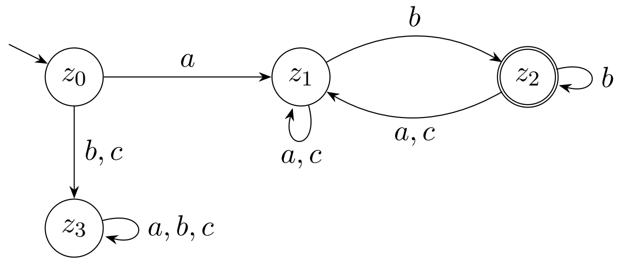
- 2 Punkte für Entfernen von z_7 (kein Punktabzug falls Begründung fehlt)
- 5 Punkte für die Tabelle:
  5 Punkte für Anfangsmarkierungen
  1 Punkt Abzug für jeden falschen Tabelleneintrag

- 4 Punkte für den Minimalautomaten:
  1 Punkt Abzug wenn Start- und/oder Endzustand nicht gekennzeichnet sind
  1 Punkt Abzug für jeden falschen Übergang
- 1 Punkt Abzug, falls z_7 erst nachträglich entfernt

Die Aufgabe wird auf dem nächsten Blatt fortgesetzt.

Fortsetzung von Aufgabe 1:

d) Der folgende Automat A_3



ist bereits ein Minimalautomat mit Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Begründen Sie für jedes der Zustandspaare

(i) (z_0, z_1)

(ii) (z_0, z_2)

(iii) (z_1, z_3)

warum die beiden Zustände des Paares **nicht äquivalent** sind. (6 Punkte)

LÖSUNG: Zustände z, z' sind äquivalent g.d.w. $\forall w \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(z, w) \in E \iff \widehat{\delta}(z', w) \in E$.

(i) (z_0, z_1): $\widehat{\delta}(z_0, b) = z_3 \notin E$ aber $\widehat{\delta}(z_1, b) = z_2 \in E$

(ii) (z_0, z_2): $\widehat{\delta}(z_0, \varepsilon) = z_0 \notin E$ aber $\widehat{\delta}(z_2, \varepsilon) = z_2 \in E$

(iii) (z_1, z_3): $\widehat{\delta}(z_1, b) = z_2 \in E$ aber $\widehat{\delta}(z_3, b) = z_3 \notin E$ oder
$\widehat{\delta}(z_2, b) = z_4 \notin E$ aber $\widehat{\delta}(z_4, b) = z_3 \in E$

2 Punkte pro Antwort

Lösung Aufgabe 2 (Kontextfreiheit): **(18 Punkte)**

a) Die Sprache L_3 über $\{a, b, c, d\}$ sei definiert als

$$L_3 := \{a^i b^i c^j d^j \mid i, j \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

Informell: Alle Wörter aus L_3 sind von der Form $a^i b^i c^j d^j$, wobei i, j positive Zahlen sind.

(i) Geben Sie eine **kontextfreie Grammatik** G_1 an, die L_3 erzeugt (d.h. $L(G_1) = L_3$) und erläutern Sie, warum G_1 die Sprache L_3 erzeugt. Beschreiben Sie beispielsweise, welche „Aufgabe" die einzelnen Nichtterminale bei der Erzeugung übernehmen. (5 Punkte)

Geben Sie zusätzlich eine **Linksableitung** für das Wort *aabbcccddd* für Ihre Grammatik an. (3 Punkte)

LÖSUNG: $G_1 = (V, \{a, b, c, d\}, P, S)$ mit $V = \{S, X, Y\}$ und
$P = \{S \to XY, X \to aXb, X \to ab, Y \to cYd, Y \to cd\}$. Erläuterung:

- S erzeugt zunächst XY. Aus X lassen sich beliebig viele a/b-Paare erzeugen (jedoch mindestens 1), und ähnlich mit Y und c/d-Paare.

