

## Übung 11 zur Vorlesung Formale Sprachen und Komplexität

### FSK11-1 PCP-Varianten

(2 Punkte)

- a) Wir betrachten das 456PCP-Problem, eine Variante von PCP, bei der die ‚Spielsteine‘ auf das Alphabet  $\Sigma = \{4, 5, 6\}$  beschränkt sind. Eine Instanz von 456PCP ist also eine endliche Folge von Paaren  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  mit  $x_i, y_i \in \{4, 5, 6\}^+$  für  $i = 1, \dots, n$ . Eine Lösung der Instanz  $K$  ist wie bei PCP eine endliche Folge von Indices  $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}$ , sodass  $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{i_1} \cdots y_{i_m}$ .

Zeigen Sie durch Reduktion von PCP auf 456PCP, dass 456PCP unentscheidbar ist.

- b) Wir betrachten das PCP4-Problem, eine Variante von PCP, bei der die Spielsteine aus vier Wörtern bestehen. Eine Instanz von PCP4 ist also eine endliche Folge von 4-Tupeln  $(x_1, y_1, z_1, u_1), \dots, (x_n, y_n, z_n, u_n)$  mit  $x_i, y_i, z_i, u_i \in \Sigma^+$  für  $i = 1, \dots, n$ . Eine Lösung der Instanz  $K$  ist ähnlich zu PCP eine endliche Folge von Indices  $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}$ , sodass  $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{i_1} \cdots y_{i_m} = z_{i_1} \cdots z_{i_m} = u_{i_1} \cdots u_{i_m}$ .

Zeigen Sie durch Reduktion von PCP auf PCP4, dass PCP4 unentscheidbar ist.

- c) Sind die folgenden Instanzen  $K_1, K_2$  von PCP4 lösbar? Wenn ja, geben Sie eine Lösung (also eine geeignete Folge von Indizes) an. Wenn nein, beweisen Sie, dass die Instanz keine Lösung hat.

$$K_1 = \left( \begin{bmatrix} bbc \\ bca \\ cab \\ bbca \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ ab \\ abb \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} cca \\ ca \\ a \\ ca \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} abc \\ bcc \\ ccc \\ bcc \end{bmatrix} \right)$$
$$K_2 = \left( \begin{bmatrix} c \\ b \\ bab \\ cc \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} acb \\ baa \\ aaa \\ acba \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} bca \\ caaa \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ ba \\ b \\ bab \end{bmatrix} \right)$$

### FSK11-2 Beweise prüfen

(2 Punkte)

In den folgenden Teilaufgaben betrachten wir jeweils einen Beweis, der einen Fehler enthält. Identifizieren Sie diesen Fehler (mit kurzer Begründung).

a) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Sprache

$$D = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ akzeptiert } w \text{ nicht}\}$$

ist semi-entscheidbar.

**Beweis:**

$D$  ist semi-entscheidbar. Um das zu zeigen, konstruieren wir eine DTM  $M$ , die  $D$  semi-entscheidet. Das heißt, dass  $M$  für alle Eingaben  $w \in D$  hält und für alle Eingaben  $w \notin D$  nicht hält.

Angenommen, es gäbe so eine Turingmaschine  $M$ . Betrachte ein Wort  $w \in \{0,1\}^*$ .

- Wenn  $w \in D$  ist, dann akzeptiert  $M_w$  die Eingabe  $w$ . Somit akzeptiert auch  $M$  das Wort  $w$ .
- Wenn  $w \notin D$  ist, dann hält  $M_w$  mit Eingabe  $w$  nicht. Somit akzeptiert auch  $M$  das Wort  $w$  nicht.

$M$  semi-entscheidet also  $D$ .

b) Sei  $L_u = \{w\#x \mid w, x \in \{0,1\}^* \text{ und } x \in L(M_w)\}$ . Diese Sprache ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar.

Zeigen Sie: Die Sprache  $L_r = \{w \in \{0,1\}^* \mid L(M_w) \text{ ist regulär}\}$  ist unentscheidbar.

**Beweis:**

Wir reduzieren  $L_u$  auf  $L_r$ . Da  $L_u$  unentscheidbar ist, folgt daraus, dass  $L_r$  unentscheidbar ist.

Sei  $v \in \{0,1,\#\}^*$ . Wir definieren die Reduktionsfunktion  $f$  durch

$$f(v) = \begin{cases} w_{M_3} & \text{falls } v = w\#x \text{ und } M_w \text{ akzeptiert } x \\ w_{M_4} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist  $M_3$  eine Turingmaschine, die die reguläre Sprache  $\{0,1\}^*$  akzeptiert.  $M_4$  ist eine Turingmaschine, die die nichtreguläre Sprache  $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  akzeptiert.  $w_{M_i}$  ist die Binärcodierung der jeweiligen Turingmaschine.

