LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

Formale Sprachen und Komplexität
Theoretische Informatik für Studierende der Medieninformatik
Sommersemester 2024

4c
Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Prof. Dr. Jasmin Blanchette

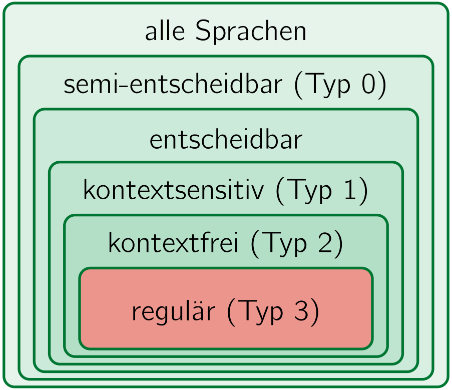
Lehr- und Forschungseinheit für
Theoretische Informatik und Theorembeweisen

Stand: 6. Mai 2024
Basiert auf Folien von PD Dr. David Sabel

Hintergrund zum Pumping-Lemma

Formalismen zur Darstellung von regulären Sprachen:

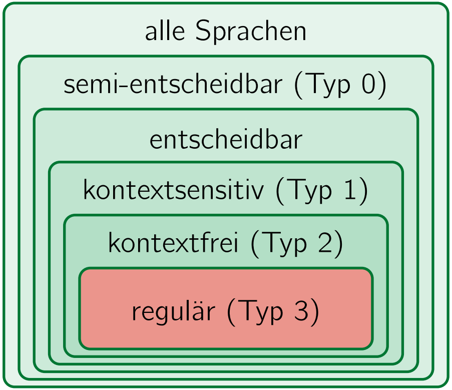
- reguläre Grammatiken
- endliche Automaten
- reguläre Ausdrücke



Hintergrund zum Pumping-Lemma

Formalismen zur Darstellung von regulären Sprachen:

- reguläre Grammatiken
- endliche Automaten
- reguläre Ausdrücke



Wie zeigt man, dass eine formale Sprache nicht regulär ist?
Das Pumping-Lemma ist ein Werkzeug dafür.

Exkurs: Beweistechniken für Quantoren

Beweise für $\forall$ und $\exists$ variieren, je nachdem, ob die Aussage zu beweisen ist oder angenommen wird.

Auszug aus Aufgabenblatt 0:

	Um eine Aussage dieser Form zu beweisen …	Wenn eine Aussage dieser Form angenommen wird …
$\forall x,\ P(x)$	beweise, dass $P(a)$ für ein beliebiges a gilt	nimm $P(a)$ für jedes konkrete a an
$\exists x,\ P(x)$	gib ein konkretes a an und beweise $P(a)$	nimm ein beliebiges a an, für das $P(a)$ gilt

Exkurs: Beispiel für Beweistechniken für Quantoren

Definition

Eine mit $>$ ausgestattete Menge A hat die EGE-Eigenschaft, wenn gilt:
Für jedes $a \in A$ gibt es ein $b \in A$, sodass $b > a$
(d.h. $\forall a \in A, \exists b \in A, b > a$).

(„EGE“ steht für „*exists greater element*“.)

Exkurs: Beispiel für Beweistechniken für Quantoren

Satz

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit $>$ haben die EGE-Eigenschaft.

Exkurs: Beispiel für Beweistechniken für Quantoren

Satz

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit $>$ haben die EGE-Eigenschaft.

Beweis Wir zeigen: Für jede Zahl $a \in \mathbb{N}$ gibt es eine Zahl $b \in \mathbb{N}$, sodass $b > a$.

Exkurs: Beispiel für Beweistechniken für Quantoren

Satz

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit $>$ haben die EGE-Eigenschaft.

Beweis Wir zeigen: Für jede Zahl $a \in \mathbb{N}$ gibt es eine Zahl $b \in \mathbb{N}$, sodass $b > a$.
Sei $a \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir müssen dann beweisen, dass es $b \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $b > a$.

Exkurs: Beispiel für Beweistechniken für Quantoren

Satz

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit $>$ haben die EGE-Eigenschaft.

Beweis Wir zeigen: Für jede Zahl $a \in \mathbb{N}$ gibt es eine Zahl $b \in \mathbb{N}$, sodass $b > a$.
Sei $a \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir müssen dann beweisen, dass es $b \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $b > a$.
Wir wählen $b = a + 1$ und beweisen $a + 1 > a$, was offensichtlich gilt. $\square$

Exkurs: Beispiel für Beweistechniken für Quantoren

Satz

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit $>$ haben die EGE-Eigenschaft.

Beweis Wir zeigen: Für jede Zahl $a \in \mathbb{N}$ gibt es eine Zahl $b \in \mathbb{N}$, sodass $b > a$.
Sei $a \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir müssen dann beweisen, dass es $b \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $b > a$.
Wir wählen $b = a + 1$ und beweisen $a + 1 > a$, was offensichtlich gilt. $\square$

Satz

Die nicht positiven ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ mit $>$ haben nicht die EGE-Eigenschaft.

Exkurs: Beispiel für Beweistechniken für Quantoren

Satz

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit $>$ haben die EGE-Eigenschaft.

Beweis Wir zeigen: Für jede Zahl $a \in \mathbb{N}$ gibt es eine Zahl $b \in \mathbb{N}$, sodass $b > a$.
Sei $a \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir müssen dann beweisen, dass es $b \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $b > a$.
Wir wählen $b = a + 1$ und beweisen $a + 1 > a$, was offensichtlich gilt. $\square$

Satz

Die nicht positiven ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ mit $>$ haben nicht die EGE-Eigenschaft.

Beweis Durch Widerspruch. Wir nehmen an, dass $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ die EGE-Eigenschaft hat.

