

## Übung 10 zur Vorlesung Theoretische Informatik für Studierende der Medieninformatik

### **TIMI10-1 Satz von Rice** (2 Punkte)

Sei  $M = (Z, \{a, b\}, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$  eine deterministische Turingmaschine. Welche der folgenden Fragestellungen zu  $M$  sind entscheidbar?

Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit unentscheidbarer Fragestellungen mittels des Satzes von Rice. Bei entscheidbaren Fragestellungen erläutern Sie, wie die charakteristische Funktion berechnet wird.

- Die Funktion die von  $M$  berechnet wird hat mindestens 3 Fixpunkte. Ein Fixpunkt einer Funktion  $f : D \rightarrow D$  ist ein  $x \in D$ , sodass  $f(x) = x$ .
- Totalitätsproblem: Es gibt ein Wort  $w \notin L(M)$ .
- Hat  $M$  einen Müllzustand? Formal definieren wir einen Müllzustand hier als einen Zustand  $z$ , der kein Endzustand ist und für den gilt  $\delta(z, a) \subseteq \{z\}$  für alle  $a$ .
- Ist die Funktion die von  $M$  berechnet wird in  $O(n^2)$ ?
- $M$  terminiert auf jeder Eingabe nach zwischen 50 und 55 Schritten.

### **TIMI10-2 Entscheidbarkeit und Reduktionen** (0 Punkte)

- Betrachten Sie die Sprache

$$L_1 = \{w_m \in \{0, 1\}^* \mid \text{TM } M \text{ hält für Eingabe } 01\}$$

wobei  $w_M$  das Encoding für  $M$  ist.

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? Beweisen Sie Ihre Antwort.

- $L_1$  ist entscheidbar.
- $L_1$  ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar.
- $L_1$  ist weder entscheidbar noch semi-entscheidbar.

Um zu zeigen, dass  $L_1$  entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar) ist, beschreiben Sie kurz die Funktionsweise einer deterministischen Turingmaschine, die  $L_1$  (semi-)entscheidet. Um zu zeigen, dass  $L_1$  nicht (semi-)entscheidbar ist, reduzieren Sie ein geeignetes Problem auf  $L_1$ .

- b) Prüfen Sie, ob die folgenden Behauptungen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten wie folgt: Wenn eine Sprache  $L$  (semi-)entscheidbar ist, beschreiben Sie die Funktionsweise einer deterministischen Turingmaschine, die die charakteristische Funktion  $\chi_L$  bzw.  $\chi'_L$  berechnet. Wenn  $L$  nicht (semi-)entscheidbar ist, leiten Sie einen Widerspruch ab.
- i) Wenn  $A$  und  $B$  entscheidbare Sprachen sind, dann ist  $A \cap B$  entscheidbar.
  - ii) Wenn  $A$  und  $A \cup B$  entscheidbar sind, dann ist  $B$  entscheidbar.
  - iii) Das Problem, ob  $L(M) \neq \emptyset$  für eine gegebene Turingmaschine  $M$  gilt, ist semi-entscheidbar.
  - iv) Das Problem, ob  $L(M) = \emptyset$  für eine gegebene Turingmaschine  $M$  gilt, ist semi-entscheidbar.
- c) Zeigen Sie, dass das folgende Problem für jede deterministische Turingmaschine  $M$  und natürliche Zahl  $n$  entscheidbar ist.

„ $M$  hält auf jeder Eingabe nach höchstens  $n$  Schritten.“