$M_3$ ,  $M_4$  und die Binärcodierungen sind offensichtlich berechenbar, also ist  $f$  berechenbar (und offensichtlich total). Weiterhin gilt:

$$\begin{array}{l} v \in L_u \\ \text{g.d.w. } v = w\#x \text{ und } x \in L(M_w) \\ \text{g.d.w. } M_{f(v)} \text{ akzeptiert eine reguläre Sprache} \\ \text{g.d.w. } f(v) \in L_r \end{array}$$

Somit ist  $f$  eine valide Reduktionsfunktion und  $L_u \leq L_r$ .

- c) Sei  $A = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ hält bei Eingabe 36 mit Ausgabe 42 an}\}$ . Zeigen Sie durch Reduktion von  $H_0$  auf  $A$ , dass  $A$  unentscheidbar ist.

**Beweis:**

Wir zeigen  $H_0 \leq A$ . Da  $H_0$  unentscheidbar ist, folgt daraus, dass auch  $A$  unentscheidbar ist.

Wir definieren die Reduktionsfunktion  $f : \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$  wie folgt. Für  $w \in \{0,1\}^*$  berechnet  $f$  zunächst die Turingmaschine  $M_w$ , erstellt daraus eine Turingmaschine  $T$  und berechnet anschließend deren Binärcodierung  $w_T$ . Dabei verhält sich  $T$  wie folgt:

- Prüfe, ob auf dem Band die Zahl 36 (in Binärdarstellung) steht. Falls nein, gehe in eine Endlosschleife über.
- Führe  $M_w$  aus.
- Falls  $M_w$  anhält, schreibe die Zahl 42 (in Binärdarstellung) auf das Band und akzeptiere.

Die Funktion  $f$  ist offensichtlich total. Sie ist auch berechenbar, da  $T$  konstruierbar ist. Weiterhin gilt:

$$\begin{array}{l} w \in H_0 \\ \text{g.d.w. } M_w \text{ hält auf leerem Band} \\ \text{g.d.w. } M_{f(w)} \text{ hält für Eingabe 36 mit Ausgabe 42} \\ \text{g.d.w. } f(w) \in A \end{array}$$

Somit ist  $f$  eine valide Reduktionsfunktion und  $H_0 \leq A$ .

**FSK11-3  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{NP}$**

(0 Punkte)

- a) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{P}$  unter Vereinigung abgeschlossen ist.
- b) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{P}$  unter Schnitt abgeschlossen ist.
- c) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{NP}$  unter Vereinigung abgeschlossen ist.
- d) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{NP}$  unter Schnitt abgeschlossen ist.

**FSK11-4 PCP-Varianten 2**

(0 Punkte)

- a) Wir betrachten das LPCP-Problem, eine Variante von PCP, bei der die ‚Spielsteine‘ auch das leere Wort enthalten können. Eine Instanz von LPCP mit Alphabet  $\Sigma$  ist also eine endliche Folge von Paaren  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  mit  $x_i, y_i \in \Sigma^*$  für

$i = 1, \dots, n$  (wohingegen bei PCP gilt:  $x_i, y_i \in \Sigma^+$ ). Eine Lösung der Instanz  $K$  ist wie bei PCP eine endliche Folge von Indices  $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}$  sodass  $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{i_1} \cdots y_{i_m}$ .

Zeigen Sie durch Reduktion von PCP auf LPCP, dass LPCP unentscheidbar ist.

- b) Wir betrachten das EVENPCP-Problem, eine Variante von LPCP, bei der die Wörter auf den Spielsteinen gerade Länge haben müssen. Eine Instanz von EVENPCP ist also eine endliche Folge von Paaren  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  mit  $x_i, y_i \in \{w \mid w \in \Sigma^* \text{ und } |w| \text{ gerade}\}$  für  $i = 1, \dots, n$ . Beispielsweise ist  $(ab, aaba)$  ein erlaubter Spielstein;  $(ab, aab)$  aber nicht.

Zeigen Sie durch Reduktion von PCP auf EVENPCP, dass EVENPCP unentscheidbar ist.

- c) Für Mengen  $\Sigma$  und  $\Delta$  nennen wir eine Funktion  $f : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$  einen *Homomorphismus* (siehe auch Aufgabe FSK6-4), wenn gilt:

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &= \varepsilon \\ f(u \circ v) &= f(u) \circ f(v) \quad \forall u, v \in \Sigma^* \end{aligned}$$

Wir definieren das Problem HOMPCP. Eine Instanz dieses Problem ist ein 4-Tupel  $(\Sigma, \Delta, f, g)$ , wobei  $\Sigma$  und  $\Delta$  endliche Mengen sind und  $f, g : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$  Homomorphismen. Eine Lösung der Instanz ist ein Wort  $w \in \Sigma^+$  sodass gilt:  $f(w) = g(w)$ .

Zeigen Sie durch Reduktion von LPCP auf HOMPCP, dass HOMPCP für  $|\Delta| \geq 2$  unentscheidbar ist.