Exkurs: Beispiel für Beweistechniken für Quantoren

Satz

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit $>$ haben die EGE-Eigenschaft.

Beweis Wir zeigen: Für jede Zahl $a \in \mathbb{N}$ gibt es eine Zahl $b \in \mathbb{N}$, sodass $b > a$.
Sei $a \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir müssen dann beweisen, dass es $b \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $b > a$.
Wir wählen $b = a + 1$ und beweisen $a + 1 > a$, was offensichtlich gilt. $\square$

Satz

Die nicht positiven ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ mit $>$ haben nicht die EGE-Eigenschaft.

Beweis Durch Widerspruch. Wir nehmen an, dass $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ die EGE-Eigenschaft hat.
D.h. für jede Zahl $a \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ gibt es eine Zahl $b \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, sodass $b > a$.

Exkurs: Beispiel für Beweistechniken für Quantoren

Satz

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit $>$ haben die EGE-Eigenschaft.

Beweis Wir zeigen: Für jede Zahl $a \in \mathbb{N}$ gibt es eine Zahl $b \in \mathbb{N}$, sodass $b > a$.
Sei $a \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir müssen dann beweisen, dass es $b \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $b > a$.
Wir wählen $b = a + 1$ und beweisen $a + 1 > a$, was offensichtlich gilt. $\square$

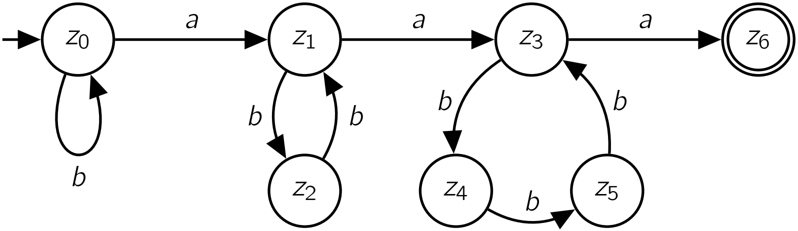
Satz

Die nicht positiven ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ mit $>$ haben nicht die EGE-Eigenschaft.

Beweis Durch Widerspruch. Wir nehmen an, dass $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ die EGE-Eigenschaft hat.
D.h. für jede Zahl $a \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ gibt es eine Zahl $b \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, sodass $b > a$.
Wir wählen $a = 0$. Es gibt also eine Zahl $b \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, sodass $b > 0$. Aber 0 ist die größte Zahl in $\mathbb{Z}_{\leq 0}$. Widerspruch. $\square$

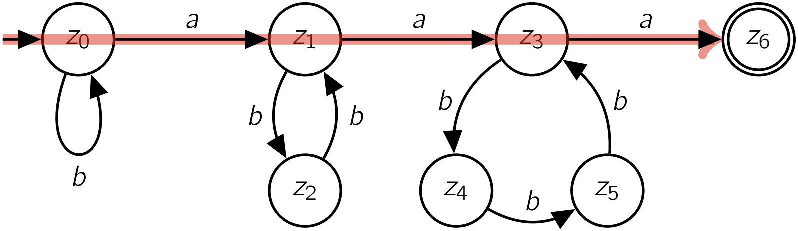
Intuition hinter dem Pumping-Lemma

DFA M:



Intuition hinter dem Pumping-Lemma

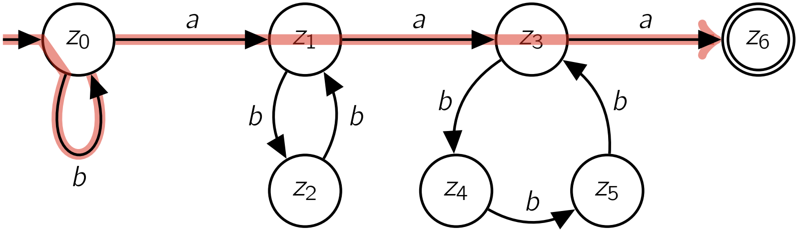
DFA M:



Von M erkannte Wörter der Länge 3,

Intuition hinter dem Pumping-Lemma

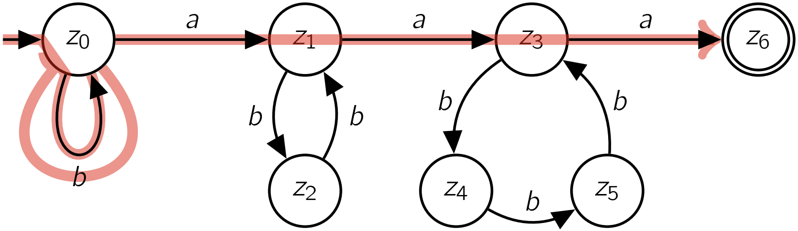
DFA M:



Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4,

Intuition hinter dem Pumping-Lemma

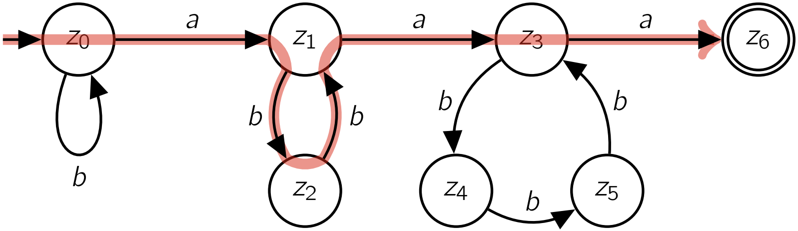
DFA M:



Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5,

Intuition hinter dem Pumping-Lemma

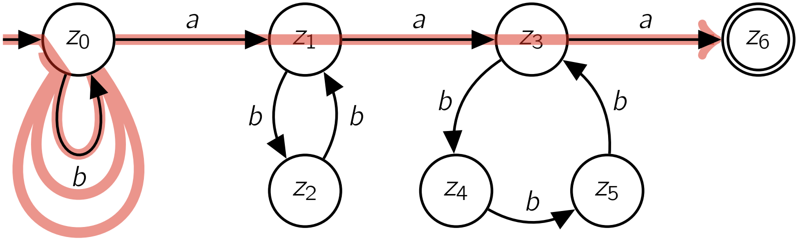
DFA M:



Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5,

Intuition hinter dem Pumping-Lemma

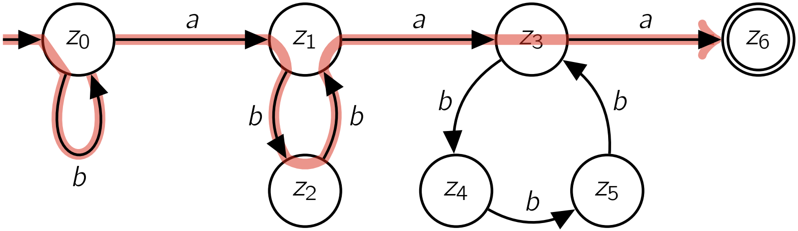
DFA M:



Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, ...

Intuition hinter dem Pumping-Lemma

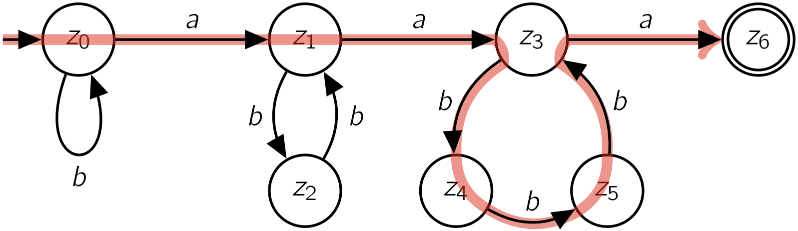
DFA M:



Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, ...

Intuition hinter dem Pumping-Lemma

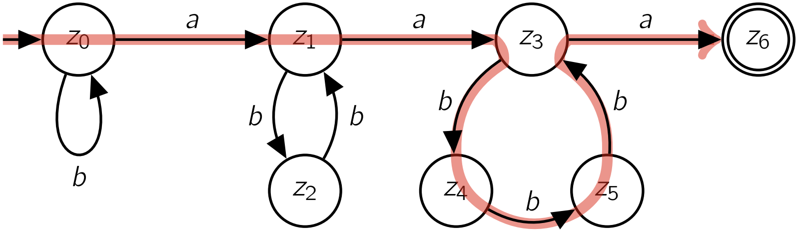
DFA M:



Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, . . .

Intuition hinter dem Pumping-Lemma

DFA M:



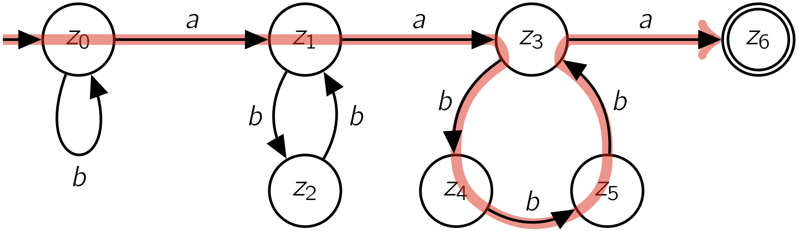
Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, ...

Beobachtungen:

1. Jedes Wort $z \in L(M)$ der Länge > 3 muss mindestens eine Schleife durchlaufen.

Intuition hinter dem Pumping-Lemma

DFA M:



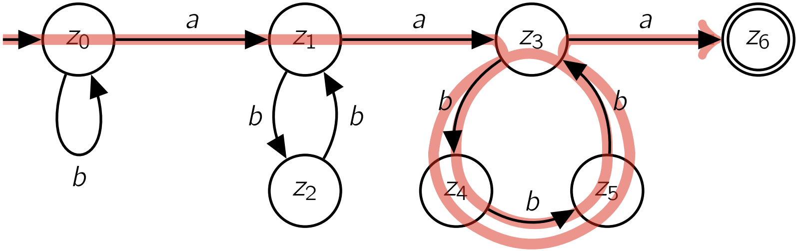
Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, ...

Beobachtungen:

1. Jedes Wort $z \in L(M)$ der Länge > 3 muss mindestens eine Schleife durchlaufen.
2. Wenn die Schleife mehrfach durchgelaufen wird, wird das entsprechende Wort immer noch erkannt. D.h. Wörter in $L(M)$ mit Länge > 3 können wir aufpumpen und verbleiben in $L(M)$.

Intuition hinter dem Pumping-Lemma

DFA M:



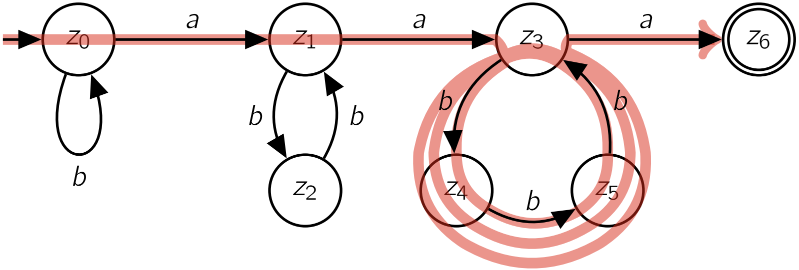
Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, ...

Beobachtungen:

1. Jedes Wort $z \in L(M)$ der Länge > 3 muss mindestens eine Schleife durchlaufen.
2. Wenn die Schleife mehrfach durchgelaufen wird,
   wird das entsprechende Wort immer noch erkannt. D.h.
   Wörter in $L(M)$ mit Länge > 3 können wir aufpumpen und verbleiben in $L(M)$.

