

Übung 0 zur Vorlesung Theoretische Informatik für Studierende der Medieninformatik

Hinweis: Dieses Blatt wird nicht abgegeben und Sie können keine Bonuspunkte erwerben, aber es wird in den Übungen 18. April 2024–23. April 2024 besprochen.

TIMI0-1 *Fundamentale Beweisstrategien*

In dieser Aufgabe diskutieren wir fundamentale Beweisstrategien. Diese Strategien sollten aus anderen Kursen bekannt sein, aber da TIMI sehr beweislustig ist, wiederholen wir sie hier.

- a) Die folgende Tabelle fasst zusammen, wie man mit Aussagen, die bestimmte logische Operationen enthalten, umgeht.

	Um eine Aussage dieser Form zu beweisen...	Wenn eine Aussage dieser Form angenommen wird...
$P \wedge Q$	beweise sowohl P als auch Q	nimm P und Q an
$P \vee Q$	beweise entweder P oder Q	beweise die gewünschte Aussage sowohl unter der Annahme P als auch unter der Annahme Q (Fallunterscheidung)
$P \implies Q$	beweise, dass unter der Annahme P Q folgt	beweise P und nimm dann Q an
$\neg P$	beweise, dass unter der Annahme P ein Widerspruch folgt	beweise P , um einen Widerspruch herzuleiten
$\forall x, P(x)$	beweise, dass $P(a)$ für ein beliebiges a gilt	nimm $P(a)$ für jedes konkrete a an
$\exists x, P(x)$	gib ein konkretes a an und beweise $P(a)$	nimm ein beliebiges a an, für das $P(a)$ gilt

Die Biimplikation $P \iff Q$ („ P genau dann wenn Q “ oder „ P g.d.w. Q “) ist definiert als $(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$.

Außerdem kann man, unabhängig von der zu beweisenden Aussage, immer folgende Regeln anwenden:

- **Widerspruchsbeweis:** um P zu beweisen nimm an, dass $\neg P$ gilt, und leite daraus einen Widerspruch ab.

- Satz vom ausgeschlossenen Dritten: für jede beliebige Aussage P nimm $P \vee \neg P$ an.

Häufig nützlich sind auch folgende Regeln:

$$\begin{aligned} \neg(A \wedge B) &\iff \neg A \vee \neg B \\ \neg(A \vee B) &\iff \neg A \wedge \neg B \\ \neg\forall x, P(x) &\iff \exists x, \neg P(x) \\ \neg\exists x, P(x) &\iff \forall x, \neg P(x) \\ A \wedge (B \vee C) &\iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ A \vee (B \wedge C) &\iff (A \vee B) \wedge (A \vee C) \\ (\forall x, P(x)) \wedge (\forall x, Q(x)) &\iff \forall x, P(x) \wedge Q(x) \\ (\exists x, P(x)) \vee (\exists x, Q(x)) &\iff \exists x, P(x) \vee Q(x) \\ \neg\neg A &\iff A \end{aligned}$$

i) Zeigen Sie: $(\forall n, \exists k, k > n) \iff (\neg\exists n, \forall k, n \geq k)$

ii) Gilt die Aussage $\forall n, \exists k, k > n$

- für $n, k \in \mathbb{N}$?
- für $n, k \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, wobei $\infty > x$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

Beweisen Sie Ihre Antworten.

b) Die Gleichheit von Mengen ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} S \subseteq T \text{ g.d.w. } &\forall x, x \in S \implies x \in T \\ S = T \text{ g.d.w. } &S \subseteq T \wedge T \subseteq S \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

i) Für alle Mengen S und T gilt: $S = T$ g.d.w. $\forall x, x \in S \iff x \in T$.

ii) Für alle Sprachen A, B, C über einem Alphabet Σ gilt: $A \cdot (B \cup C) = A \cdot B \cup A \cdot C$.

c) Die Konkatenation $v \cdot w$ (alternativ vw) zweier Wörter über einem Alphabet Σ ist rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} \varepsilon \cdot w &= w \\ av \cdot w &= a(v \cdot w) \end{aligned}$$

Alternativ kann man diese Definition auch so schreiben:

$$v \cdot w = \begin{cases} w & \text{falls } v = \varepsilon \\ a(v' \cdot w) & \text{falls } v = av' \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für alle Wörter u, v, w gilt: $u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$. Verwenden Sie vollständige Induktion (siehe Skript, Kapitel 2) über die Länge von u .