Linksableitung: $S \Rightarrow XY \Rightarrow aXbY \Rightarrow aabbY \Rightarrow aabbcYd \Rightarrow aabbccYdd \Rightarrow aabbcccddd$

5 Punkte für die Grammatik: 3 Punkte für die Grammatik, 2 Punkte für die Erläuterung
Maximal 1 Punkt falls Grammatik ganz falsch.
0 Punkte wenn die Grammatik nicht kontextfrei ist.
Maximal 1 Punkt für Erläuterung bei falscher Grammatik.

3 Punkte für die Linksableitung: 1 Punkt falls keine Linksableitung oder falls Syntaxbaum.

Die Aufgabe wird auf dem nächsten Blatt fortgesetzt.

Fortsetzung von Aufgabe 2:

(ii) Zeigen Sie mit dem Pumping-Lemma für reguläre Sprachen, dass

$$L_3 = \{a^i b^i c^j d^j \mid i, j \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

nicht regulär ist.

(10 Punkte)

Zur Erinnerung:

Pumping-Lemma für reguläre Sprachen.
Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$, das Mindestlänge n hat (d.h. $|z| \geq n$), als $z = uvw$ geschrieben werden kann, sodass gilt:
i) $|uv| \leq n$,
ii) $|v| \geq 1$ und
iii) für alle $i \geq 0$: $uv^i w \in L$.

LÖSUNG: Sei $n > 0$ beliebig.
Eine geeignete Wahl für z ist z.B.
$z = a^n b^n cd$.

Beweis mit $z = a^n b^n cd$:

Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung von z mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.

Dann ist $u = a^{n_1}$, $v = a^{n_2}$, $w = a^{n_3} b^n cd$ mit $n = n_1 + n_2 + n_3$ und $n_2 \geq 1$. Dann ist $uv^0 w \notin L_3$, denn $uv^0 w = a^{n_1+n_3} b^n cd$ und es sind mehr b's als a's. Damit erfüllt L_3 die Pumping-Eigenschaft nicht und das Pumping-Lemma zeigt, dass L_3 nicht regulär ist.

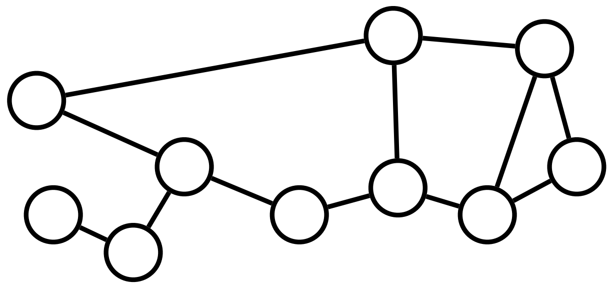
- 1 Punkt: $z \in L_3$ gewählt
- 1 Punkt: $|z| \geq n$
- 2 Punkte: z ist geeignet
- 3 Punkte: Über alle Zerlegungen u, v, w argumentiert
- 3 Punkte: Fall gefunden, sodass $uv^i w \notin L_3$
- 2 Punkte Abzug, wenn komplett unnötige Fälle betrachtet wurden

Lösung Aufgabe 3 (Komplexitätstheorie): **(16 Punkte)**

Wir erinnern zunächst an die Definition des GRAPH-COLORING-Problems:

gegeben:	Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$
gefragt:	Gibt es eine Färbung der Knoten in V mit $\leq k$ Farben, sodass keine zwei benachbarten Knoten in G die gleiche Farbe erhalten?

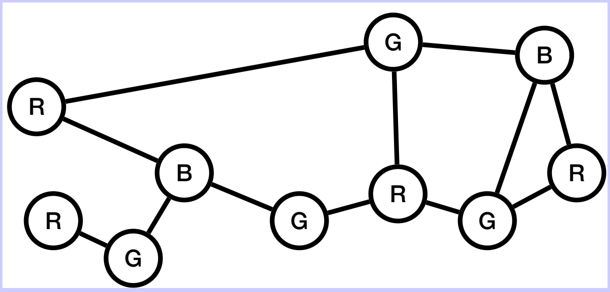
a) Es sei G_1 der folgende Graph und $k = 3$:



Zeigen Sie, dass $(G_1, k) \in$ GRAPH-COLORING gilt. In Ihrer Antwort können Sie einzelne Buchstaben als Namen für die Farben (z.B. R für Rot) nutzen.