Intuition hinter dem Pumping-Lemma

DFA M:



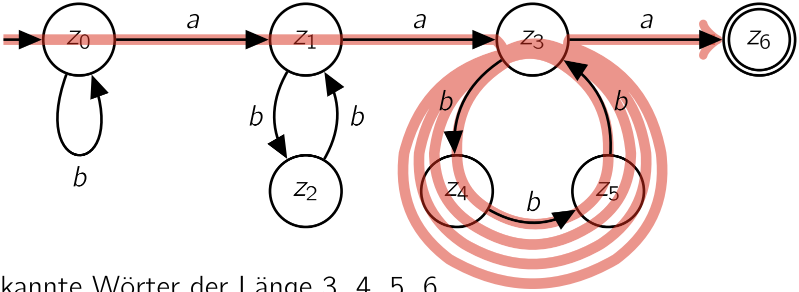
Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, ...

Beobachtungen:

1. Jedes Wort $z \in L(M)$ der Länge > 3 muss mindestens eine Schleife durchlaufen.
2. Wenn die Schleife mehrfach durchgelaufen wird,
   wird das entsprechende Wort immer noch erkannt. D.h.
   Wörter in $L(M)$ mit Länge > 3 können wir aufpumpen und verbleiben in $L(M)$.

Intuition hinter dem Pumping-Lemma

DFA M:



Von M erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, ...

Beobachtungen:

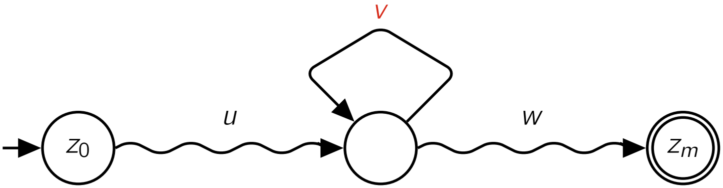
1. Jedes Wort $z \in L(M)$ der Länge > 3 muss mindestens eine Schleife durchlaufen.
2. Wenn die Schleife mehrfach durchgelaufen wird,
   wird das entsprechende Wort immer noch erkannt. D.h.
   Wörter in $L(M)$ mit Länge > 3 können wir aufpumpen und verbleiben in $L(M)$.

Intuition hinter dem Pumping-Lemma

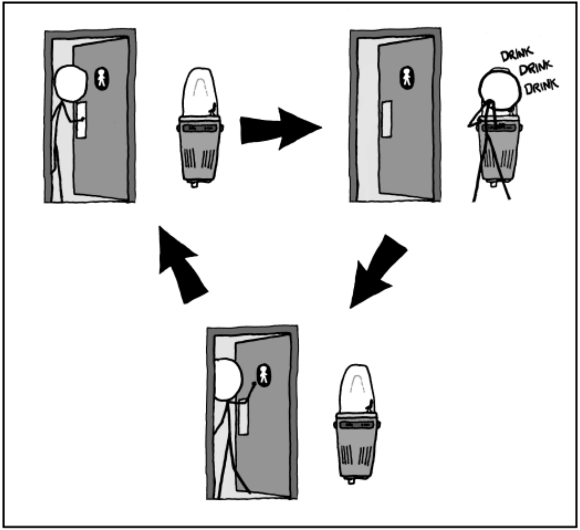
Gilt das allgemein?

Intuition hinter dem Pumping-Lemma

Gilt das allgemein? Ja



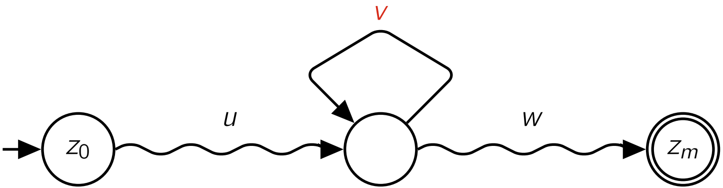
- Wenn ein DFA n Zustände hat, dann müssen akzeptierte Wörter der Länge $\geq n$ eine Schleife durchlaufen.
- Diese Wörter kann man aufpumpen: uvw, $uvvw$, $uvvvw$, ...
  Man kann auch die Schleife überspringen: uw.
  Allgemein: uv^iw für $i \in \mathbb{N}$ liegt in der erkannten Sprache.



I AVOID DRINKING FOUNTAINS OUTSIDE BATHROOMS BECAUSE I'M AFRAID OF GETTING TRAPPED IN A LOOP.

xkcd.com/986/

Die Pumping-Eigenschaft für reguläre Sprachen



Definition

Eine Sprache L hat die Pumping-Eigenschaft (für reguläre Sprachen), wenn gilt:
Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$, welches Mindestlänge n hat (d.h. $|z| \geq n$), als $z = uvw$ geschrieben werden kann, sodass gilt:

1. $|uv| \leq n$
2. $|v| \geq 1$
3. für alle $i \in \mathbb{N}$: $uv^iw \in L$.

Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Lemma (Pumping-Lemma)

Jede reguläre Sprache hat die Pumping-Eigenschaft.

Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Lemma (Pumping-Lemma)

Jede reguläre Sprache hat die Pumping-Eigenschaft.

Beweis Sei L eine reguläre Sprache. Wir zeigen, dass es eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt, sodass jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n$ als $z = uvw$ geschrieben werden kann, sodass $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L$ und für alle $i \in \mathbb{N}$.

Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Lemma (Pumping-Lemma)

Jede reguläre Sprache hat die Pumping-Eigenschaft.

Beweis Sei L eine reguläre Sprache. Wir zeigen, dass es eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt, sodass jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n$ als $z = uvw$ geschrieben werden kann, sodass $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L$ und für alle $i \in \mathbb{N}$.

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA mit $L(M) = L$.

Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Lemma (Pumping-Lemma)

Jede reguläre Sprache hat die Pumping-Eigenschaft.