TIMIO-2 Wörter, Sprachen

a) Seien $\Sigma = \{a, b\}$, $U = \{aab, baa\}$ und $V = \{aa, bb\}$.

Geben Sie Wörter $u, v, w, x \in \Sigma^*$ an, sodass

- $u \in U^*$ und $u \notin V^*$;
- $v \notin U^*$ und $v \in V^*$;
- $w \in U^*$ und $w \in V^*$;
- $x \notin U^*$ und $x \notin V^*$.

Hinweis: Für eine Menge von Symbolen S bezeichnen wir mit S^* die Menge aller endlichen Folgen von Symbolen aus S (z.B. $\{a, b\}^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \dots\}$).

b) Sei $w = ababababbbbcbaaaaaabacaabbbbbbaba$.

Geben Sie alle Teilwörter v von w an, auf die **alle** der folgenden Eigenschaften zutreffen:

- $|v| = 4$, die Länge von v ist 4;
- $v[1] = a$, das erste Symbol in v ist a ;
- $\#_b(v) > 0$, die Anzahl von Vorkommnissen von b in v ist größer als 0.

TIMIO-3 Äquivalenzrelationen

Eine Relation zwischen zwei Mengen M, N ist eine Menge $R \subseteq M \times N$ von Paaren bestehend je aus einem Element aus M und einem aus N . M und N können hierbei beliebige Mengen sein. Ist $(p, q) \in R$, so schreibt man auch $R(p, q)$, pRq oder $p \sim_R q$.

Ist klar, um welche Relation es sich handelt, kann man auch $p \sim q$ schreiben.

Eine Relation R heißt Äquivalenzrelation, wenn

- die zugrundeliegenden Mengen gleich sind: $M = N$;
- für alle $x \in M$ gilt xRx (d.h. R ist reflexiv);
- für alle $x, y \in M$ gilt $xRy \implies yRx$ (d.h. R ist symmetrisch);
- für alle $x, y, z \in M$ gilt $xRy \wedge yRz \implies xRz$ (d.h. R ist transitiv).

Eine Äquivalenzklasse K einer Äquivalenzrelation R ist eine maximale Menge von Elementen $u, v, w, \dots \in M$ sodass alle Elemente von K durch R in Beziehung stehen: uRv , uRw , vRu , vRw , etc. „Maximal“ bedeutet, dass es kein Element $x \in M$ gibt, das nicht in K ist, aber mit allen Elementen von K in Beziehung steht. Der Index einer Äquivalenzrelation ist die Anzahl ihrer Äquivalenzklassen.

Beispiel: Die Relation

$$\{(u, v) \mid u, v \in \mathbb{N} \text{ und } u \text{ geteilt durch } 3 \text{ hat denselben Rest wie } v \text{ geteilt durch } 3\}$$

ist eine Äquivalenzrelation. Ihre Äquivalenzklassen sind $\{0, 3, 6, \dots\}$, $\{1, 4, 7, \dots\}$ und $\{2, 5, 8, \dots\}$. Sie hat somit Index 3.

Geben Sie für die folgenden Relationen jeweils an, ob sie Äquivalenzrelationen sind. Berechnen Sie außerdem den Index von mindestens zwei der Äquivalenzrelationen.

- a) $R_1 \subseteq \{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3\}$ mit $0R_11, 2R_13$ (und sonst $\neg xR_1y$).
- b) $R_2 \subseteq \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ mit $0R_20, 1R_21, 2R_22$ (und sonst $\neg xR_2y$).
- c) $R_3 \subseteq \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ mit $0R_30, 1R_31, 2R_32, 1R_32, 2R_31$ (und sonst $\neg xR_3y$).
- d) $R_4 = \{(p, q) \mid \text{die Personen } p, q \text{ haben das gleiche Geburtsjahr}\}$.