(4 Punkte)

LÖSUNG: Es gibt viele mögliche Lösungen, z.B. hier eine Lösung mit nur drei Farben:



4 Punkte für einen mit max. drei Farben gemalten Graphen (muss nicht gemalt sein)
1 Punkt Abzug für jeden Felher (zwei benachbarte Knoten mit der gleichen Farbe)
3 Punkte Abzug für mehr als drei Farben oder für falsche, nicht triviale Instanz

Die Aufgabe wird auf dem nächsten Blatt fortgesetzt.

Fortsetzung von Aufgabe 3:

b) Es sei G_1 derselbe Graph wie in Frage a) und $k = 2$. Zeigen Sie, dass $(G_1, k) \notin$ GRAPH-COLORING gilt.

(4 Punkte)

LÖSUNG: Die rechten drei Knoten sind alle miteinander verbunden. Um sie zu streichen, sind drei verschiedene Farben notwendig, aber wir haben nur zwei Farben zur Verfügung.

4 Punkte für Begründung, die darauf hinaus geht, dass mindestens drei Farben notwendig sind
3 Punkte Abzug, wenn es behauptet wird, dass vier Farben notwendig sind
2 Punkte bei Markierung des critical point of failure (sinnvolles Beispiel), auch wenn keine Begründung vorhanden ist
2 Punkte, wenn Schlussfolgerung richtig aber Begründung falsch ist (bzw. nicht vorhanden)

Die Aufgabe wird auf dem nächsten Blatt fortgesetzt.

Fortsetzung von Aufgabe 3:

c) Der folgende Beweis ist falsch. Lokalisieren Sie den Fehler und begründen Sie, wieso der Beweis falsch ist. (8 Punkte)

Satz: GRAPH-COLORING ist $\mathcal{NP}$-schwer.

Beweis: Wir zeigen GRAPH-COLORING $\leq_\mathrm{p}$ SAT. Das heißt, wir werden ein beliebiges GRAPH-COLORING-Problem als SAT-Problem kodieren. Da wir wissen, dass SAT $\mathcal{NP}$-schwer ist, zeigt dies, dass GRAPH-COLORING $\mathcal{NP}$-schwer ist.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Für jeden Knoten $v \in V$ stellen wir k Variablen auf, eine pro Farbe: $v_1, \dots, v_k$. Die Variable v_i ist wahr, wenn v die i-te Farbe hat.

Für jeden Knoten v erzeugen wir zuerst die aussagenlogische Formel $v_1 \vee \dots \vee v_k$, die sicherstellt, dass jeder Knoten mindestens eine Farbe hat.

Zusätzlich erzeugen wir die Formeln $\neg v_i \vee \neg v_j$ für alle $i, j \in \{1, \dots, k\}$, sodass $i \neq j$. Zusammen stellen diese Formeln sicher, dass jeder Knoten maximal eine Farbe hat.

Ferner erzeugen wir für jedes Paar von benachbarten Knoten v, w und jede Farbe $i \in \{1, \dots, k\}$ die Formel $\neg v_i \vee \neg w_i$, die sicherstellt, dass benachbarte Knoten nicht die gleiche Farbe haben.

Schlussendlich nehmen wir als Formel F die Konjunktion $F_1 \wedge \dots \wedge F_n$ von allen oben beschriebenen Formeln.

Damit gilt: Die Formel F ist genau dann erfüllbar, wenn G k-färbbar ist. Da die Übersetzung in Polynomialzeit berechnet werden kann, haben wir GRAPH-COLORING $\leq_\mathrm{p}$ SAT gezeigt.

LÖSUNG: Der Fehler liegt im ersten Abschnitt: „Wir zeigen GRAPH-COLORING $\leq_\mathrm{p}$ SAT. ... Da wir wissen, dass SAT $\mathcal{NP}$-schwer ist, zeigt dies, dass GRAPH-COLORING $\mathcal{NP}$-schwer ist.“ Um $\mathcal{NP}$-Schwere zu beweisen, geht die Reduktion andersherum.