Beweis Sei L eine reguläre Sprache. Wir zeigen, dass es eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt, sodass jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n$ als $z = uvw$ geschrieben werden kann, sodass $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L$ und für alle $i \in \mathbb{N}$.

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA mit $L(M) = L$.

Wir wählen $n = |Z|$. Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$.

Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Lemma (Pumping-Lemma)

Jede reguläre Sprache hat die Pumping-Eigenschaft.

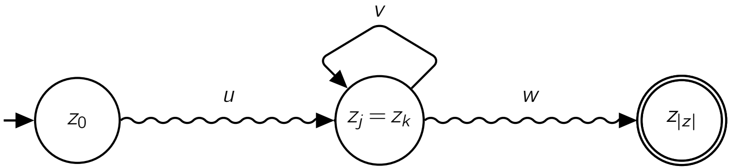
Beweis Sei L eine reguläre Sprache. Wir zeigen, dass es eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gibt, sodass jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n$ als $z = uvw$ geschrieben werden kann, sodass $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L$ und für alle $i \in \mathbb{N}$.

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA mit $L(M) = L$.

Wir wählen $n = |Z|$. Sei $z \in L$ mit $|z| \geq n$.

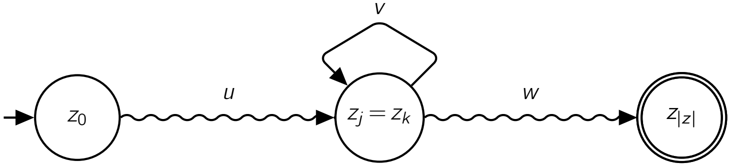
Sei $z_0, \ldots, z_{|z|}$ der Lauf für z, mit $z_{|z|} \in E$.
Spätestens nach Lesen von n $(= |Z|)$ Zeichen wird einen Zustand erneut besucht.
Sei z_k (mit $k \leq n$) der erste Zustand, der bereits besucht wurde.

Beweis (Fortsetzung) Daher gibt es $j < k$, sodass $z_k = z_j$, k ist minimal und $z = uvw$ mit



Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

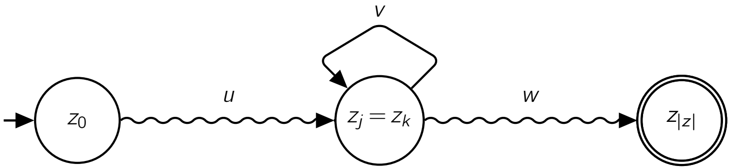
Beweis (Fortsetzung) Daher gibt es $j < k$, sodass $z_k = z_j$, k ist minimal und $z = uvw$ mit



Wir zeigen nun die drei geforderten Eigenschaften der Zerlegung:

Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Beweis (Fortsetzung) Daher gibt es $j < k$, sodass $z_k = z_j$, k ist minimal und $z = uvw$ mit

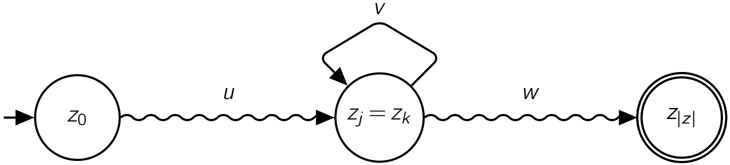


Wir zeigen nun die drei geforderten Eigenschaften der Zerlegung:

- $|v| \geq 1$: folgt aus $j < k$.

Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Beweis (Fortsetzung) Daher gibt es $j < k$, sodass $z_k = z_j$, k ist minimal und $z = uvw$ mit

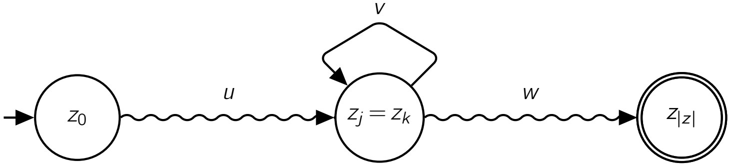


Wir zeigen nun die drei geforderten Eigenschaften der Zerlegung:

- $|v| \geq 1$: folgt aus $j < k$.
- $|uv| \leq n$: folgt aus $k \leq n$.

Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Beweis (Fortsetzung) Daher gibt es $j < k$, sodass $z_k = z_j$, k ist minimal und $z = uvw$ mit



Wir zeigen nun die drei geforderten Eigenschaften der Zerlegung:

- $|v| \geq 1$: folgt aus $j < k$.
- $|uv| \leq n$: folgt aus $k \leq n$.
- $uv^iw \in L(M)$ für jedes $i \in N$: lässt sich im obigen Diagramm lesen. $\square$

Das Paradoxon der endlichen Sprachen

Endliche Sprachen sind regulär.
Warum erfüllen sie die Pumping-Eigenschaft?

Das Paradoxon der endlichen Sprachen

Endliche Sprachen sind regulär.
Warum erfüllen sie die Pumping-Eigenschaft?

Definition

Eine Sprache L hat die Pumping-Eigenschaft (für reguläre Sprachen), wenn gilt:
Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$, welches Mindestlänge n hat (d.h. $|z| \geq n$), als $z = uvw$ geschrieben werden kann, sodass gilt:

1. $|uv| \leq n$
2. $|v| \geq 1$
3. für alle $i \in \mathbb{N}$: $uv^iw \in L$.

Das Paradoxon der endlichen Sprachen

Endliche Sprachen sind regulär.
Warum erfüllen sie die Pumping-Eigenschaft?

Definition

Eine Sprache L hat die Pumping-Eigenschaft (für reguläre Sprachen), wenn gilt:
Es gibt eine Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$, sodass jedes Wort $z \in L$, welches Mindestlänge n hat (d.h. $|z| \geq n$), als $z = uvw$ geschrieben werden kann, sodass gilt:

1. $|uv| \leq n$
2. $|v| \geq 1$
3. für alle $i \in \mathbb{N}$: $uv^iw \in L$.

