Prof. Dr. Jasmin Blanchette
Jannis Limperg
Luca Maio

Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Abgabe bis 10. Juli 2024, 10:00 Uhr

Übung 11 zur Vorlesung

Theoretische Informatik für Studierende der Medieninformatik

TIMI11-1 ***PCP-Varianten*** (2 Punkte)

a) Wir betrachten das 456PCP-Problem, eine Variante von PCP, bei der die ‚Spielsteine' auf das Alphabet $\Sigma = \{4, 5, 6\}$ beschränkt sind. Eine Instanz von 456PCP ist also eine endliche Folge von Paaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ mit $x_i, y_i \in \{4, 5, 6\}^+$ für $i = 1, \ldots, n$. Eine Lösung der Instanz K ist wie bei PCP eine endliche Folge von Indices $i_1, \ldots, i_m \in \mathbb{N}$, sodass $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{i_1} \cdots y_{i_m}$.

   Zeigen Sie durch Reduktion von PCP auf 456PCP, dass 456PCP unentscheidbar ist.

b) Wir betrachten das PCP4-Problem, eine Variante von PCP, bei der die Spielsteine aus vier Wörtern bestenen. Eine Instanz von PCP4 ist also eine endliche Folge von 4-Tupeln $(x_1, y_1, z_1, u_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n, u_n)$ mit $x_i, y_i, z_i, u_i \in \Sigma^+$ für $i = 1, \ldots, n$. Eine Lösung der Instanz K ist ähnlich zu PCP eine endliche Folge von Indices $i_1, \ldots, i_m \in \mathbb{N}$, sodass $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{i_1} \cdots y_{i_m} = z_{i_1} \cdots z_{i_m} = u_{i_1} \cdots u_{i_m}$

   Zeigen Sie durch Reduktion von PCP auf PCP4, dass PCP4 unentscheidbar ist.

c) Sind die folgenden Instanzen K_1, K_2 von PCP4 lösbar? Wenn ja, geben Sie eine Lösung (also eine geeignete Folge von Indizes) an. Wenn nein, beweisen Sie, dass die Instanz keine Lösung hat.

$$K_1 = \left(\begin{bmatrix} bbc \\ bca \\ cab \\ bbca \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ ab \\ abb \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} cca \\ ca \\ a \\ ca \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} abc \\ bcc \\ ccc \\ bcc \end{bmatrix} \right)$$

$$K_2 = \left(\begin{bmatrix} c \\ b \\ bab \\ cc \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} acb \\ baa \\ aaa \\ acba \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} bca \\ caaa \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ ba \\ b \\ bab \end{bmatrix} \right)$$

TIMI11-2 ***Beweise prüfen*** (0 Punkte)

In den folgenden Teilaufgaben betrachten wir jeweils einen Beweis, der einen Fehler enthält. Identifizieren Sie diesen Fehler (mit kurzer Begründung).

a) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Sprache

$$D = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ akzeptiert } w \text{ nicht}\}$$

ist semi-entscheidbar.

Beweis:
D ist semi-entscheidbar. Um das zu zeigen, konstruieren wir eine DTM M, die D semi-entscheidet. Das heißt, dass M für alle Eingaben $w \in D$ hält und für alle Eingaben $w \notin D$ nicht hält.

Angenommen, es gäbe so eine Turingmaschine M. Betrachte ein Wort $w \in \{0,1\}^*$.

- Wenn $w \in D$ ist, dann akzeptiert M_w die Eingabe w. Somit akzeptiert auch M das Wort w.
- Wenn $w \notin D$ ist, dann hält M_w mit Eingabe w nicht. Somit akzeptiert auch M das Wort w nicht.

M semi-entscheidet also D.

b) Sei $L_u = \{w\#x \mid w, x \in \{0,1\}^* \text{ und } x \in L(M_w)\}$. Diese Sprache ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar.

Zeigen Sie: Die Sprache $L_\mathrm{r} = \{w \in \{0,1\}^* \mid L(M_w) \text{ ist regulär}\}$ ist unentscheidbar.

Beweis:
Wir reduzieren L_u auf L_r. Da L_u unentscheidbar ist, folgt daraus, dass L_r unentscheidbar ist.

Sei $v \in \{0,1,\#\}^*$. Wir definieren die Reduktionsfunktion f durch

$$f(v) = \begin{cases} w_{M_3} & \text{falls } v = w\#x \text{ und } M_w \text{ akzeptiert } x \\ w_{M_4} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist M_3 eine Turingmaschine, die die reguläre Sprache $\{0,1\}^*$ akzeptiert. M_4 ist eine Turingmaschine, die die nichtreguläre Sprache $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ akzeptiert. w_{M_i} ist die Binärkodierung der jeweiligen Turingmaschine.

M_3, M_4 und die Binärkodierungen sind offensichtlich berechenbar, also ist f berechenbar (und offensichtlich total). Weiterhin gilt:

$$\begin{array}{ll} & v \in L_\mathrm{u} \\ \text{g.d.w.} & v = w\#x \text{ und } x \in L(M_w) \\ \text{g.d.w.} & M_{f(v)} \text{ akzeptiert eine reguläre Sprache} \\ \text{g.d.w.} & f(v) \in L_\mathrm{r} \end{array}$$

Somit ist f eine valide Reduktionsfunktion und $L_\mathrm{u} \leq L_\mathrm{r}$.

c) Sei $A = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält bei Eingabe 36 mit Ausgabe 42 an}\}$. Zeigen Sie durch Reduktion von H_0 auf A, dass A unentscheidbar ist.

Beweis:
Wir zeigen $H_0 \leq A$. Da H_0 unentscheidbar ist, folgt daraus, dass auch A unentscheidbar ist.

Wir definieren die Reduktionsfunktion $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ wie folgt. Für $w \in \{0,1\}^*$ berechnet f zunächst die Turingmaschine M_w, erstellt daraus eine Turingmaschine T und berechnet anschließend deren Binärcodierung w_T. Dabei verhält sich T wie folgt:

- Prüfe, ob auf dem Band die Zahl 36 (in Binärdarstellung) steht. Falls nein, gehe in eine Endlosschleife über.
- Führe M_w aus.
- Falls M_w anhält, schreibe die Zahl 42 (in Binärdarstellung) auf das Band und akzeptiere.

Die Funktion f ist offensichtlich total. Sie ist auch berechenbar, da T konstruierbar ist. Weiterhin gilt:

$$\begin{array}{ll} & w \in H_0 \\ \text{g.d.w.} & M_w \text{ hält auf leerem Band} \\ \text{g.d.w.} & M_{f(w)} \text{ hält für Eingabe 36 mit Ausgabe 42} \\ \text{g.d.w.} & f(w) \in A \end{array}$$

Somit ist f eine valide Reduktionsfunktion und $H_0 \leq A$.