6 Punkte für Ort des Fehlers korrekt identifiziert
2 Punkte fur Begründung

Lösung Aufgabe 4 (Gemischte Fragen): **(12 Punkte)**

Pro Frage gibt es **genau eine richtige** Antwort.

Jede Antwort ist 2 Punkte wert. Eine Antwort, bei der 0 oder mindestens 2 Kästchen angekreuzt sind, zählt als falsch.

Das INDEPENDENT-SET-Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig. Zudem ist bekannt, dass

- [ ] INDEPENDENT-SET $\in \mathcal{P}$
- [ ] INDEPENDENT-SET $\notin \mathcal{P}$
- [X] Wenn INDEPENDENT-SET $\in \mathcal{P}$, dann gilt $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$
- [ ] Wenn $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, dann INDEPENDENT-SET $\in \mathcal{P}$

Seien L_4 und L_5 formale Sprachen.

- [ ] Wenn beide Sprachen L_4 und L_5 jeweils kontextfrei sind, dann ist $\overline{L_4} \cup \overline{L_5}$ ebenfalls kontextfrei.
- [ ] Wenn eine der beiden Sprachen L_4 oder L_5 nicht kontextfrei ist, dann ist $L_4 \cup L_5$ ebenfalls nicht kontextfrei.
- [ ] Wenn eine der beiden Sprachen L_4 oder L_5 kontextfrei ist, dann ist $L_4 \cap L_5$ ebenfalls kontextfrei.
- [X] Wenn beide Sprachen L_4 und L_5 jeweils kontextfrei sind, dann ist $L_4 \cup L_5$ ebenfalls kontextfrei.

Sei $L_6 = \{w \mid \text{Die Turingmaschine } M_w \text{ berechnet für jede Eingabe } x \text{ als Ausgabe die Zahl } x+1 \text{ (binär kodiert)}\}$. Die Sprache L_6 ist unentscheidbar aufgrund des Satzes von Rice, denn $C(S) = L_6$ für

- [ ] $S = \emptyset$
- [ ] $S = \{f\}$, wobei $f(x) = x$ für alle x
- [X] $S = \{f\}$, wobei $f(x) = 1 + x$ für alle x
- [ ] $S = \{f \mid f \text{ ist eine in polynomieller Zeit berechenbare Funktion}\}$

Die Aufgabe wird auf dem nächsten Blatt fortgesetzt.

Fortsetzung von Aufgabe 4:

Seien L_7 und L_8 kontextfreie Sprachen.

- [ ] Dann gibt es einen DFA, der $L_7 \cup L_8$ akzeptiert.
- [ ] Dann gibt es einen NFA, der $L_7 \cup L_8$ akzeptiert.
- [x] Dann gibt es einen Kellerautomaten, der $L_7 \cup L_8$ akzeptiert.
- [ ] Dann gibt es einen regulären Ausdruck, der $L_7 \cup L_8$ erzeugt.

Die Grammatik $G = (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, P, A)$ mit

$$
\begin{aligned}
P = \{A &\to a, \\
A &\to BC, \\
B &\to b, \\
B &\to CC, \\
D &\to b, \\
D &\to BC\}
\end{aligned}
$$

- [ ] ist vom Typ 0, aber nicht vom Typ 1
- [ ] ist vom Typ 1, aber nicht vom Typ 2
- [x] ist vom Typ 2, aber nicht vom Typ 3
- [ ] ist vom Typ 3

Sei L_9 eine Sprache mit $L_9 \leq_{\mathrm{p}} \mathrm{SAT}$. Dann ist Folgendes bekannt:

- [ ] L_9 ist in $\mathcal{P}$
- [ ] $\overline{L_9}$ ist in $\mathcal{P}$
- [x] L_9 ist in $\mathcal{NP}$
- [ ] L_9 ist $\mathcal{NP}$-schwer