Wähle n größer als die Länge des längsten Worts.
Dann ist die Eigenschaft trivial erfüllt.

Anwendung des Pumping-Lemmas

Sei eine Sprache L, die wir als nicht regulär beweisen wollen.

Anwendung des Pumping-Lemmas

Sei eine Sprache L, die wir als nicht regulär beweisen wollen.

Pumping-Lemma:

$$L \text{ ist regulär} \Longrightarrow L \text{ hat die Pumping-Eigenschaft}$$

Anwendung des Pumping-Lemmas

Sei eine Sprache L, die wir als nicht regulär beweisen wollen.

Pumping-Lemma:

$$L \text{ ist regulär} \Longrightarrow L \text{ hat die Pumping-Eigenschaft}$$

Kontraposition:

$$L \text{ hat nicht die Pumping-Eigenschaft} \Longrightarrow L \text{ ist nicht regulär}$$

Anwendung des Pumping-Lemmas

Sei eine Sprache L, die wir als nicht regulär beweisen wollen.

Pumping-Lemma:

$$L \text{ ist regulär} \implies L \text{ hat die Pumping-Eigenschaft}$$

Kontraposition:

$$L \text{ hat nicht die Pumping-Eigenschaft} \implies L \text{ ist nicht regulär}$$

Beweisstrategie für die Aussage „L nicht regulär“:

1. Durch die Kontraposition reicht es zu zeigen, dass L die Pumping-Eigenschaft nicht hat.
2. Zeige dies durch Widerspruch: Nehme an, dass L die Pumping-Eigenschaft hat.
3. Leite einen Widerspruch her.
4. D.h. L ist nicht regulär.

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Um Nichtregularität von L zu zeigen, reicht es durch das Pumping-Lemma zu zeigen, dass L die Pumping-Eigenschaft nicht hat.

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Um Nichtregularität von L zu zeigen, reicht es durch das Pumping-Lemma zu zeigen, dass L die Pumping-Eigenschaft nicht hat.

Durch Widerspruch: Wir nehmen an, dass L die Pumping-Eigenschaft hat.

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Um Nichtregularität von L zu zeigen, reicht es durch das Pumping-Lemma zu zeigen, dass L die Pumping-Eigenschaft nicht hat.

Durch Widerspruch: Wir nehmen an, dass L die Pumping-Eigenschaft hat.

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Um Nichtregularität von L zu zeigen, reicht es durch das Pumping-Lemma zu zeigen, dass L die Pumping-Eigenschaft nicht hat.

Durch Widerspruch: Wir nehmen an, dass L die Pumping-Eigenschaft hat.

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

Wir wählen $z \in L$ als $z = a^n b^n$. Damit ist auch $|z| \geq n$ erfüllt.

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Um Nichtregularität von L zu zeigen, reicht es durch das Pumping-Lemma zu zeigen, dass L die Pumping-Eigenschaft nicht hat.

Durch Widerspruch: Wir nehmen an, dass L die Pumping-Eigenschaft hat.

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

Wir wählen $z \in L$ als $z = a^n b^n$. Damit ist auch $|z| \geq n$ erfüllt.

Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung von z, sodass $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $u = a^r$, $v = a^s$ mit $r + s \leq n$, $s \geq 1$ und $w = a^t b^n$ mit $r + s + t = n$.

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Um Nichtregularität von L zu zeigen, reicht es durch das Pumping-Lemma zu zeigen, dass L die Pumping-Eigenschaft nicht hat.

Durch Widerspruch: Wir nehmen an, dass L die Pumping-Eigenschaft hat.

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

Wir wählen $z \in L$ als $z = a^n b^n$. Damit ist auch $|z| \geq n$ erfüllt.

Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung von z, sodass $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $u = a^r$, $v = a^s$ mit $r + s \leq n$, $s \geq 1$ und $w = a^t b^n$ mit $r + s + t = n$.

Wir betrachten das Wort $uv^2 w$. Es gilt $uv^2 w = a^r a^s a^s a^t b^n = a^{n+s} b^n \notin L$, da $s \geq 1$. Nach Annahme gilt aber $uv^i w \in L$ für jedes $i \in \mathbb{N}$, insbesondere für $i = 2$. Widerspruch. $\square$

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Es geht kürzer:

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Mit dem Pumping-Lemma.

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

Wir wählen $z \in L$ als $z = a^n b^n$ mit $|z| \geq n$.

Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung von z, sodass $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $u = a^r$, $v = a^s$ mit $r + s \leq n$, $s \geq 1$ und $w = a^t b^n$ mit $r + s + t = n$.

Wir wählen $i = 2$. Es gilt $uv^2 w = a^r a^s a^s a^t b^n = a^{n+s} b^n \notin L$, da $s \geq 1$. Widerspruch. $\square$

Das Pumping-Lemma als Spiel

Sei L die Sprache.

Schritte:

1. Der Gegner wählt die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
2. Wir wählen das Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$.
3. Der Gegner wählt die Zerlegung $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.
4. Wir gewinnen das Spiel, wenn wir ein $i \in \mathbb{N}$ angeben können, sodass $uv^iw \notin L$.

Das Pumping-Lemma als Spiel

Sei L die Sprache.

Schritte:

1. Der Gegner wählt die Zahl $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
2. Wir wählen das Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$.
3. Der Gegner wählt die Zerlegung $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.
4. Wir gewinnen das Spiel, wenn wir ein $i \in \mathbb{N}$ angeben können, sodass $uv^iw \notin L$.

Wenn wir das Spiel für alle Wahlmöglichkeiten des Gegners gewinnen,
dann haben wir nachgewiesen, dass L nicht regulär ist.

Das Pumping-Lemma als Spiel

Satz

Die Sprache $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Wir zeigen, dass wir das eben eingeführte Spiel stets gewinnen:

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ vom Gegner gewählt.
2. Wir wählen $z \in L$ als $z = a^n b^n$ mit $|z| \geq n$.
3. Der Gegner wählt die Zerlegung $z = uvw$, sodass $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$. Dann ist $u = a^r, v = a^s$ mit $r + s \leq n$, $s \geq 1$ und $w = a^t b^n$ mit $r + s + t = n$.
4. Wir wählen $i = 2$. Es gilt $uv^2w = a^r a^s a^s a^t b^n = a^{n+s} b^n \notin L$, da $s \geq 1$. Also gewinnen wir. $\square$

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Satz

Die Sprache $L = \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$ ist nicht regulär.

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Satz

Die Sprache $L = \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Mit dem Pumping-Lemma.

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Satz

Die Sprache $L = \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Mit dem Pumping-Lemma.

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Satz

Die Sprache $L = \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Mit dem Pumping-Lemma.

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

Wir wählen $z \in L$ als $z = a^p$, wobei p die nächste Primzahl ist, die größer gleich n ist. Wir haben $|z| = p \geq n$.

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Satz

Die Sprache $L = \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Mit dem Pumping-Lemma.

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

Wir wählen $z \in L$ als $z = a^p$, wobei p die nächste Primzahl ist, die größer gleich n ist. Wir haben $|z| = p \geq n$.

Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung von z, sodass $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Dann $u = a^r$, $v = a^s$ (mit $s \geq 1$) und $w = a^t$.

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Satz

Die Sprache $L = \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Mit dem Pumping-Lemma.

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

Wir wählen $z \in L$ als $z = a^p$, wobei p die nächste Primzahl ist, die größer gleich n ist. Wir haben $|z| = p \geq n$.

Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung von z, sodass $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Dann $u = a^r$, $v = a^s$ (mit $s \geq 1$) und $w = a^t$.

Wir wählen $i = p + 1$. Es gilt $uv^{p+1}w \notin L$, denn $uv^{p+1}w = a^r(a^s)^{p+1}a^t = a^{r+s\cdot(p+1)+t} = a^{r+s\cdot p+s+t} = a^{s\cdot p+p} = a^{p\cdot(s+1)}$ und für $s \geq 1$ folgt, dass $p \cdot (s+1)$ keine Primzahl sein kann. Widerspruch. $\square$

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Satz

Die Sprache $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Mit dem Pumping-Lemmma.

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Satz

Die Sprache $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Mit dem Pumping-Lemmma.

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Satz

Die Sprache $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Mit dem Pumping-Lemmma.

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

Wir wählen $z = a^{n^2} \in L$ mit $|z| = n^2 \geq n$.

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Satz

Die Sprache $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Mit dem Pumping-Lemmma.

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

Wir wählen $z = a^{n^2} \in L$ mit $|z| = n^2 \geq n$.

Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung von z, sodass $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L$ für jedes $i \in \mathbb{N}$.

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Satz

Die Sprache $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Mit dem Pumping-Lemmma.

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

Wir wählen $z = a^{n^2} \in L$ mit $|z| = n^2 \geq n$.

Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung von z, sodass $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L$ für jedes $i \in \mathbb{N}$.

Wir wählen $i = 2$. Wir betrachten $uv^2w = a^k$.

- $1 + n^2 \leq k$ (denn $|v| \geq 1$)
- $k \leq n^2 + n$ (denn $|uv| \leq n$ und daher $|v| \leq n$)

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Satz

Die Sprache $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Mit dem Pumping-Lemmma.

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

Wir wählen $z = a^{n^2} \in L$ mit $|z| = n^2 \geq n$.

Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung von z, sodass $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^iw \in L$ für jedes $i \in \mathbb{N}$.

Wir wählen $i = 2$. Wir betrachten $uv^2w = a^k$.

- $1 + n^2 \leq k$ (denn $|v| \geq 1$)
- $k \leq n^2 + n$ (denn $|uv| \leq n$ und daher $|v| \leq n$)

D.h. wir haben $n^2 < k \leq n^2 + n = (n+1) \cdot n < (n+1)^2$.
Dann kann k keine Quadratzahl sein. Daher gilt $uv^2w \notin L$. Widerspruch. □

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Satz

Die Sprache $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ist ein Palindrom}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Mit dem Pumping-Lemma.

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Satz

Die Sprache $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ist ein Palindrom}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Mit dem Pumping-Lemma.

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Satz

Die Sprache $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ist ein Palindrom}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Mit dem Pumping-Lemma.

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

Wir wählen $z = a^n b a^n \in L$ mit $|w| = 2n + 1 \geq n$.

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Satz

Die Sprache $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ist ein Palindrom}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Mit dem Pumping-Lemma.

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

Wir wählen $z = a^n b a^n \in L$ mit $|w| = 2n + 1 \geq n$.

Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung von z, sodass $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für jedes $i \in \mathbb{N}$.

Nichtregularität zeigen mit dem Pumping-Lemma

Satz

Die Sprache $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ist ein Palindrom}\}$ ist nicht regulär.

Beweis Mit dem Pumping-Lemma.

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig.

Wir wählen $z = a^n b a^n \in L$ mit $|w| = 2n + 1 \geq n$.

Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung von z, sodass $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^i w \in L$ für jedes $i \in \mathbb{N}$.

Wir wählen $i = 0$. Es gilt $uv^0 w \notin L$, denn $uv^0 w = a^k b a^n$ mit $k = n - |v| < n$ ist kein Palindrom. Widerspruch. $\square$

Pumping-Eigenschaft ist nicht hinreichend

Lemma

Es gibt Sprachen, die die Pumping-Eigenschaft haben aber nicht regulär sind.
Die Sprache $L = \{a^j b^k c^k \mid j, k \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist eine solche Sprache.

Beweis

1. Wir zeigen, dass L die Pumping-Eigenschaft hat.

Pumping-Eigenschaft ist nicht hinreichend

Lemma

Es gibt Sprachen, die die Pumping-Eigenschaft haben aber nicht regulär sind.
Die Sprache $L = \{a^j b^k c^k \mid j, k \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist eine solche Sprache.

Beweis

1. Wir zeigen, dass L die Pumping-Eigenschaft hat.

   Wir wählen $n = 1$.

Pumping-Eigenschaft ist nicht hinreichend

Lemma

Es gibt Sprachen, die die Pumping-Eigenschaft haben aber nicht regulär sind.
Die Sprache $L = \{a^j b^k c^k \mid j, k \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist eine solche Sprache.

Beweis

1. Wir zeigen, dass L die Pumping-Eigenschaft hat.

   Wir wählen $n = 1$.

   Sei $z \in L$ ein Wort mit $|z| \geq n$.

Pumping-Eigenschaft ist nicht hinreichend

Lemma

Es gibt Sprachen, die die Pumping-Eigenschaft haben aber nicht regulär sind.
Die Sprache $L = \{a^j b^k c^k \mid j, k \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist eine solche Sprache.

Beweis

1. Wir zeigen, dass L die Pumping-Eigenschaft hat.

   Wir wählen $n = 1$.

   Sei $z \in L$ ein Wort mit $|z| \geq n$.

   Da z von der Form $a^j b^k c^k$ ist, dann muss $j > 0$ gelten und wir zerlegen $z = uvw$ mit $u = \varepsilon$, $v = a$, $w = a^{j-1} b^k c^k$. Da $|v| = 1$, $|uv| \leq n$ und $uv^i w = a^{j+i-1} b^k c^k \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$, hat L die Pumping-Eigenschaft.

Pumping-Eigenschaft ist nicht hinreichend

Lemma

Es gibt Sprachen, die die Pumping-Eigenschaft haben aber nicht regulär sind.
Die Sprache $L = \{a^j b^k c^k \mid j, k \in \mathbb{N}_{>0}\}$ ist eine solche Sprache.

Beweis

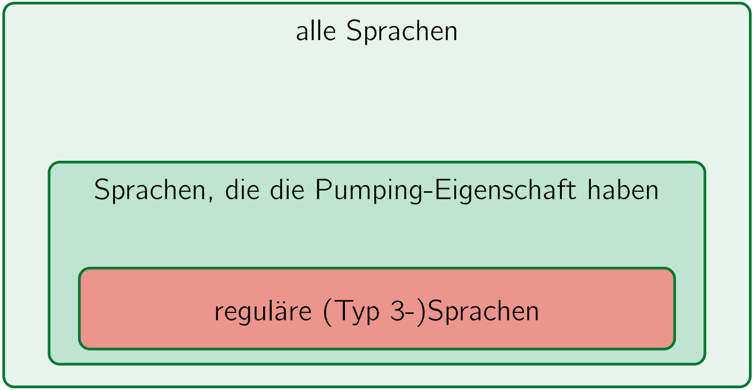
1. Wir zeigen, dass L die Pumping-Eigenschaft hat.

   Wir wählen $n = 1$.

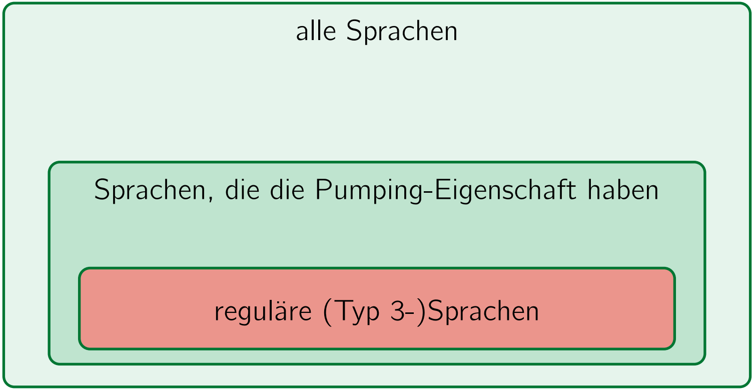
   Sei $z \in L$ ein Wort mit $|z| \geq n$.

   Da z von der Form $a^j b^k c^k$ ist, dann muss $j > 0$ gelten und wir zerlegen $z = uvw$ mit $u = \varepsilon$, $v = a$, $w = a^{j-1} b^k c^k$. Da $|v| = 1$, $|uv| \leq n$ und $uv^i w = a^{j+i-1} b^k c^k \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$, hat L die Pumping-Eigenschaft.
2. Beweis, dass L nicht regulär ist folgt später (nur FSK). □

Pumping-Eigenschaft ist nicht hinreichend



Pumping-Eigenschaft ist nicht hinreichend



Wichtige Konsequenz:

- Das Pumping-Lemma kann nicht verwendet werden, um zu zeigen, dass eine Sprache regulär ist.

Zusammenfassung vom Pumping-Lemma

Bezug zu Regularität:

- Das Pumping-Lemma gibt eine notwendige Bedingung für reguläre Sprachen. Sehr informell: *Wörter einer regulären Sprache können an einer Stelle aufgepumpt werden, wenn sie lang genug sind.*
- Das Pumping-Lemma gibt keine hinreichende Bedingung für reguläre Sprachen, d.h. Regularität kann nicht mit dem Pumping-Lemma gezeigt werden.

Anwendung:

- L hat nicht die Pumping-Eigenschaft $\Longrightarrow$ L nicht regulär
- Dies funktioniert nicht für jede nicht reguläre Sprache.